

Задание В4

Решение прямоугольных треугольников

Часть 1

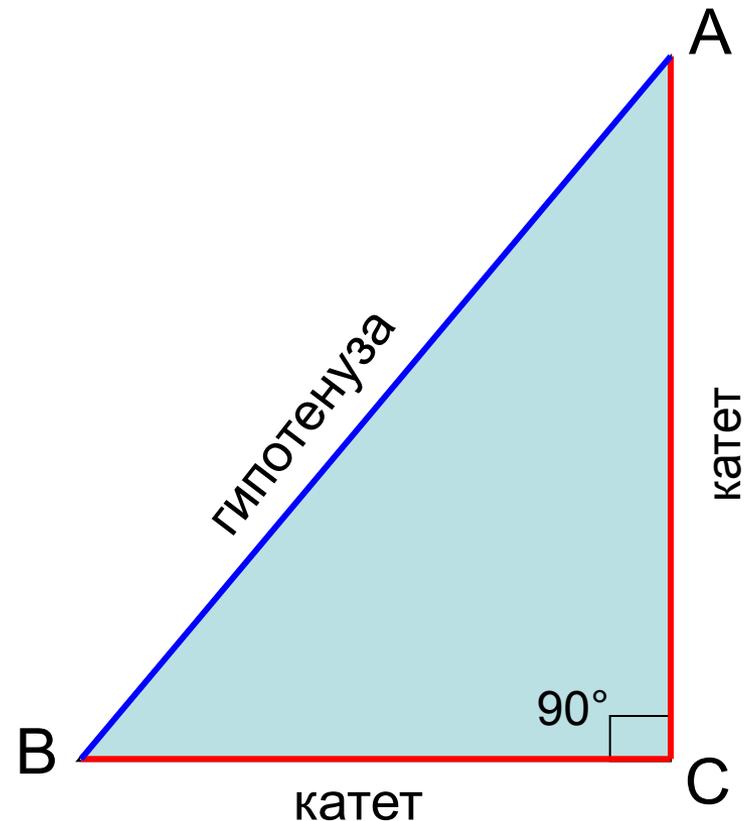
Теорема Пифагора

Прямоугольный треугольник

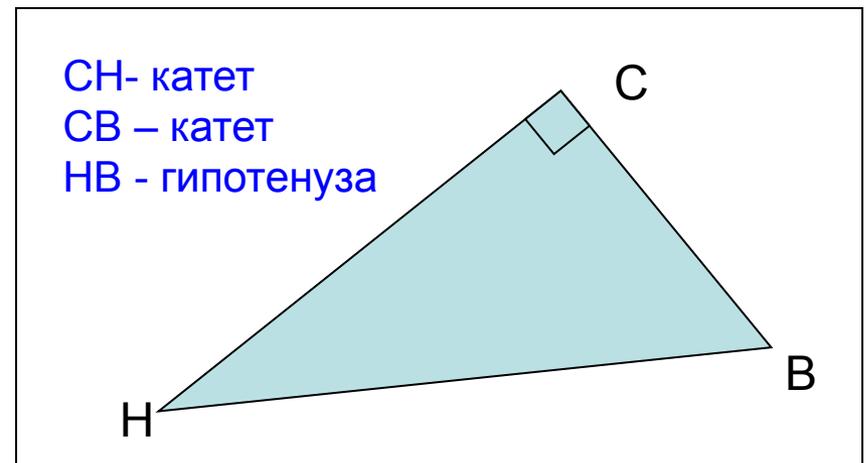
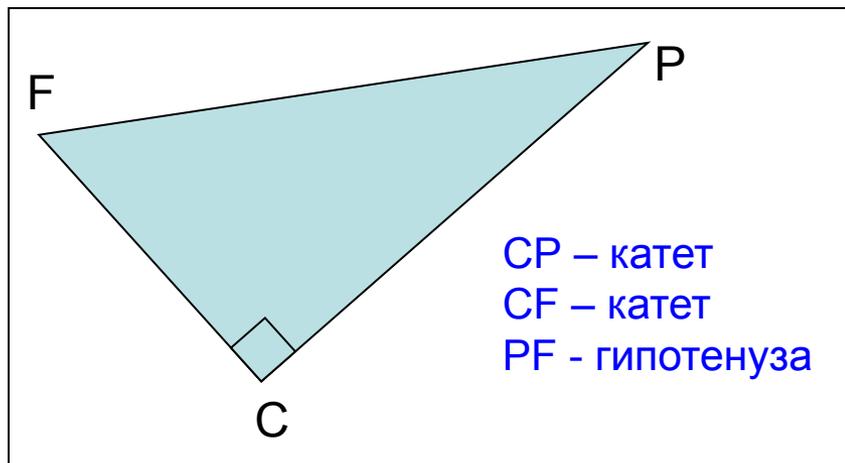
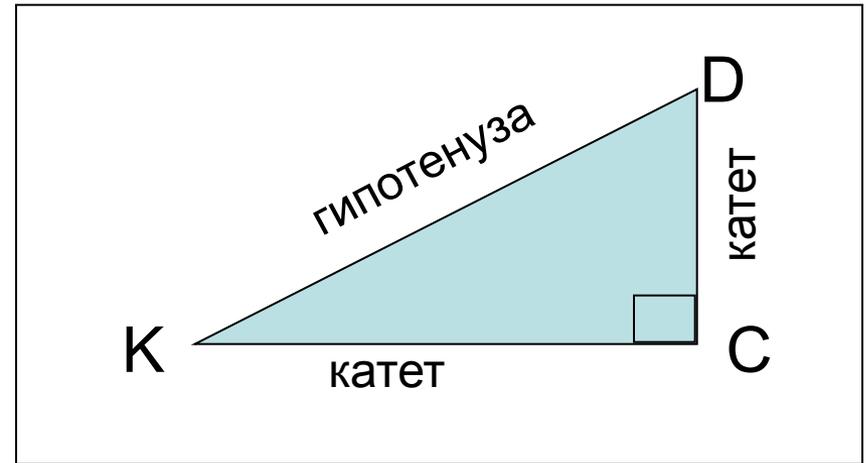
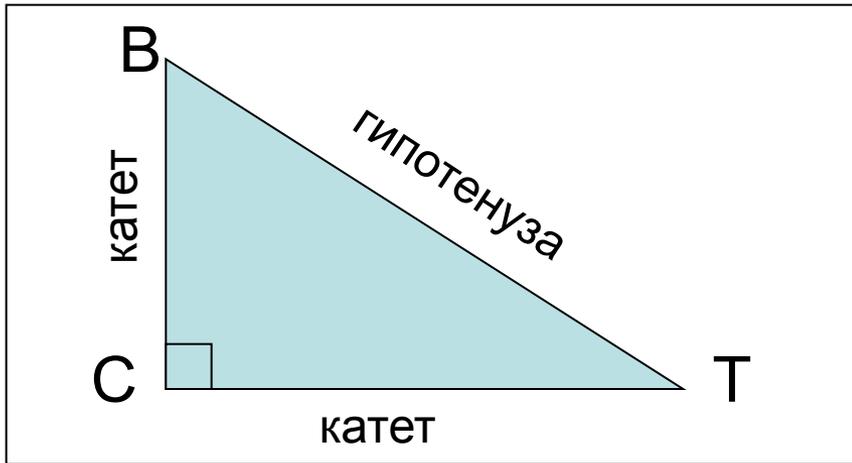
- Теорему Пифагора применяют для прямоугольных треугольников, то есть для треугольников у которых один угол равен 90 градусов.

Стороны прямоугольных треугольников имеют названия.

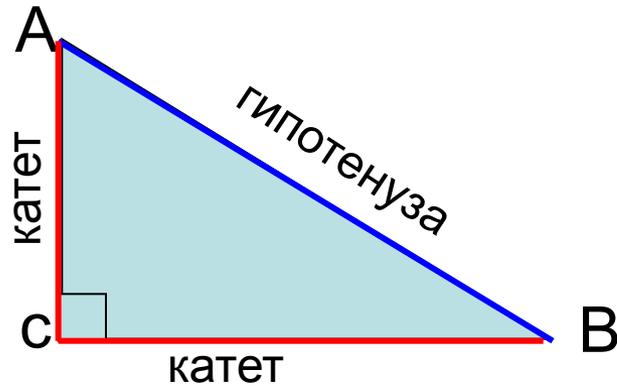
- Стороны, которые прилежат к прямому углу - **КАТЕТЫ**.
- Сторона, лежащая напротив прямого угла - **ГИПОТЕНУЗА**



Найдите катеты и гипотенузу в данных треугольниках



Теорема Пифагора



$$AB^2 = AC^2 + CB^2$$

AC - катет

BC - катет

AB - гипотенуза

Квадрат гипотенузы равен
сумме квадратов катетов

Применение Теоремы Пифагора. Найти гипотенузу по двум катетам

$$AC^2 + CB^2 = AB^2$$

$$K^2 + K^2 = \Gamma^2$$

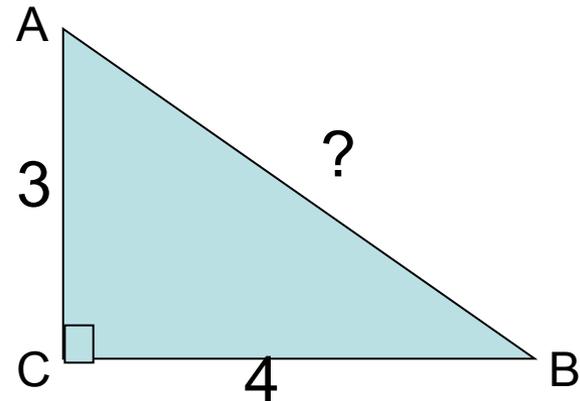
$$3^2 + 4^2 = \Gamma^2$$

$$9 + 16 = \Gamma^2$$

$$25 = \Gamma^2$$

$$\Gamma = \sqrt{25}$$

$$AB = 5$$



Применение Теоремы Пифагора. Найти катет по гипотенузе и другому катету

$$BC^2 = AB^2 - AC^2$$

$$10^2 - 8^2 = K^2$$

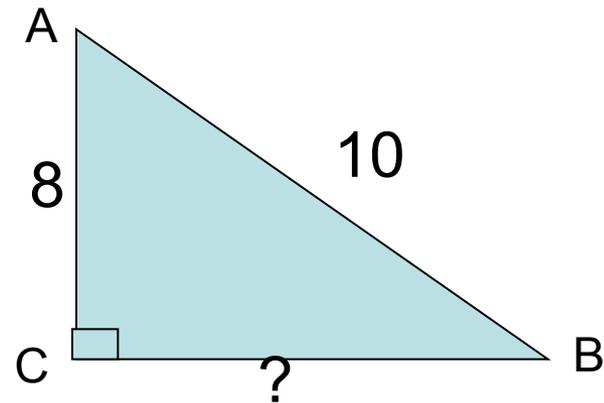
$$100 - 64 = K^2$$

$$36 = K^2$$

$$K = \sqrt{36}$$

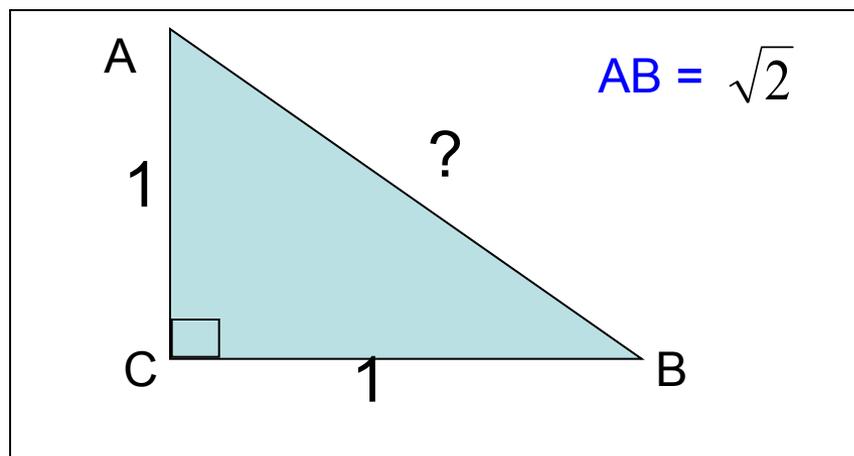
$$K = 6$$

$$CB = 6$$

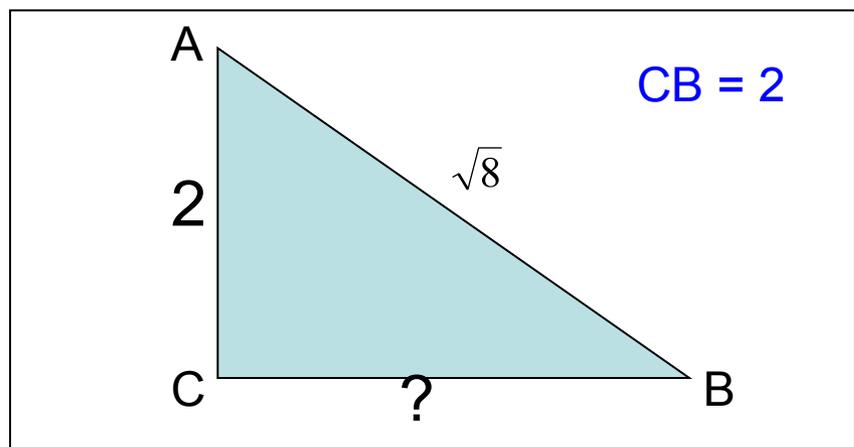


Применение Теоремы Пифагора

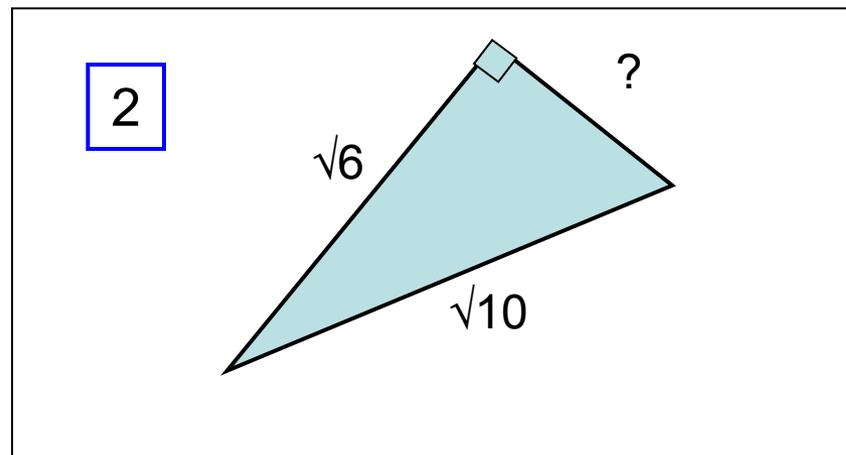
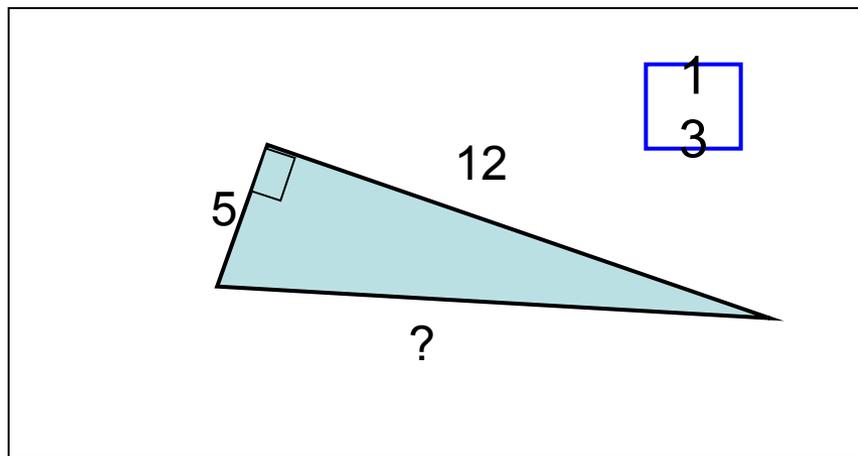
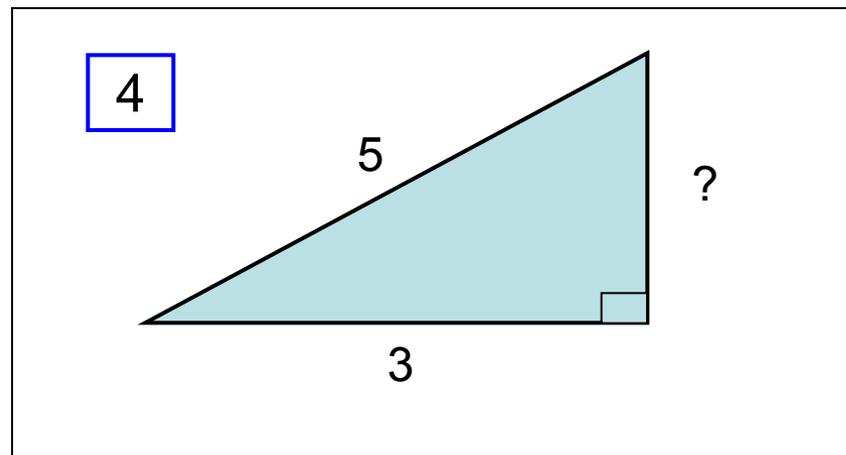
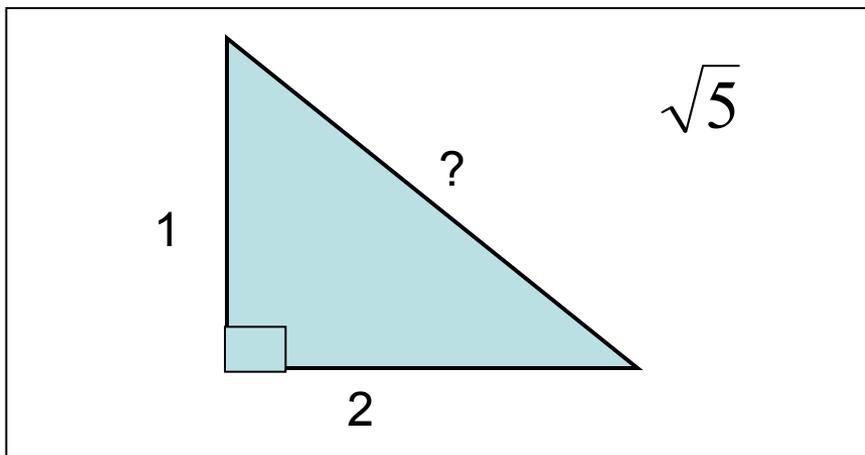
1. $K^2 + K^2 = \Gamma^2$
 $1^2 + 1^2 = \Gamma^2$
 $1 + 1 = \Gamma^2$
 $2 = \Gamma^2$
 $\Gamma = \sqrt{2}$



2. $\Gamma^2 - K^2 = K^2$
 $(\sqrt{8})^2 - 2^2 = K^2$
 $8 - 4 = K^2$
 $4 = K^2$
 $K = 2$



Упражнения



Часть 2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА

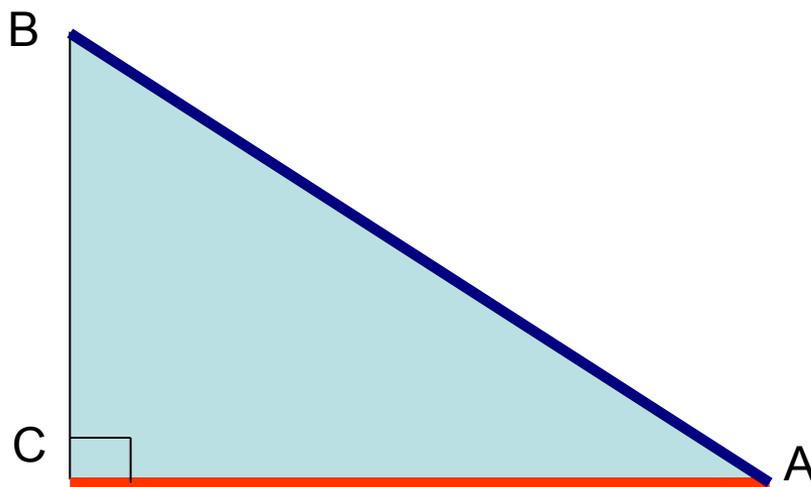
ТАНГЕНСА ОСТРОГО УГЛА

В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

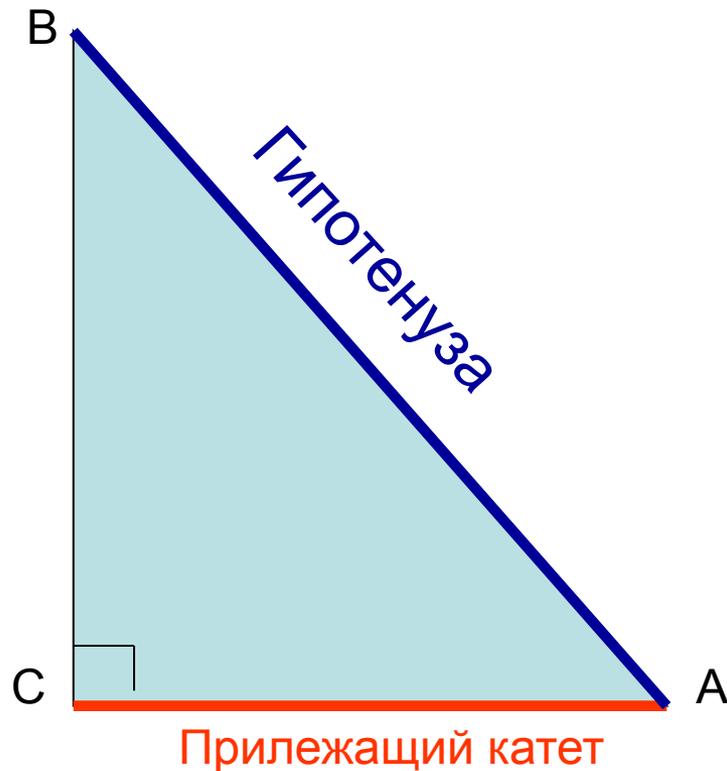
- Синус, косинус, тангенс – это дроби, которые описывают величину угла. В числителе и в знаменателе такой дроби стоит длина одной из сторон.
- Как разобраться длину, какой стороны надо поставить в числитель или в знаменатель?

Определение косинуса

- Просто косинуса не бывает!!!! Косинус описывает величину какого-то угла. Итак, надо, например, найти $\cos A$ (т.е. косинус угла A).
- Найдем этот угол в треугольнике. Обведем «пожирнее» его стороны.



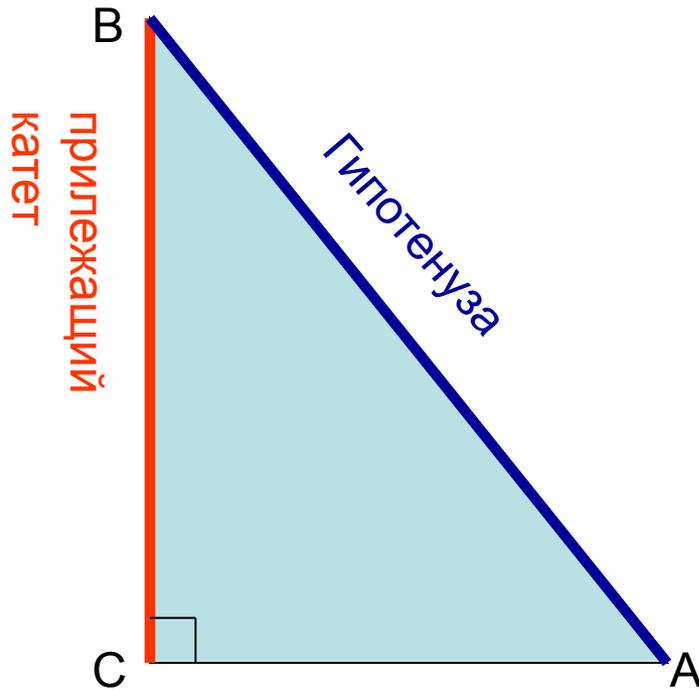
Определим $\cos A$



- Косинус этого угла – это отношение тех сторон, которые обвели.
- Это дробь в числитель, которой записана меньшая (из обведенных сторон) , а в знаменатель большая.
- Большая сторона треугольника - это гипотенуза(сторона, которая лежит напротив прямого угла)

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

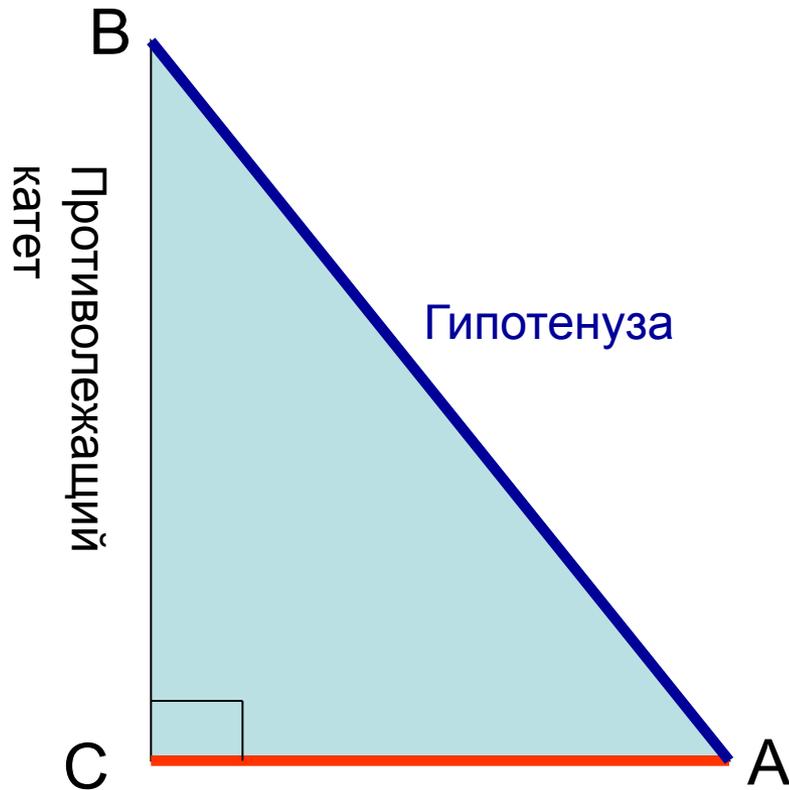
Определим $\cos B$.



- Повторяем предыдущий алгоритм. Нашли угол B, обвели его стороны.
- Записали дробь в числителе, которая меньше из обведенных сторон, а в знаменателе большая

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

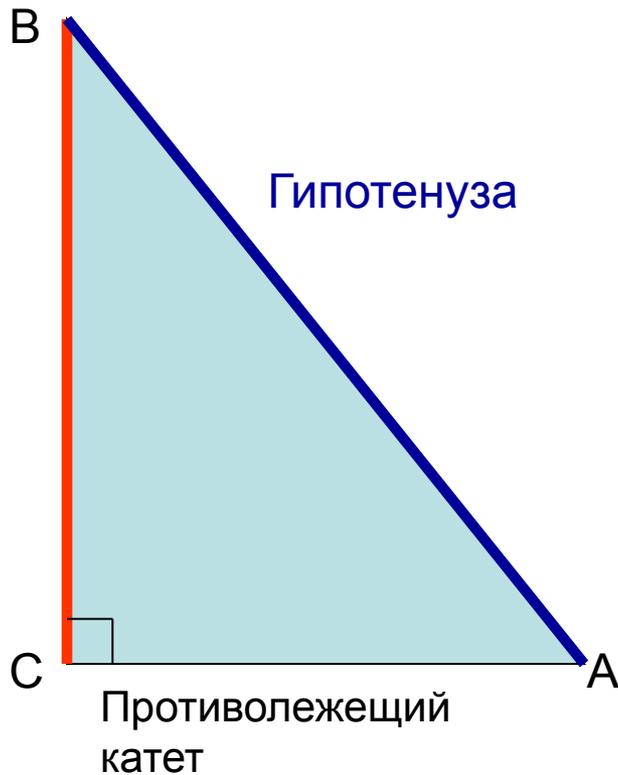
Определение синуса



- Определим $\sin A$. Обведем стороны угла A .
- Синус этого угла - это дробь в числителе, которой та сторона, которую не обвели, а в знаменателе большая из обведенных.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

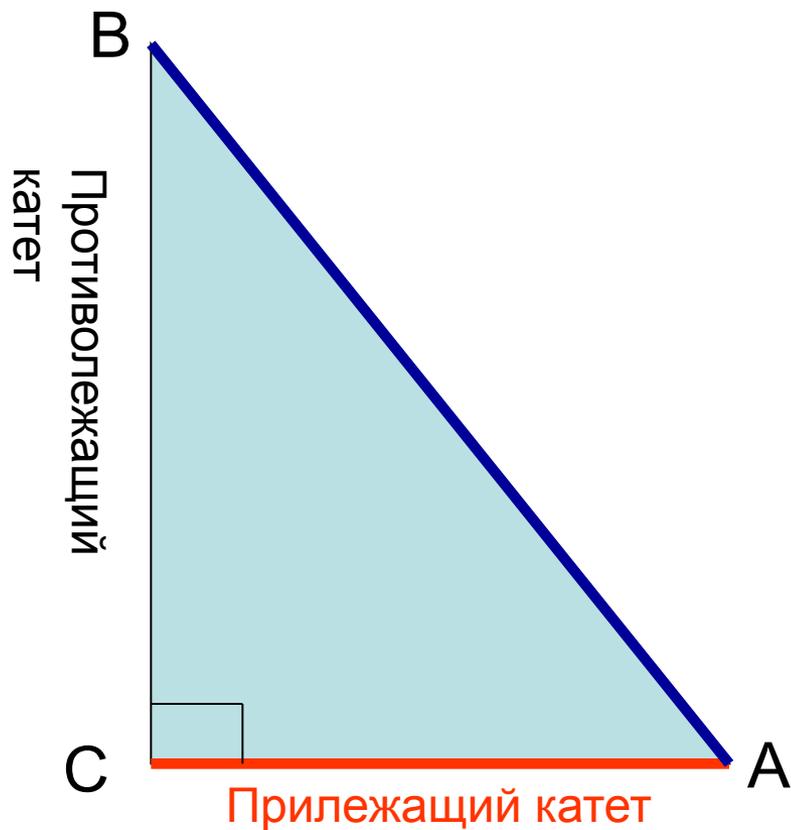
Определим $\sin B$.



- Повторяем предыдущий алгоритм. Нашли угол B, обвели его стороны.
- Записали дробь в числителе, сторона, которую не обвели, а в знаменателе большая из обведенных.

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

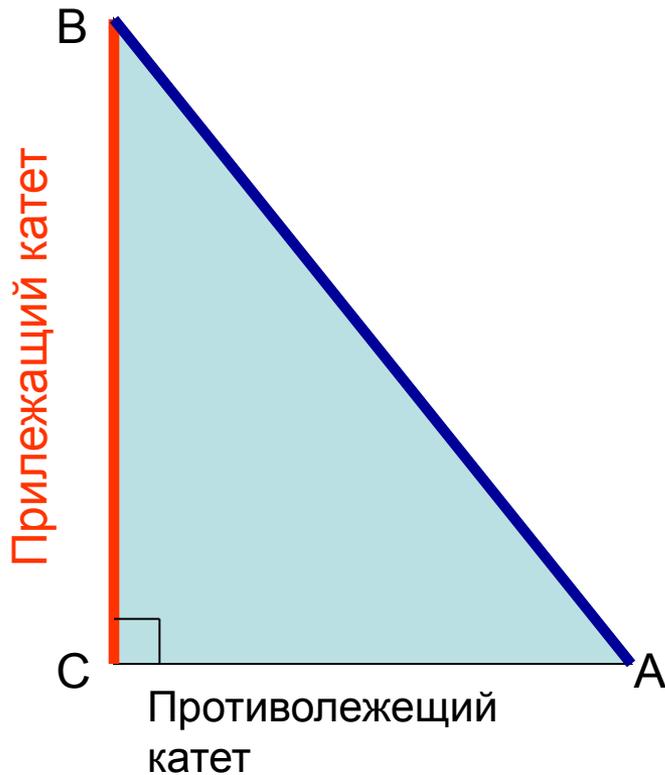
Определение тангенса



- Определим $\operatorname{tg} A$. Обведем стороны угла A.
- Тангенс этого угла - это дробь в числителе, которой та сторона, которую не обвели, а в знаменателе меньшая из обведенных.

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

Определим $\operatorname{tg} B$.



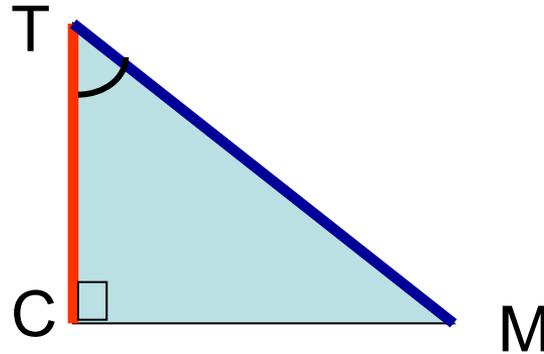
- Обведем стороны угла B .
- Тангенс этого угла - это дробь в числителе, которой та сторона, которую не обвели, а в знаменателе меньшая из обведенных

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{BC}$$

Найдите \sin , \cos , tg выделенного угла

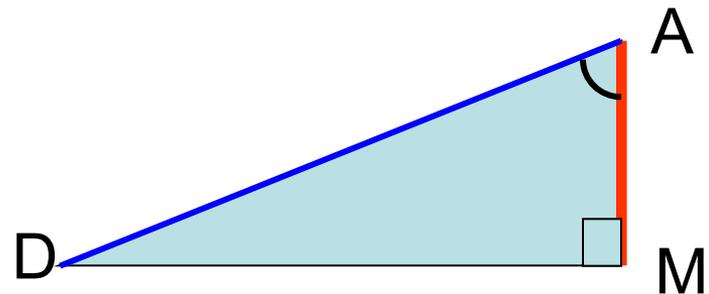
$$\cos \angle T = \frac{TC}{TM} \quad \sin \angle T = \frac{CM}{TM}$$

$$\operatorname{tg} \angle T = \frac{CM}{TC}$$



$$\cos \angle A = \frac{AM}{AD} \quad \sin \angle A = \frac{DM}{AD}$$

$$\operatorname{tg} \angle A = \frac{DM}{AM}$$



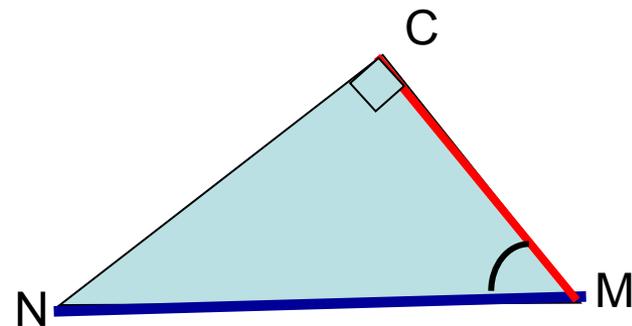
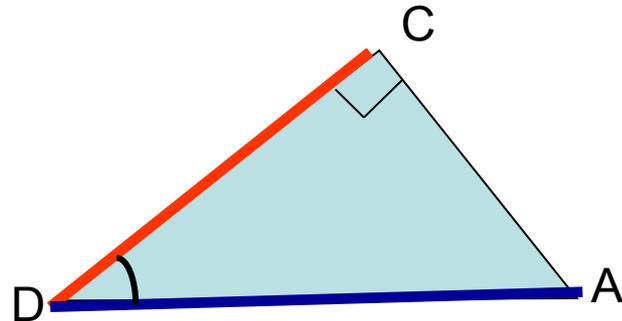
Найдите \sin , \cos , tg выделенного угла

$$\cos \angle D = \frac{CD}{DA} \quad \sin \angle D = \frac{CA}{DA}$$

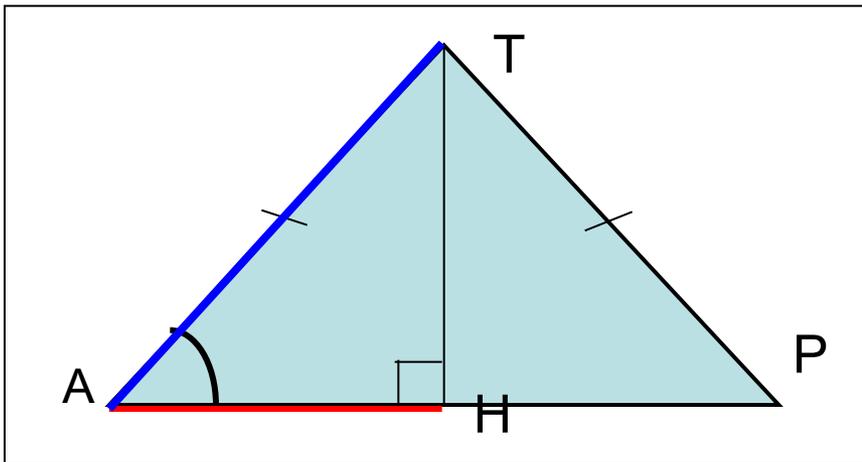
$$\operatorname{tg} \angle D = \frac{CA}{CD}$$

$$\cos \angle M = \frac{CM}{NM} \quad \sin \angle M = \frac{CN}{NM}$$

$$\operatorname{tg} \angle M = \frac{CN}{CM}$$

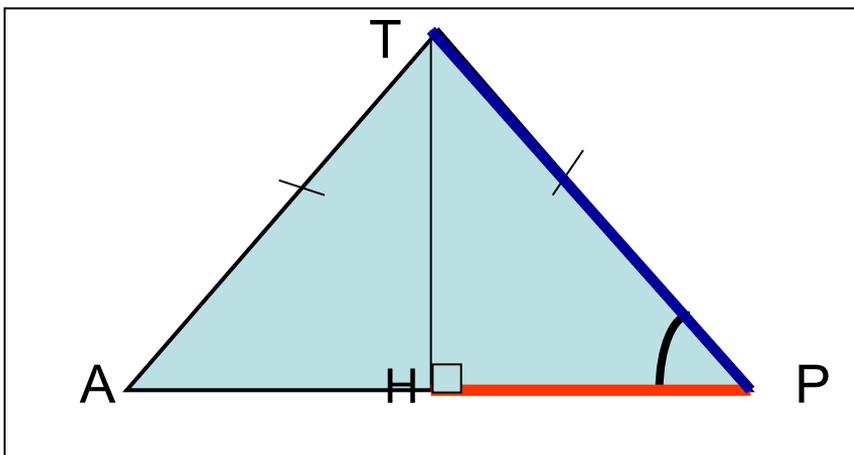


Найдите \sin , \cos , tg выделенного угла



$$\cos \angle A = \frac{AH}{AT} \quad \sin \angle A = \frac{TH}{AT}$$

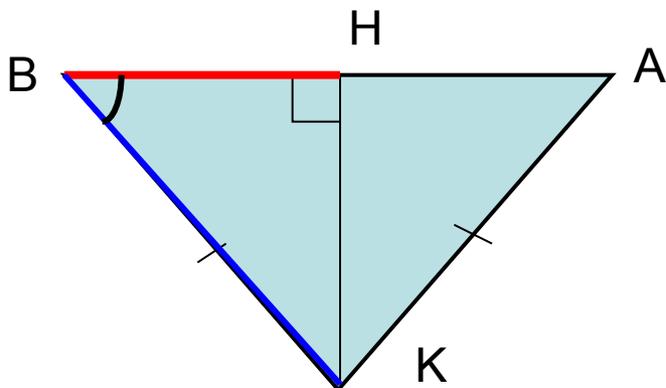
$$\text{tg} \angle A = \frac{TH}{AH}$$



$$\cos \angle P = \frac{HP}{TP} \quad \sin \angle P = \frac{TH}{TP}$$

$$\text{tg} \angle P = \frac{TH}{HP}$$

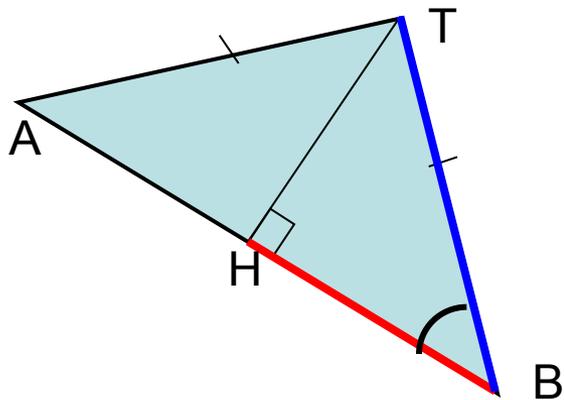
Найдите \sin , \cos , tg выделенного угла



$$\cos B = \text{BH}/\text{BK}$$

$$\sin B = \text{HK}/\text{BK}$$

$$\text{tg } B = \text{HK}/\text{BH}$$



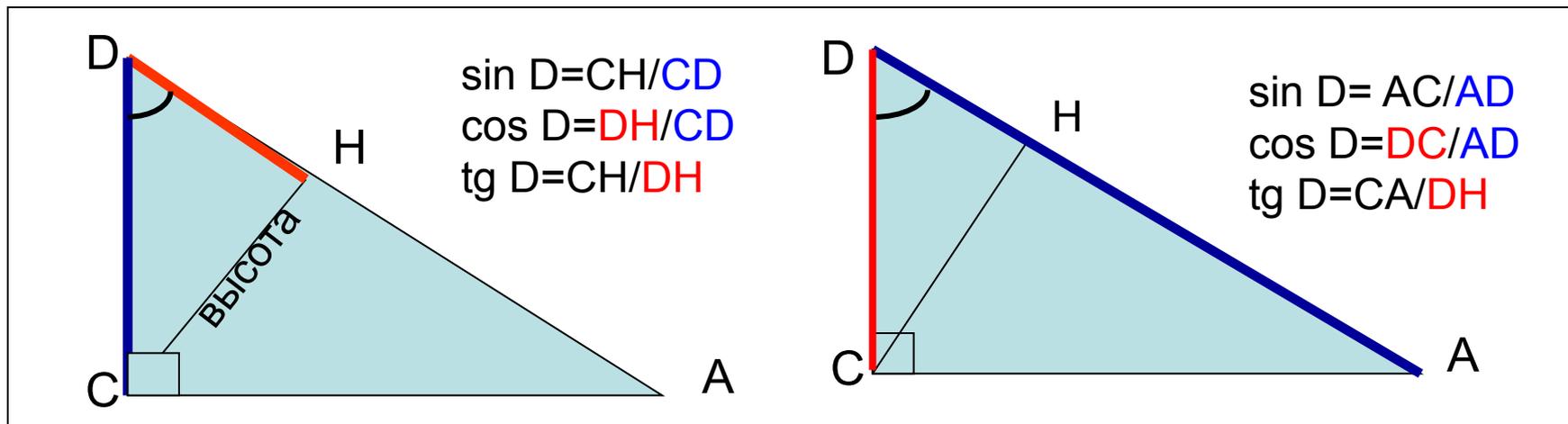
$$\cos B = \text{BH}/\text{BT}$$

$$\sin B = \text{HT}/\text{BT}$$

$$\text{tg } B = \text{HT}/\text{BH}$$

Два прямоугольных треугольника с общим острым углом

- Пусть дан прямоугольный треугольник, в котором проведена высота к гипотенузе.
- Угол D общий для $\triangle ADC$ и $\triangle DCH$
- Синус, косинус и тангенс угла A можно выразить через стороны одного и через стороны другого треугольника



Найдите sin, cos, tg выделенного угла

$$\cos R = RC/BR$$

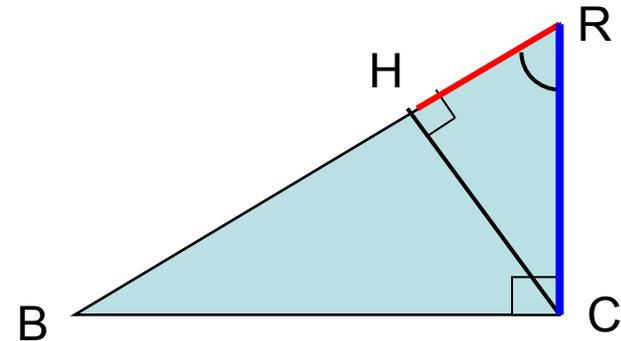
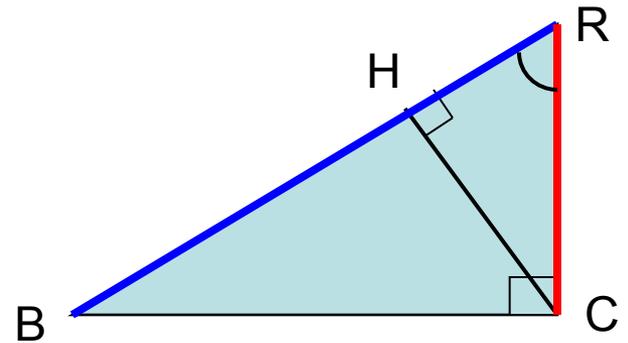
$$\sin R = BC/BR$$

$$\text{tg } R = BC/RC$$

$$\cos R = RH/CR$$

$$\sin R = HC/CR$$

$$\text{tg } R = HC/RH$$



Часть 3

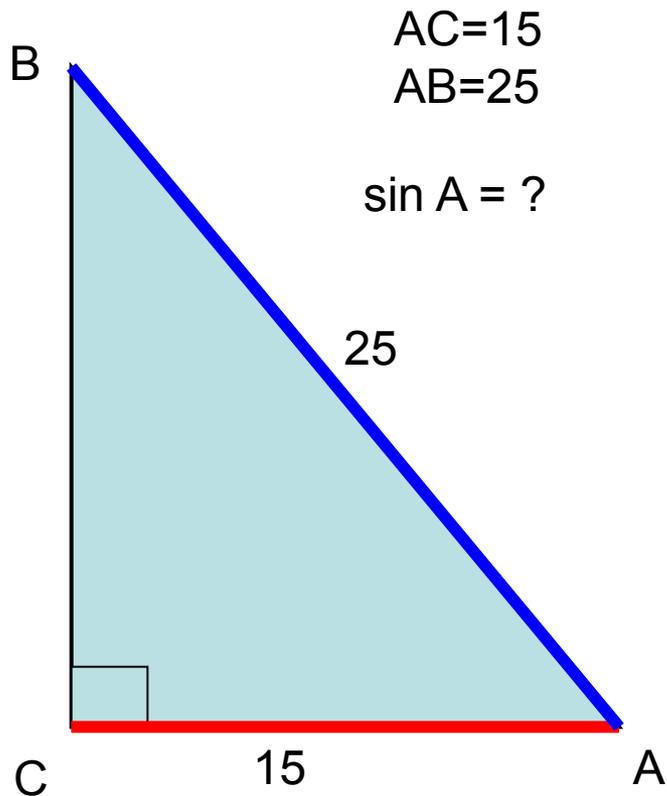
I и II тип задач

I тип: найти \sin (\cos , tg) по двум данным сторонам

Как решать:

- Выразить \sin (\cos , tg) через стороны треугольника по определению
- Подставить те стороны, которые даны в задаче
- При необходимости найти недостающую сторону по теореме Пифагора

Пример



- Выразим $\sin A$ через стороны треугольника

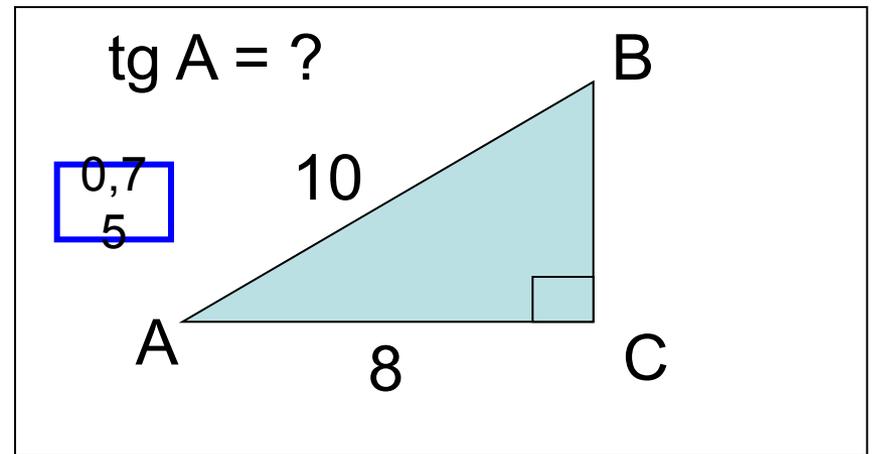
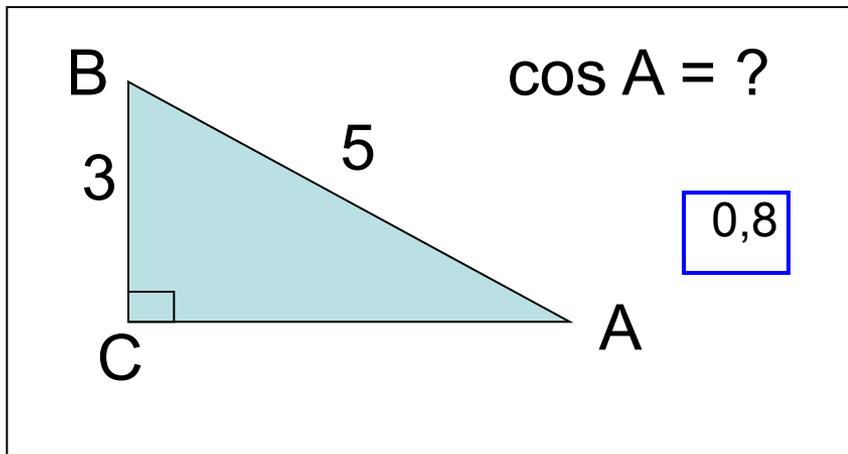
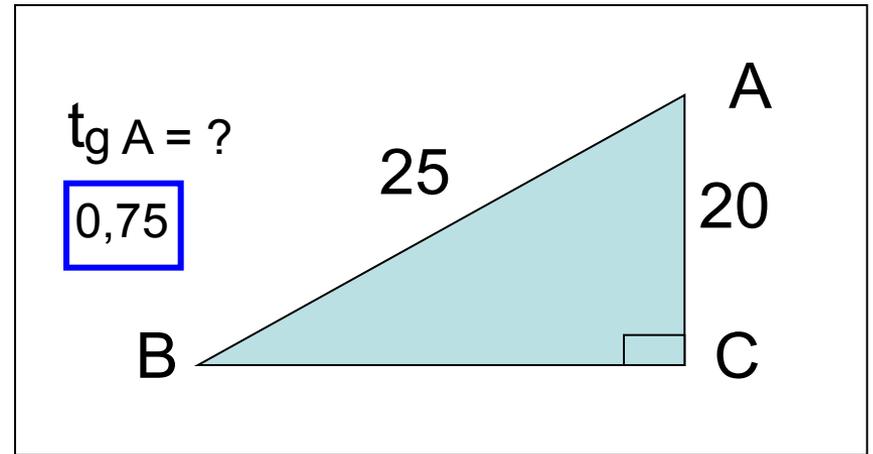
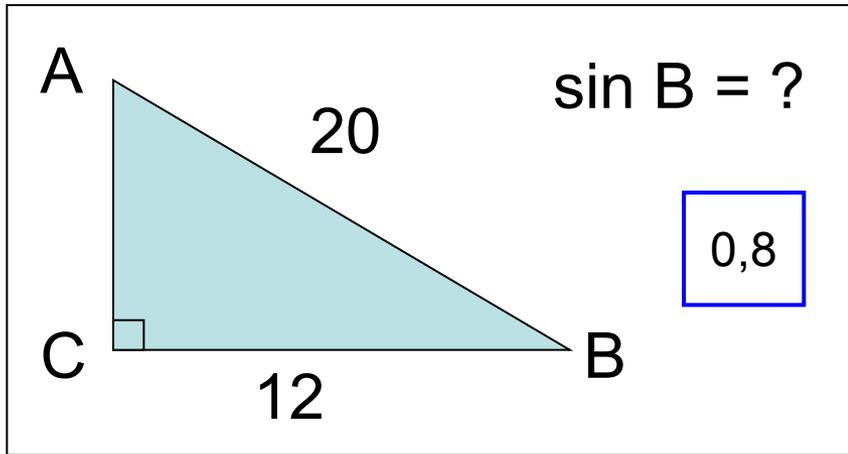
$$\sin A = BC/AB$$

- $AB=25$, надо найти BC ,
- По теореме Пифагора.

$$BC = \sqrt{625 - 225} = \sqrt{400} = 20$$

- $\sin A = 20/25 = 4/5 = 0,8$

Упражнения

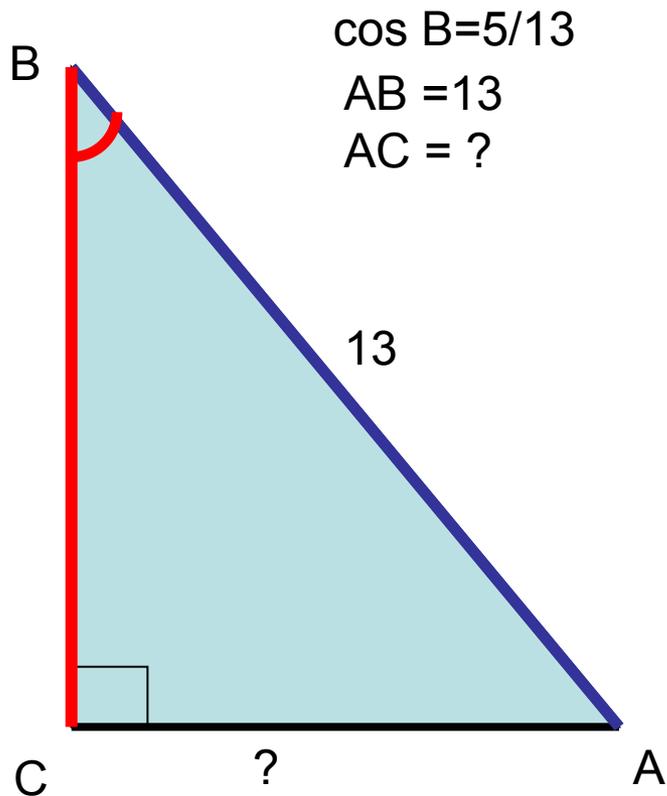


II тип: найти сторону треугольника по данному \sin (\cos , tg) и стороне

Как решать:

- Выразить \sin (\cos , tg) через стороны треугольника по определению
- Подставить ту сторону, которая дана
- Приравнять к данному значению \sin (\cos, tg)
- Решить пропорцию.
- При необходимости найти недостающую сторону по теореме Пифагора

Пример



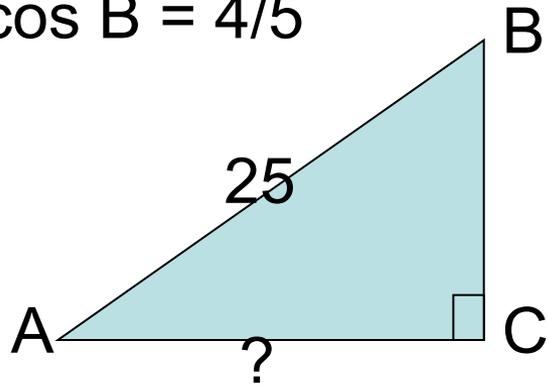
- Выразим $\cos B$ через стороны треугольника
 $\cos B = CB/AB$
- $BC/13 = 5/13$,
значит $BC = 5$
- надо найти AC ,
по теореме Пифагора

$$BC = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144}$$

$$BC = 12$$

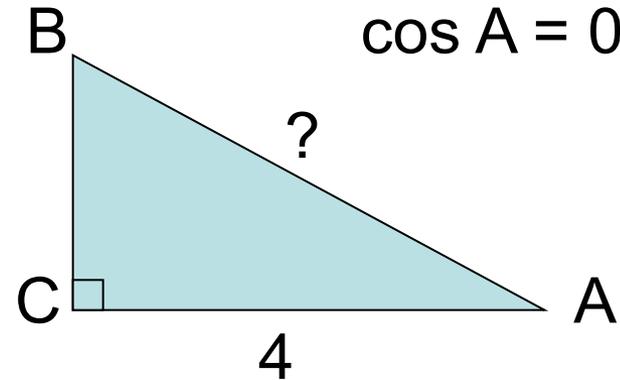
Упражнения

$$\cos B = 4/5$$



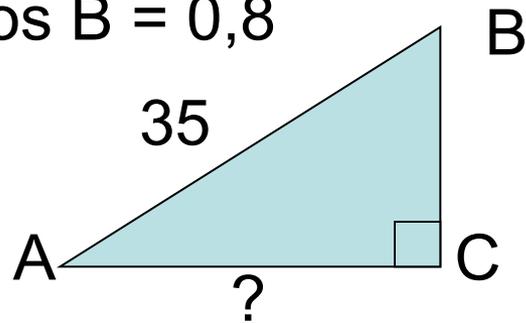
15

$$\cos A = 0,5$$



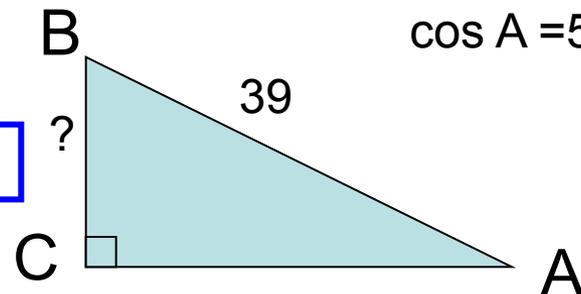
8

$$\cos B = 0,8$$



2
1

$$\cos A = 5/13$$



3
6

Часть 4

Основное тригонометрическое тождество

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

- Эта формула позволяет по данному значению синуса острого угла прямоугольного треугольника найти значение косинуса и наоборот
- $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A}$
- $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}$

Применение основного тригонометрического тождества

$$\sin A = 3/5$$

$$\cos A = ?$$

$$\cos A = \sqrt{1 - (3/5)^2}$$

$$\cos A = \sqrt{1 - 9/25}$$

$$\cos A = \sqrt{25/25 - 9/25}$$

$$\cos A = \sqrt{16/25}$$

$$\cos A = 4/5$$

$$\cos A = \sqrt{13/7}$$

$$\sin A = ?$$

$$\sin A = \sqrt{1 - (\sqrt{13/7})^2}$$

$$\sin A = \sqrt{1 - 13/49}$$

$$\sin A = \sqrt{49/49 - 13/49}$$

$$\sin A = \sqrt{36/49}$$

$$\sin A = 6/7$$

Упражнения

$$\sin A = 0,8$$
$$\cos A = ?$$

$$0,6$$

$$\cos A = 0,6$$
$$\sin A = ?$$

$$0,8$$

$$\cos A = \sqrt{7}/10$$
$$\sin A = ?$$

$$\sqrt{93}/10$$

$$\sin A = 12/13$$
$$\cos A = ?$$

$$5/13$$

$$\sin A = 3/\sqrt{34}$$
$$\cos A = ?$$

$$5/\sqrt{34}$$

$$\cos A = \sqrt{91}/10$$
$$\sin A = ?$$

$$0,3$$

$$\sin A = 5/\sqrt{41}$$
$$\cos A = ?$$

$$4/\sqrt{41}$$

$$\cos A = 5/13$$
$$\sin A = ?$$

$$12/13$$

Часть 5

III тип задач

III тип: найти сторону треугольника по данному \sin (\cos) и стороне

Как решать:

- Выразить \sin (\cos) через стороны треугольника
- Подставить ту сторону, которая дана, но **такой стороны нет** (в этом отличие от второго типа)
- По данному значению \sin (\cos) найти \cos (\sin)
- Выразить найденный \cos (\sin) через стороны
- Подставить ту сторону, которая дана в условии
- Приравнять к найденному значению
- Решить пропорцию.
- При необходимости найти недостающую сторону по теореме Пифагора

Пример

- Выразить \sin через стороны треугольника
- Подставить ту сторону, которая дана, но **такой стороны нет**
- По данному значению $\sin A$ найти $\cos A$
- Выразить найденный \cos через стороны
- Подставить ту сторону, которая дана в условии
- Приравнять к найденному значению \cos
- Решить пропорцию:

$$\sin A = BC/AB$$

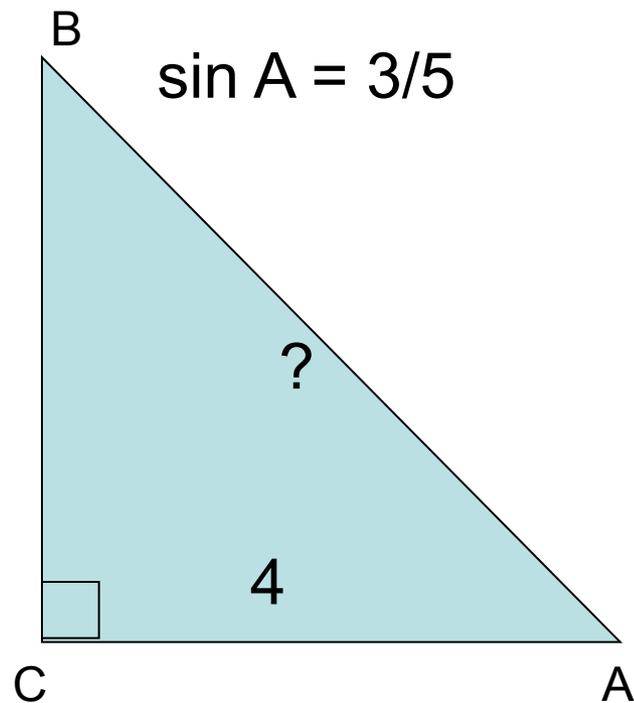
$$\cos A = \sqrt{1 - (3/5)^2} = 4/5$$

$$\cos A = AC/AB$$

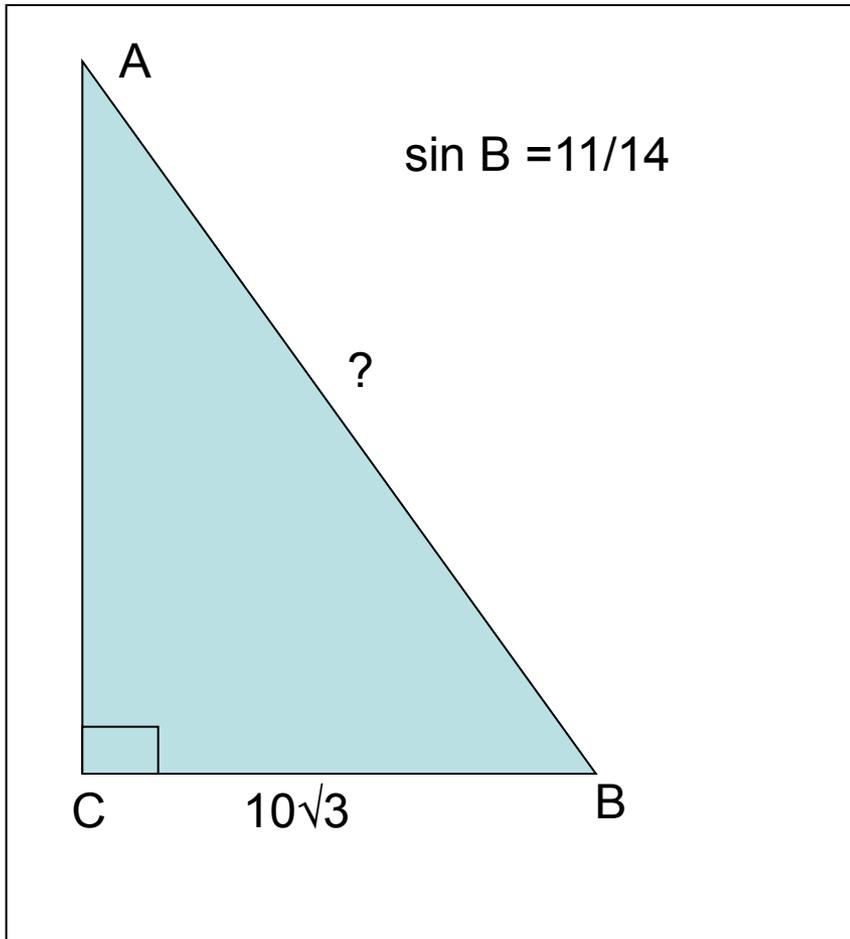
$$\cos A = 4/AB$$

$$4/5 = 4/AB$$

$$AB = 5$$



Упражнение

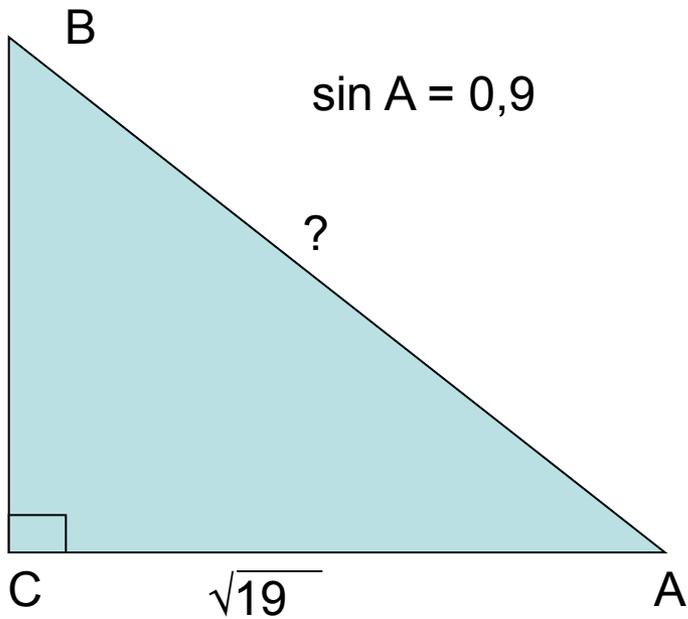


- $\sin B = AC/AB$
- $\cos B = \sqrt{1 - (11/14)^2}$
 $\cos B = \sqrt{1 - 121/196}$
 $\cos B = \sqrt{75/196} = 5\sqrt{3}/14$
- $\cos B = CB/AB$
 $\cos B = 10\sqrt{3} / AB$

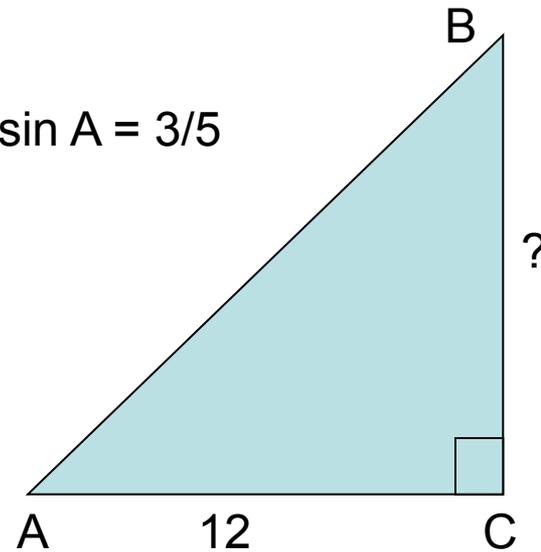
$$\frac{10\sqrt{3}}{AB} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

- $AB = 28$

Проверь себя

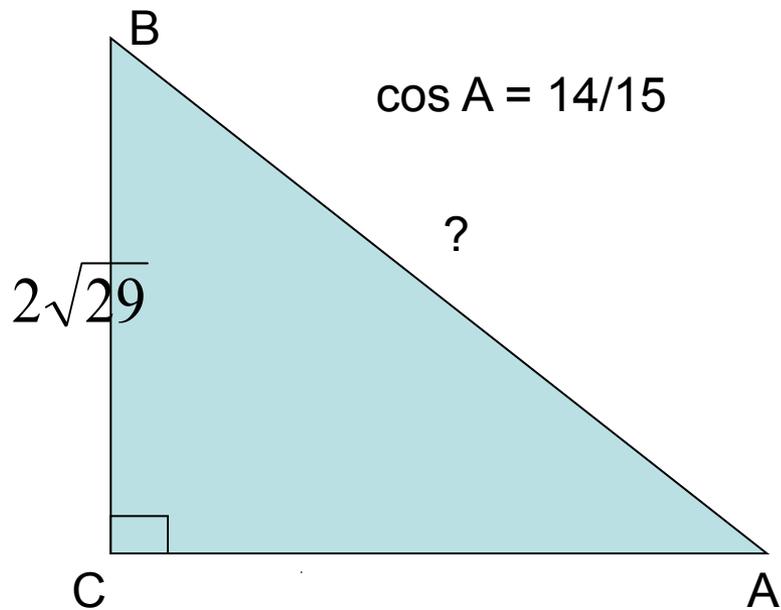


Ответ: $AB = 10$

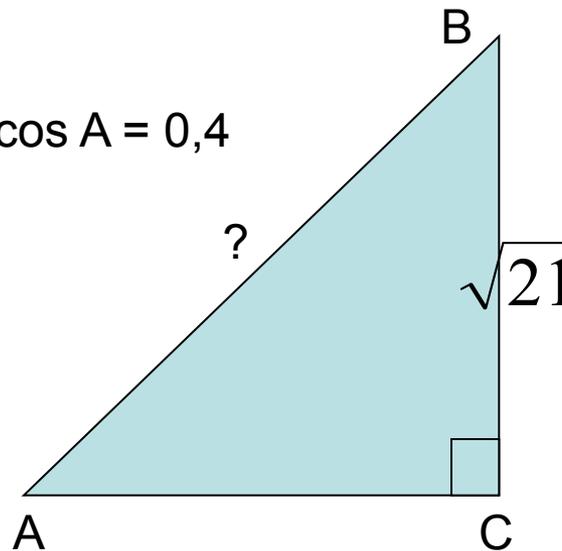


Ответ: $BC = 9$

Проверь себя



Ответ: $AB = 30$



Ответ: $AB = 5$

Часть 6

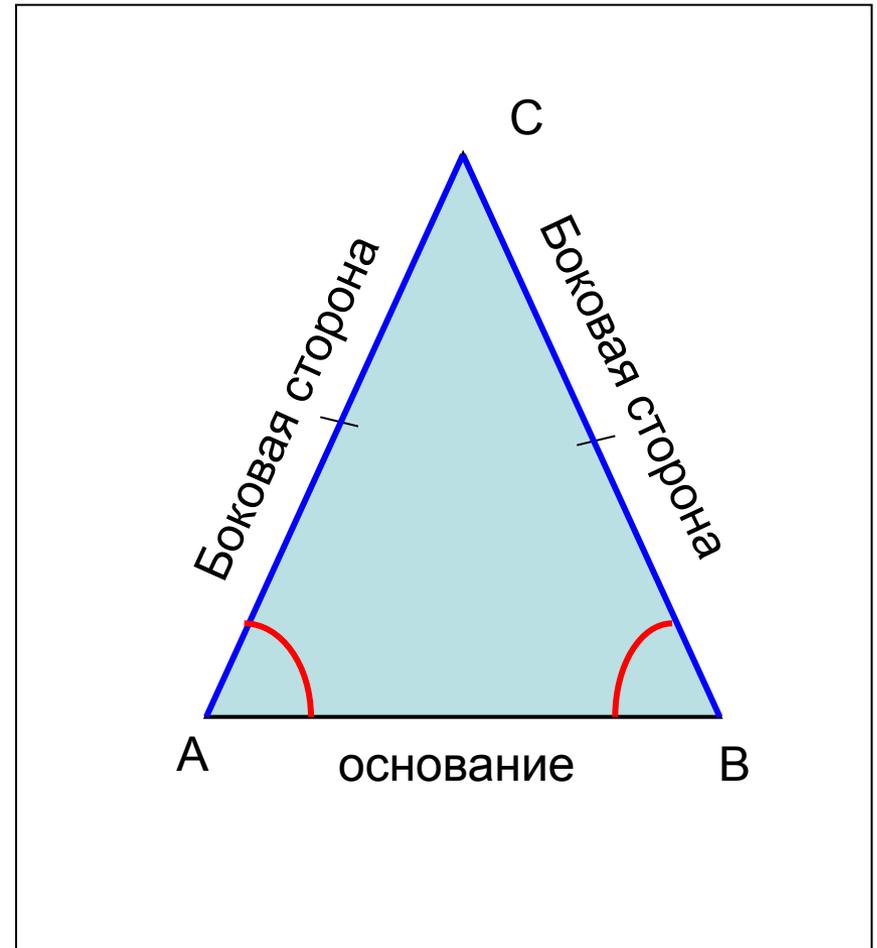
Свойства равнобедренного
треугольника

Равнобедренный треугольник

- Равнобедренный треугольник - это треугольник, у которого две стороны равны.
- Эти стороны называются боковыми. Третья сторона называется основанием.

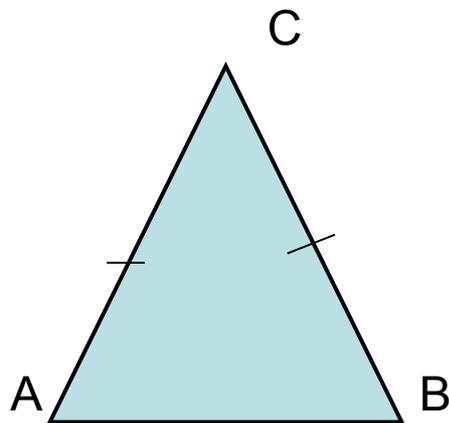
В равнобедренном треугольнике

- *Углы при основании равны.*



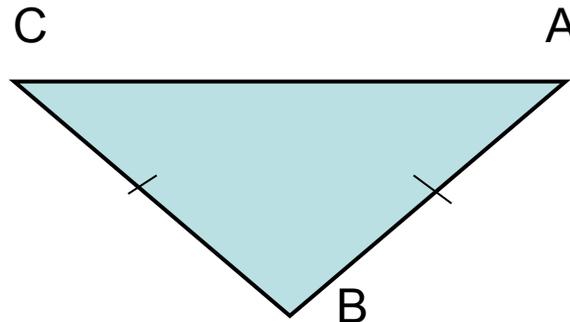
Упражнения

- Укажите в равнобедренных треугольниках основание и равные углы
- Важно помнить: основание не обязательно располагается горизонтально.



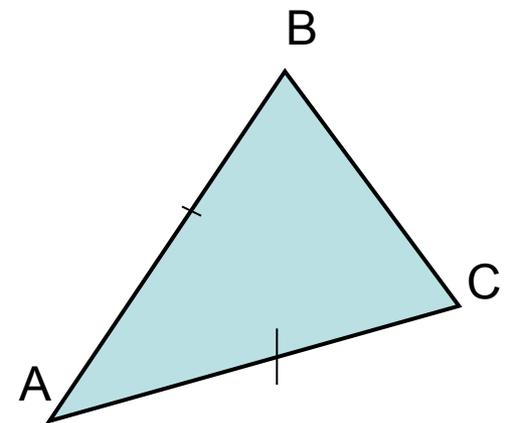
AB – основание

$$\angle A = \angle B$$



CA - основание

$$\angle A = \angle C$$

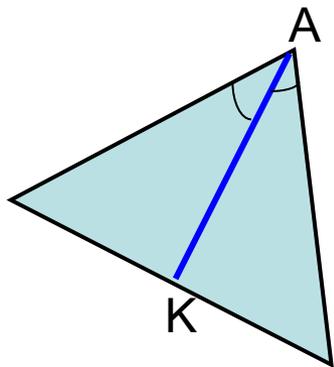


BC - основание

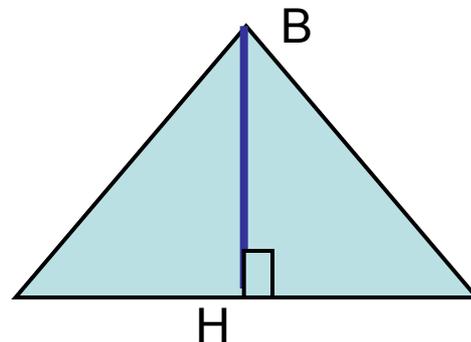
$$\angle B = \angle C$$

Медиана, высота и биссектриса треугольника

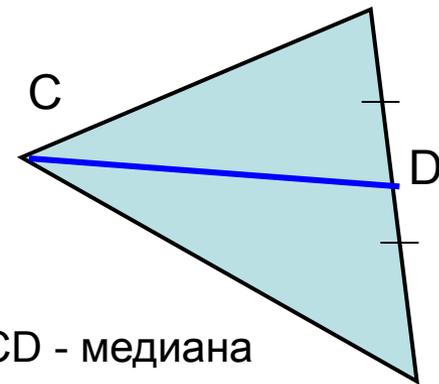
- Высота треугольника – это отрезок, который соединяет вершину треугольника и точку противоположной стороны и является перпендикуляром к ней.
- Медиана треугольника – это отрезок, который соединяет вершину треугольника и середину противоположной стороны.
- Биссектриса треугольника – это отрезок, который соединяет вершину треугольника и точку противоположной стороны и лежит на биссектрисе угла, т. е. на луче который делит данный угол пополам.



AK - биссектриса



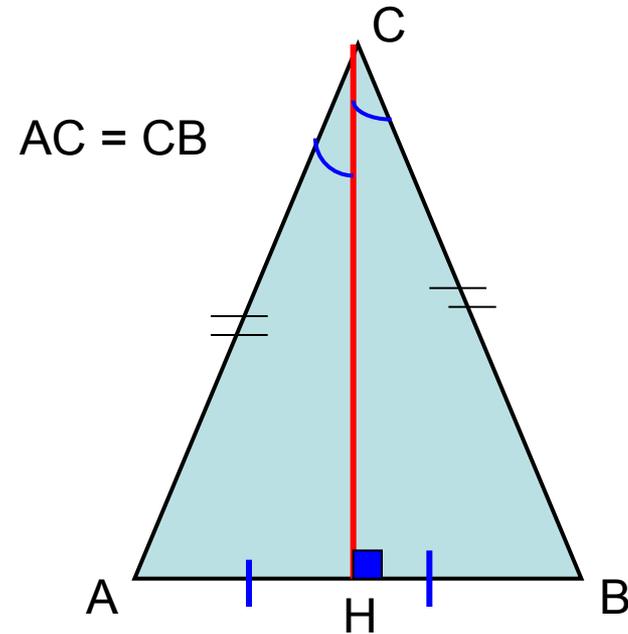
BH - высота



CD - медиана

Высота, проведенная к основанию в равнобедренном треугольнике

- *Высота, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.*
- *Медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой*
- *Биссектриса, проведенная к основанию, является высотой и медианой*



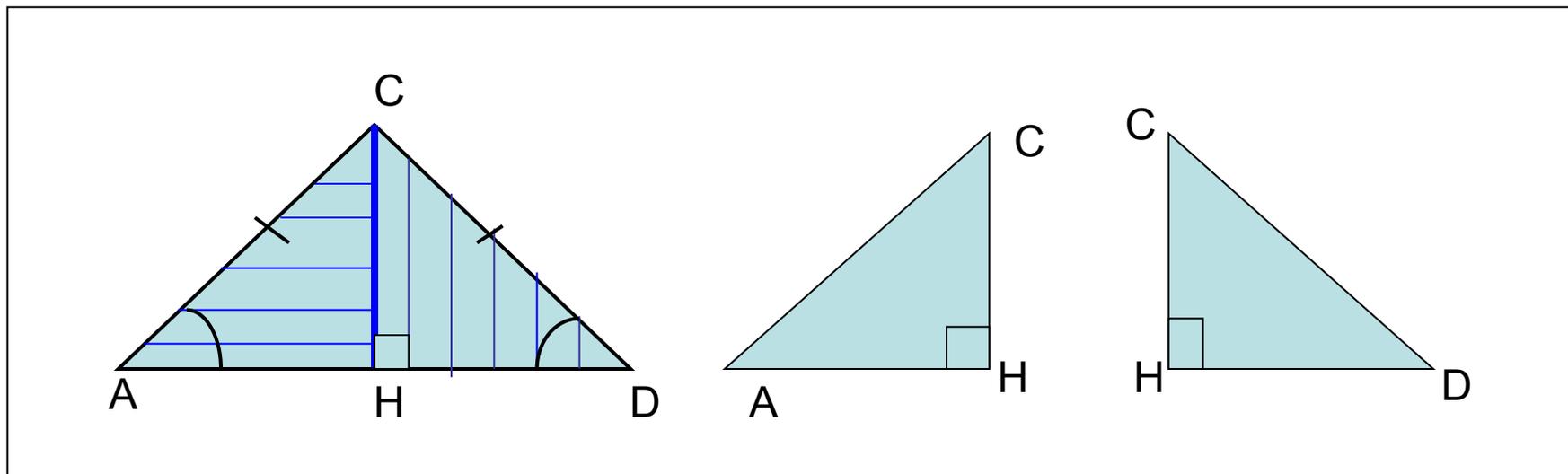
АН - высота,
биссектриса,
медиана.

Часть 7

Равнобедренный треугольник, в
котором проведена высота

Равнобедренный треугольник, в котором проведена высота к основанию

- Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, разбивает его на два равных треугольника.
- При решении задач вместо данного равнобедренного треугольника можно рассматривать его половину – прямоугольный треугольник.
- Фактически решение задачи сводится к решению прямоугольного треугольника (смотри I, II, III тип задач)



Пример. Задача, сводимая к задаче I типа

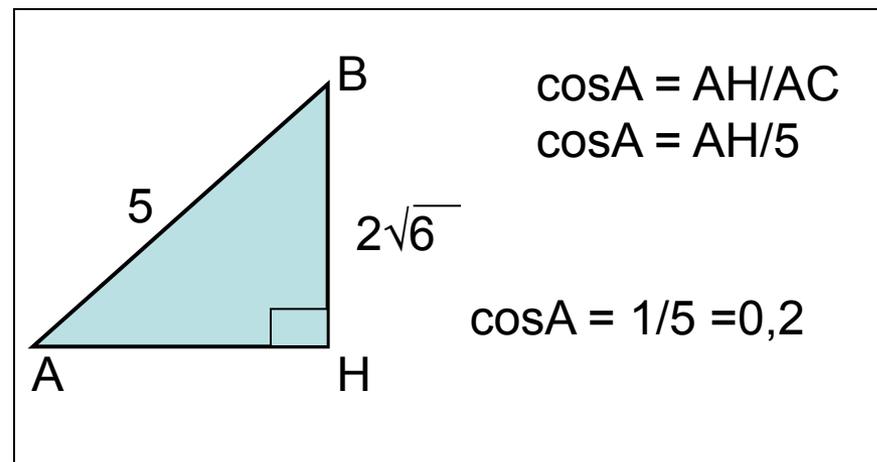
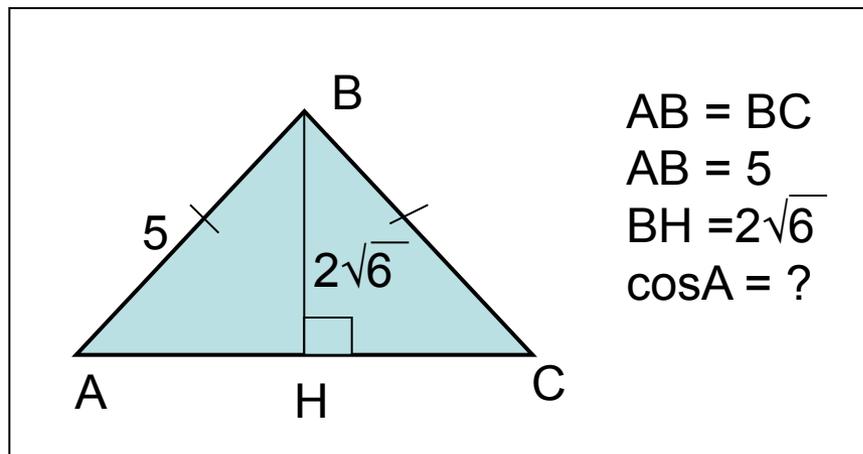
- Рассмотрим $\triangle BAH$. Это прямоугольный треугольник, в котором даны две стороны и надо найти косинус угла. Это задача I типа.

- Выразим косинус угла через стороны. Подставим данные значения.

Очевидно, надо найти AH .

- По теореме Пифагора найдем:

$$AH = \sqrt{5^2 - (2\sqrt{6})^2} = \sqrt{25 - 24}$$
$$AH = 1$$



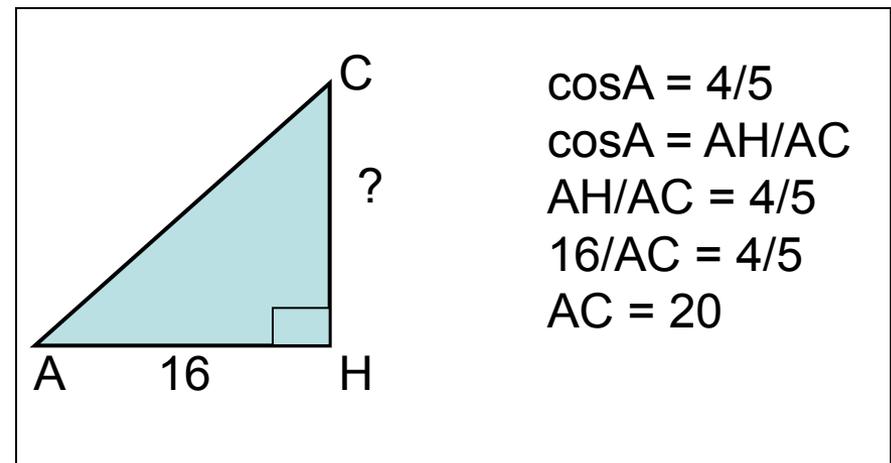
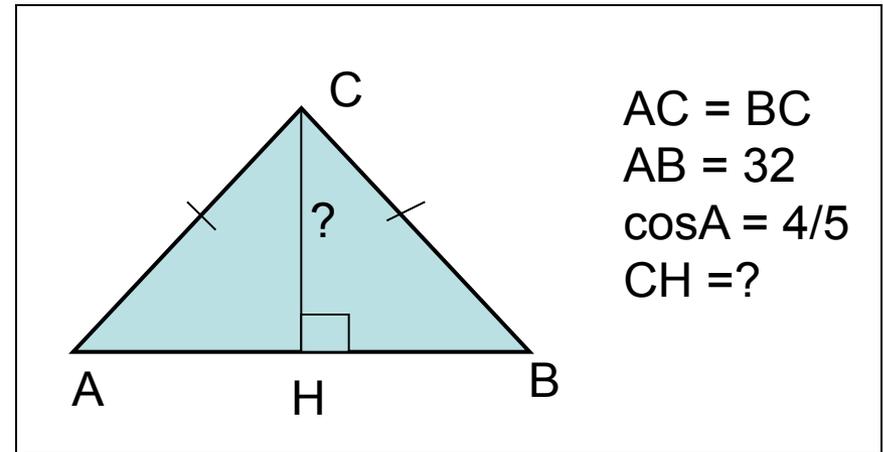
Пример. Задача, сводимая к задаче II типа

- $АН = НВ = 16$ $СН$ – высота, значит и медиана.
- Рассмотрим $\triangle САН$. Это прямоугольный треугольник, в котором дана сторона и косинус угла надо найти сторону. Это задача II типа.

- Найдем $АС$
- По теореме Пифагора найдем $СН$:

$$СН = \sqrt{20^2 - 16^2} = \sqrt{400 - 256}$$

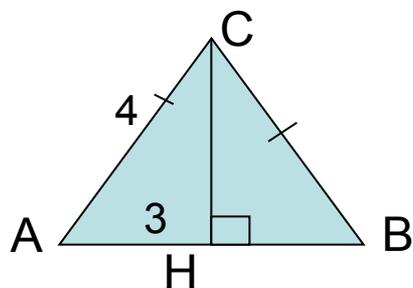
$$СН = \sqrt{144} = 12$$



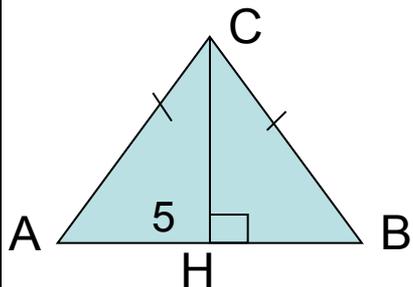
Решить задачи

- В треугольнике ABC
 $AC=BC=4$ $AB=6$
Найдите $\cos A$.
- В треугольнике ABC
 $AC=BC=\sqrt{61}$ $AB=10$
Найдите $\operatorname{tg} A$.
- В треугольнике ABC
 $AC=BC=15$ $AB=18$
Найдите $\sin A$.
- В треугольнике ABC
 $AC=BC$, $AB=24$, $\cos A = \frac{4\sqrt{41}}{41}$
Найдите высоту CH
- В треугольнике ABC
 $AC=BC=8$, $\sin B = \frac{\sqrt{7}}{4}$
Найдите AB
- В треугольнике ABC
 $AC=BC$, $AB=2$, $\sin A = \frac{\sqrt{15}}{4}$
Найдите AC .

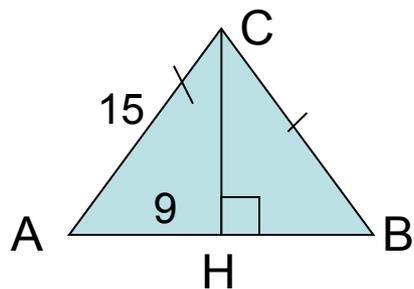
Проверь себя



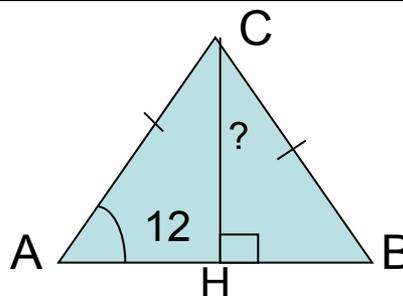
$$\cos A = \frac{3}{4} = 0,75$$



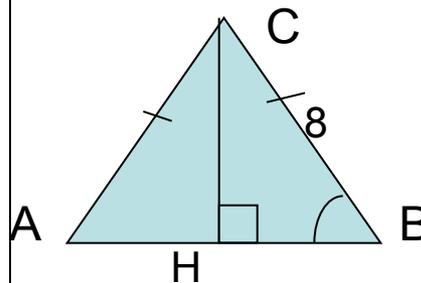
$$\begin{aligned} CH &= 6 \\ \operatorname{tg} A &= \frac{6}{5} = 1,2 \end{aligned}$$



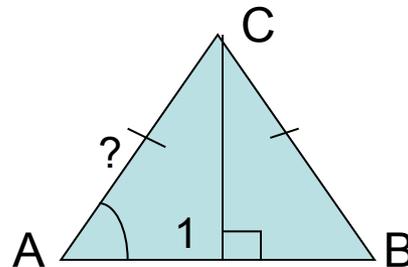
$$\begin{aligned} CH &= 12 \\ \sin A &= \frac{12}{15} = 0,75 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} AC &= 3\sqrt{41} \\ CH &= 15 \end{aligned}$$



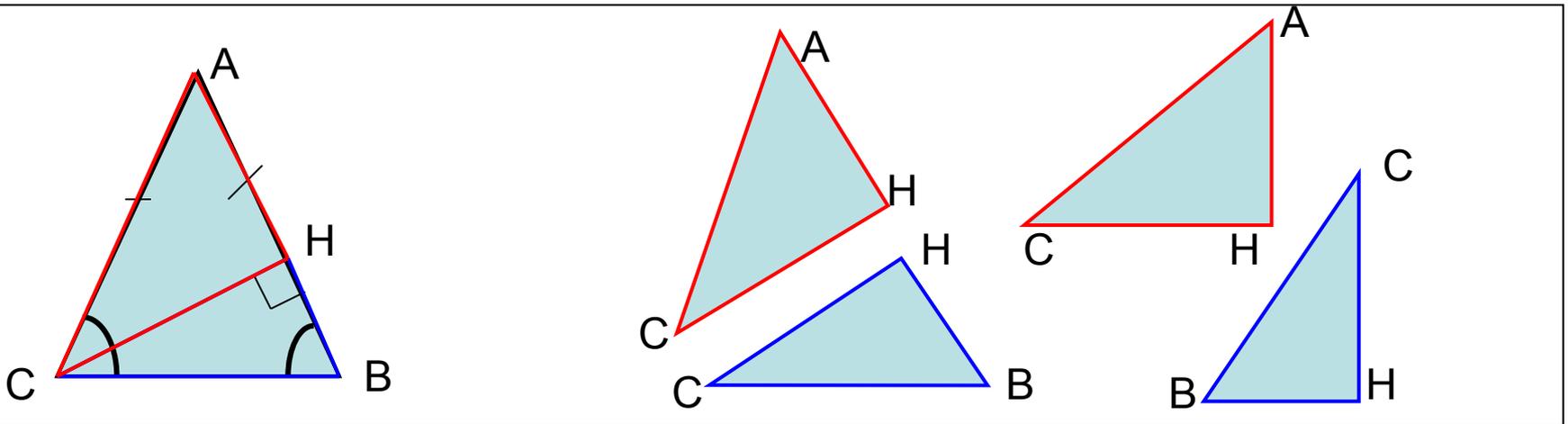
$$\begin{aligned} CH &= 2\sqrt{7} \\ HB &= 6 \\ AB &= 12 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{1}{4} \\ AC &= 4 \end{aligned}$$

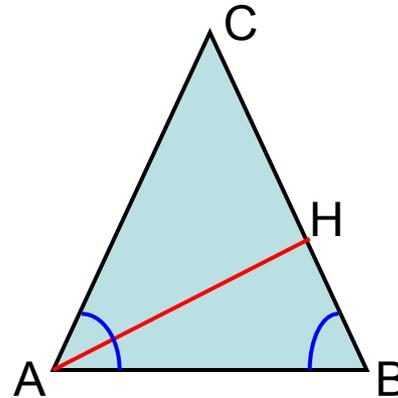
Равнобедренный треугольник, в котором высота проведена к боковой стороне

- Высота, проведенная к боковой стороне треугольник, в общем случае, **не является** медианой и биссектрисой.
- Но! Эта высота разбивает данный треугольник на два прямоугольных.
- Каждый из получившихся прямоугольных треугольников можно рассматривать отдельно. (I, II, III тип задач)
- Важно помнить, что в равнобедренном треугольнике **углы при основании равны**, Поэтому вместо синуса одного из углов при основании можно рассматривать синус другого угла при основании. Это замечание верно для \cos , и tg .



Упражнения

- В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=20$, высота $AH=5$.
Найдите $\sin A$
- В треугольнике ABC $AC=BC$, $AB=25$, высота $AH=15$.
Найдите $\cos A$
- В треугольнике ABC $AB=BC$, $AC=16$, высота $CH=4$.
Найдите синус угла ACB

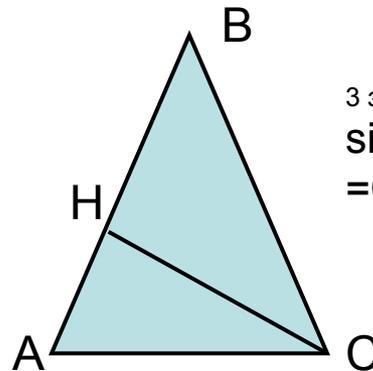


1 задача

$$\sin A = \sin B = AH/AB$$
$$\sin A = 5/20 = 0,25$$

2 задача

$$\cos A = \cos B = HB/AB$$
$$HB = 20 \text{ (т.Пифагора)}$$
$$\cos A = 20/25 = 0,8$$

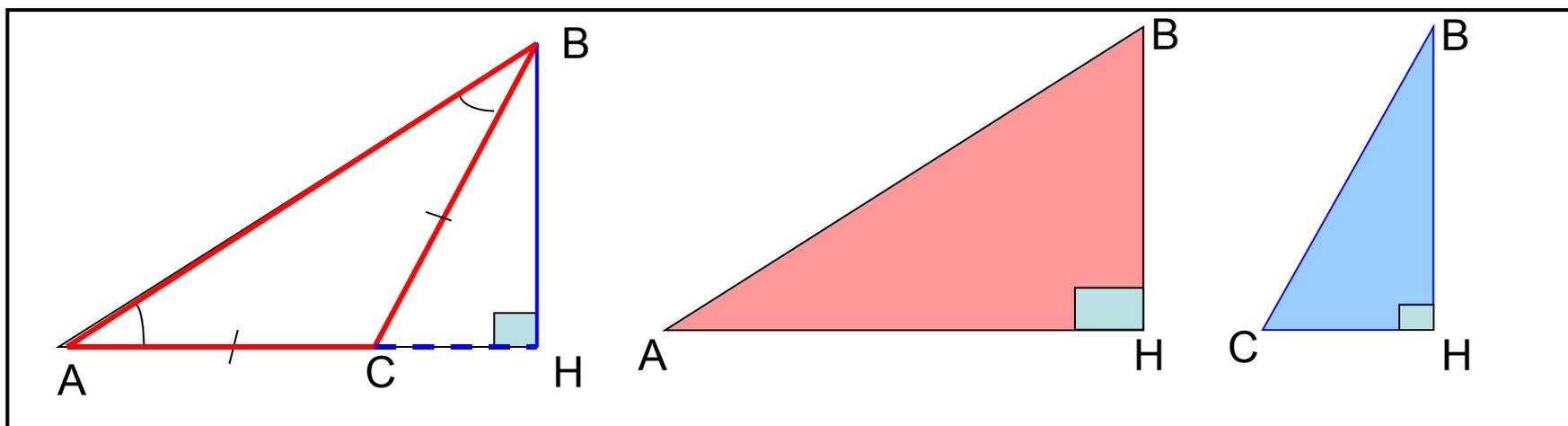


3 задача

$$\sin ACB = \sin A =$$
$$= CH/AC = 4/16 = 0,25$$

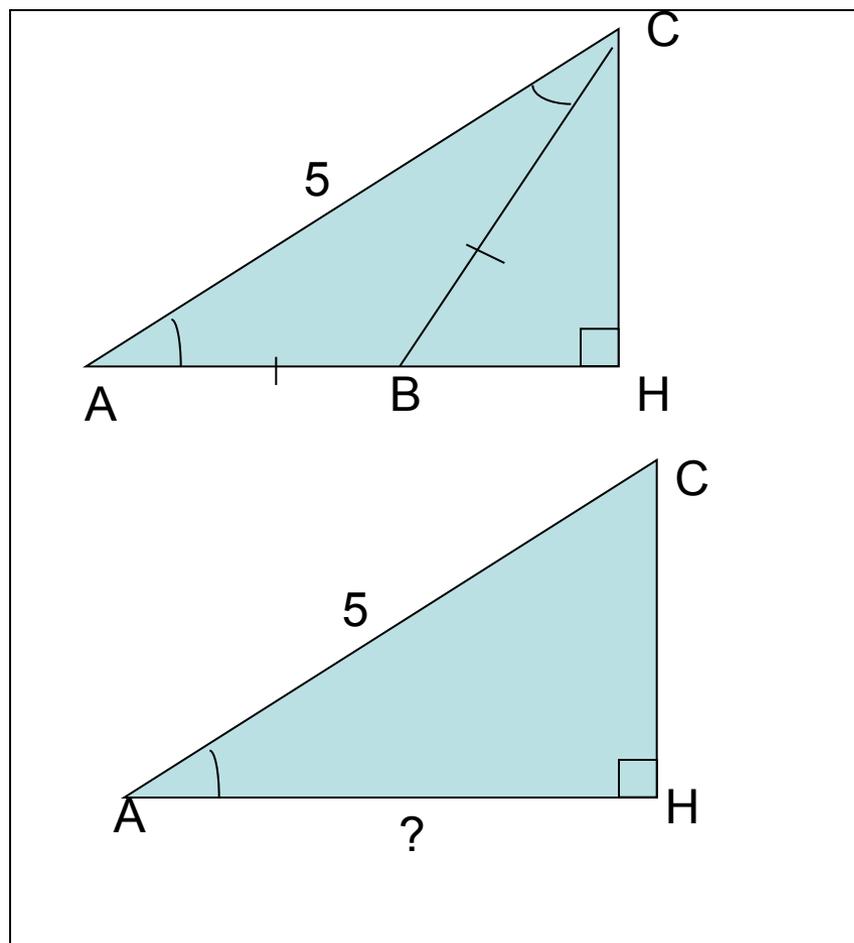
Тупоугольный равнобедренный треугольник, в котором высота проведена к боковой стороне

- Сумма углов треугольника 180° . Поэтому в равнобедренном треугольнике тупым углом может быть только угол, образованный боковыми сторонами.
- Высота, опущенная из вершины основания образует прямой угол с **продолжением боковой стороны**. Она лежит вне треугольника
- На чертеже два прямоугольных треугольника. Прямой угол у них общий. Один треугольник лежит внутри другого. Эти треугольники можно рассматривать отдельно (I, II, III тип задач)



Пример

- В тупоугольном треугольнике ABC $AB = BC$, $AC=5$,
 $\sin C=0,6$ CH – высота.
Найдите AH .
- Угол ACB равен углу A ,
значит $\sin ACB = \sin A$
- Задача сводится к решению
прямоугольного AHC (II тип)
- $\sin A = CH/AC$
 $CH/5=0,6=3/5$ $CH=3$
по теореме Пифагора $AH=4$



Упражнения

В тупоугольном
треугольнике ABC
 $AB=BC$, $AC=25$,
 CH - высота, $AH = 24$
Найдите синус угла ACB

0,28

В тупоугольном
треугольнике ABC
 $AB=BC$, $AC=2$,
 CH - высота, $AH = \sqrt{3}$
Найдите синус угла ACB

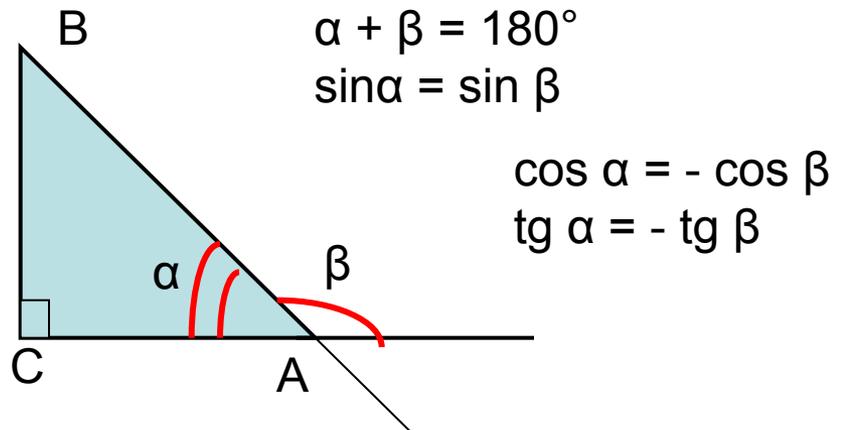
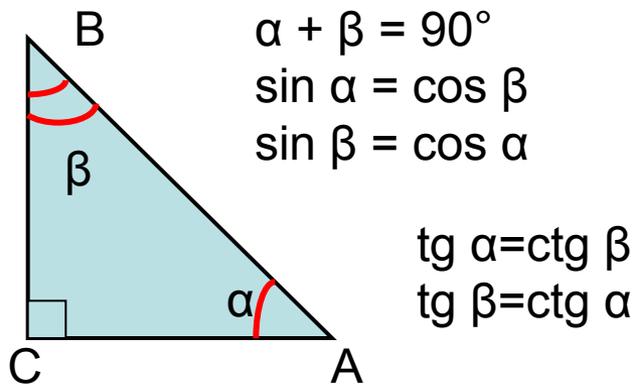
0,5

Часть 8

Применение формул
приведения при решении
прямоугольного треугольника

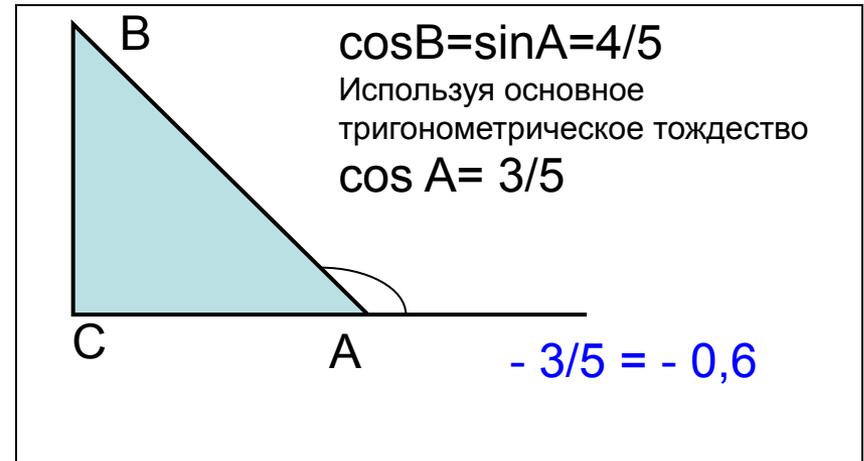
Использование формул приведения при решении прямоугольного треугольника

- Сумма острых углов прямоугольного треугольника 90° . Значит, синус одного равен косинусу другого и тангенс одного равен котангенсу другого
- Внешним углом треугольника называется угол смежный с одним из внутренних углов. При каждой вершине образуется два внешних угла
- Сумма смежных углов равна 180° . Значит, синус внутреннего угла и внешнего угла равны, а косинусы и тангенсы отличаются знаком



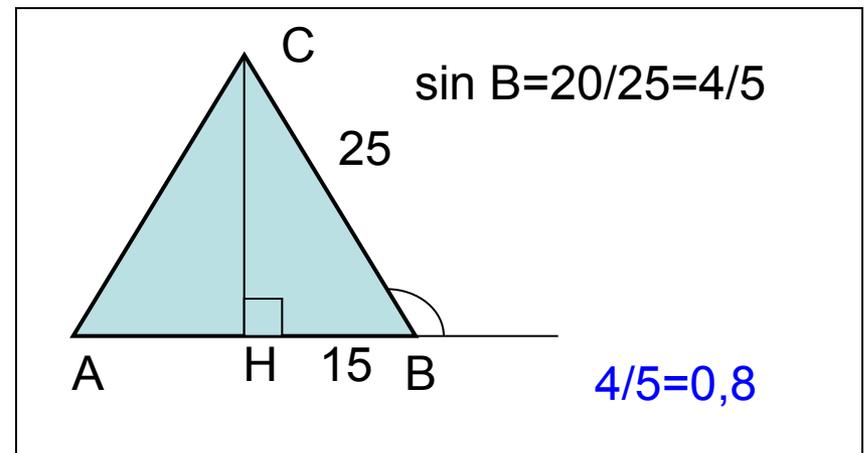
Пример использование формул приведения

- В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos B = 4/5$. Найдите косинус внешнего угла при вершине A



- В треугольнике ABC $AC=BC=25$, $AB=30$. Найдите синус внешнего угла при вершине B

-
- Проведем высоту CH. $HB=15$
По теореме Пифагора $CH=20$



Упражнения

- В $\triangle ABC$ угол $C=90^\circ$,
 $\cos B=0,8$. Найти $\sin A$

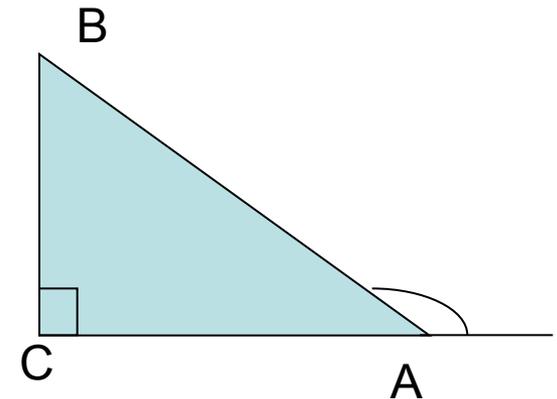
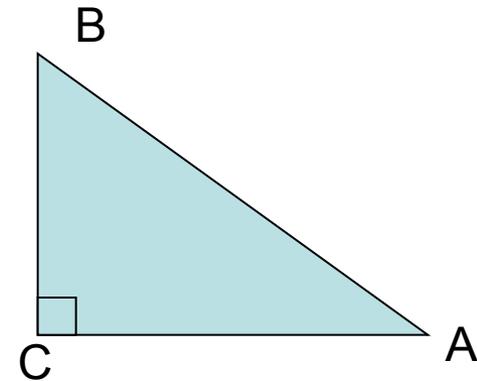
0,8

- В $\triangle ABC$ угол $C=90^\circ$.
 $\cos B=0,8$. Найти $\cos A$

0,6

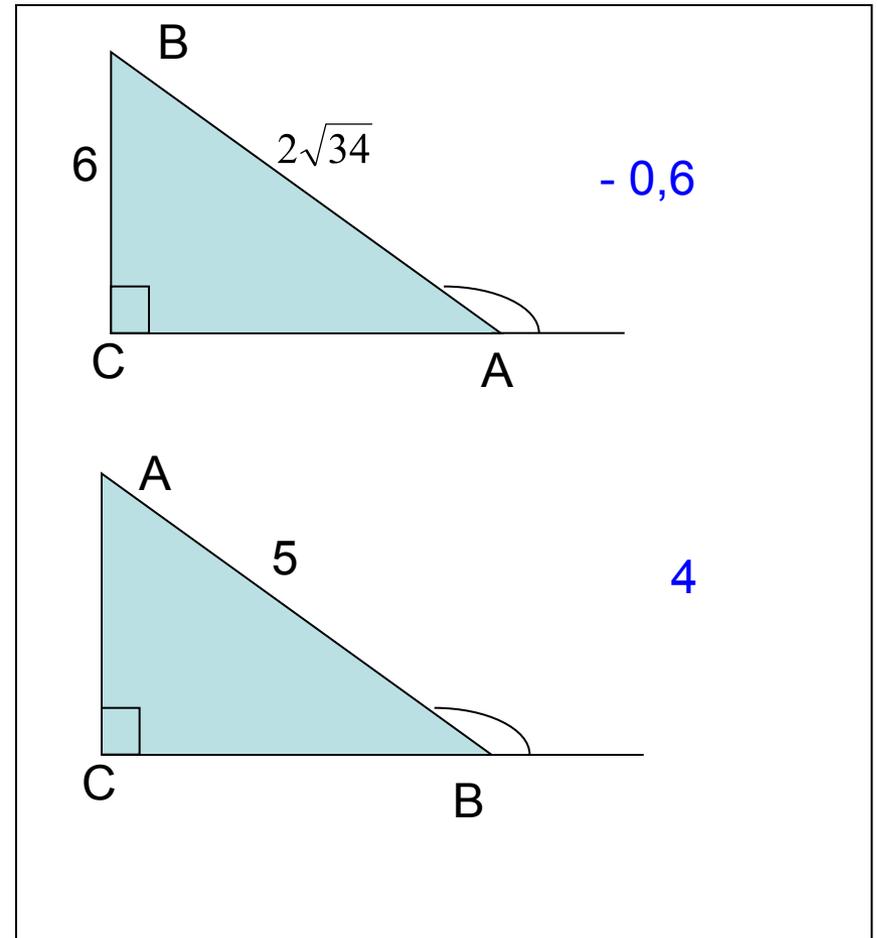
- В треугольнике ABC
угол $C=90^\circ$. $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{2}$
Найти косинус внешнего
угла при вершине A

- 0,5



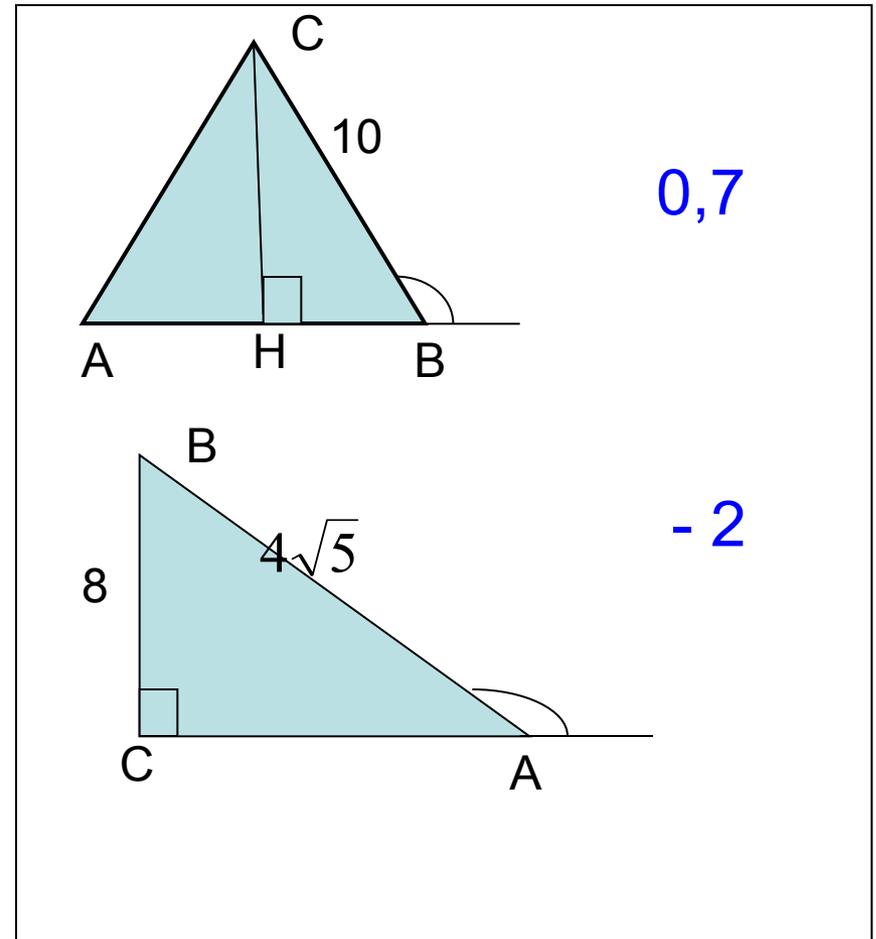
Упражнения

- В треугольнике ABC угол $C=90^\circ$. $AB=2\sqrt{34}$ $BC=6$.
Найти тангенс внешнего угла при вершине A
- В треугольнике ABC угол $C=90^\circ$. $AB=5$. Косинус внешнего угла при вершине B равен $-0,6$. Найти AC

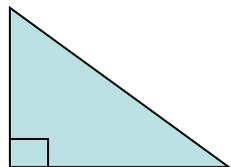


Упражнения

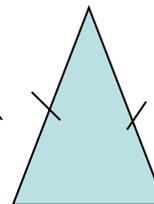
- В $\triangle ABC$ $AC=BC=10$,
 $AB=2\sqrt{51}$ Найти
синус внешнего угла при
вершине B .
- В $\triangle ABC$ угол C равен 90° ,
 $AB=4\sqrt{5}$ $BC=8$. Найдите
тангенс внешнего угла при
вершине A



Обобщение и систематизация изученного материала



Прямоугольный
треугольник



Равнобедренный
треугольник

Найти sin (cos,
tg)

Найти сторону

Найти прямоугольный треугольник.
Провести высоту при необходимости

Дан sin
(cos, tg)

Даны 2
стороны

Дана одна из сто-
рон и cos (sin, tg)

Высота к основанию

Высота к боко-
вой стороне

Делит основание
пополам

Формулы Приведения
$\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$
$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

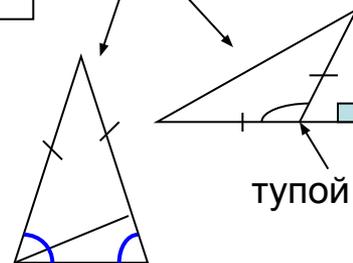
I тип задач

Теорема Пифагора

II тип задач

III тип задач

I, II, III
тип задач



$\alpha = \beta$