

# Система двух линейных уравнений с двумя переменными

Автор: Кокорина Людмила Николаевна,  
учитель математики Сюмсинской  
средней школы, Удмуртия



$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases}$$

1. Что называют системой двух линейных уравнений с двумя переменными?

2. Знак системы?

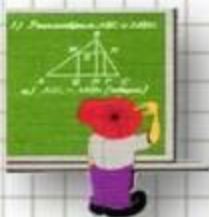
3. Что называют решением системы двух уравнений с двумя переменными?

4. Что значит решить систему уравнений?



# Способы решения систем двух линейных уравнений с двумя переменными

1. Способ подстановки
2. Способ алгебраического сложения
3. Графический способ
4. Формулы Крамера
5. Метод подбора



## Способ подстановки

1. Из одного уравнения системы (всё равно из какого) выразить одну переменную через другую, например,  $y$  через  $x$ .
2. Полученное выражение подставить в другое уравнение системы и получить уравнение с одной переменной  $x$ .
3. Решить это уравнение, найти значение  $x$ .
4. Подставить найденное значение  $x$  в выражение для  $y$  и найти значение  $y$ .
5. Записать ответ в виде упорядоченной пары  $(x; y)$



Решить систему уравнений **методом**  
**подстановки**

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$2x + y = 4$$

$$y = 4 - 2x$$

$$x + 2 \cdot (4 - 2x) = 5$$

$$x + 8 - 4x = 5$$

$$x - 4x = 5 - 8$$

$$-3x = -3$$

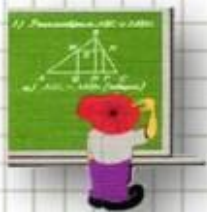
$$x = -3 : (-3)$$

$$x = 1$$

$$y = 4 - 2 \cdot 1$$

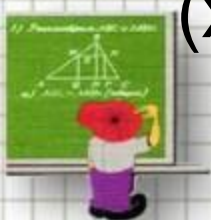
$$y = 2$$

Ответ: (1; 2)



# Способ алгебраического сложения

1. Уравнять модули коэффициентов при одной из переменных;
2. Складывая или вычитая полученные уравнения, найти значение одной переменной;
3. Подставить найденное значение в одно из уравнений исходной системы и найти значение второй переменной;
4. Записать ответ в виде упорядоченной пары  $(x; y)$ .



# Решить систему уравнений **способом алгебраического сложения**

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5, \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$X + 2y = 5$$

$$X + 2 \cdot 2 = 5$$

$$X + 4 = 5$$

$$X = 1$$

Ответ: (1;2)

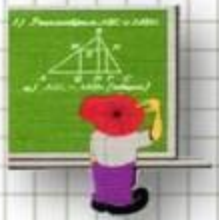
$$\begin{cases} x + 2y = 5 / * 2 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} \phantom{-} \\ - \end{array} \begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

---

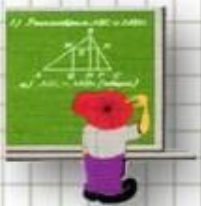
$$3y = 6$$

$$y = 2$$

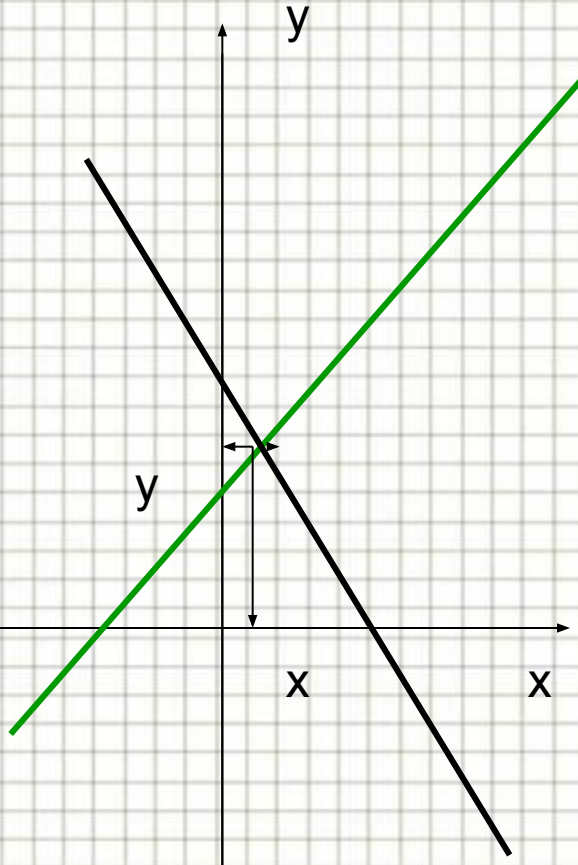


## Графический способ

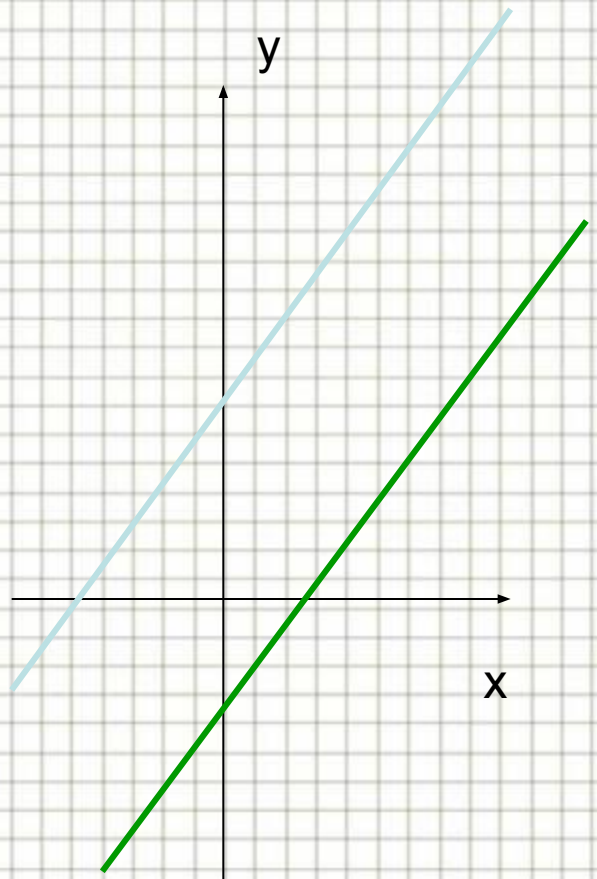
1. Выразить  $y$  через  $x$  из каждого уравнения системы
2. Построить графики функций в одной координатной плоскости.
3. Найти координаты общей точки графиков (если графики имеют общую точку)
4. Записать ответ в виде  $x \approx \dots$  И  $y \approx$



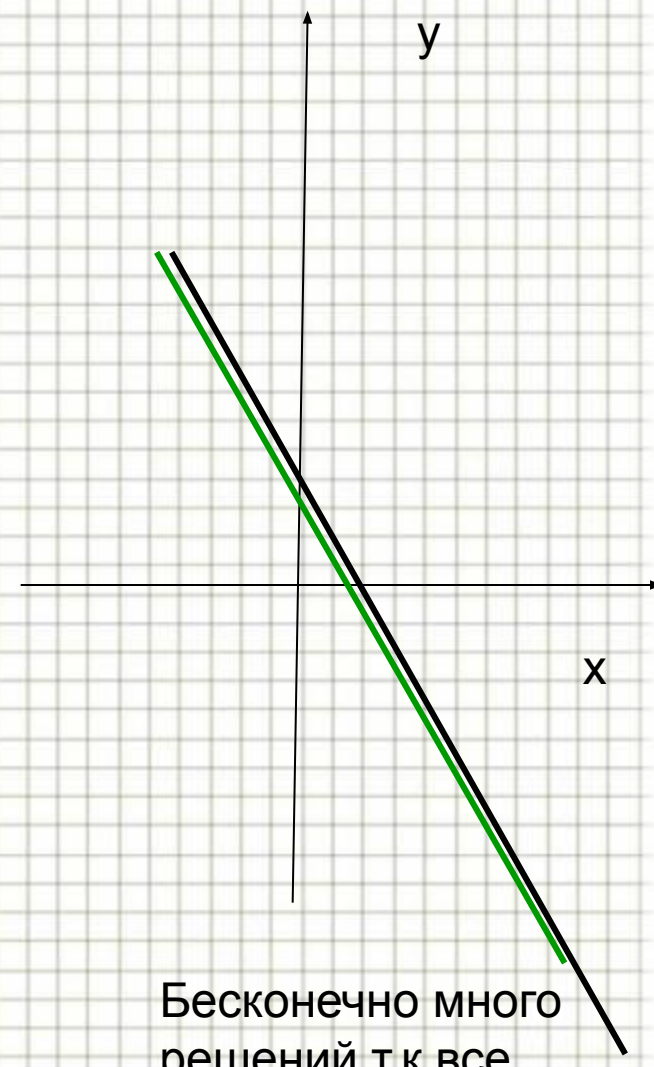




Одно решение, т.к. прямые пересекаются.



Нет решений, т.к. прямые не имеют общих точек



Бесконечно много решений, т.к. все точки прямых общие



Достоинство графического способа – **наглядность.**

Недостаток графического способа –

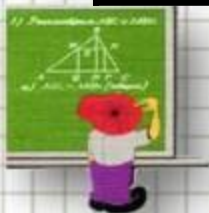
**приближённые значения переменных**

Если система уравнений **не имеет решений**, то она называется **несовместной.**

Если система уравнений **имеет бесконечно много решений**, то она называется **неопределённой**



прямые	Общие точки	Система имеет	О системе говорят
	Одна общая точка	Одно решение	Имеет решение
	Нет общих точек	Не имеет решений	несовместна
	Много общих точек	Много решений	неопределена



Решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$x + 2y = 5$$

$$2x + y = 4$$

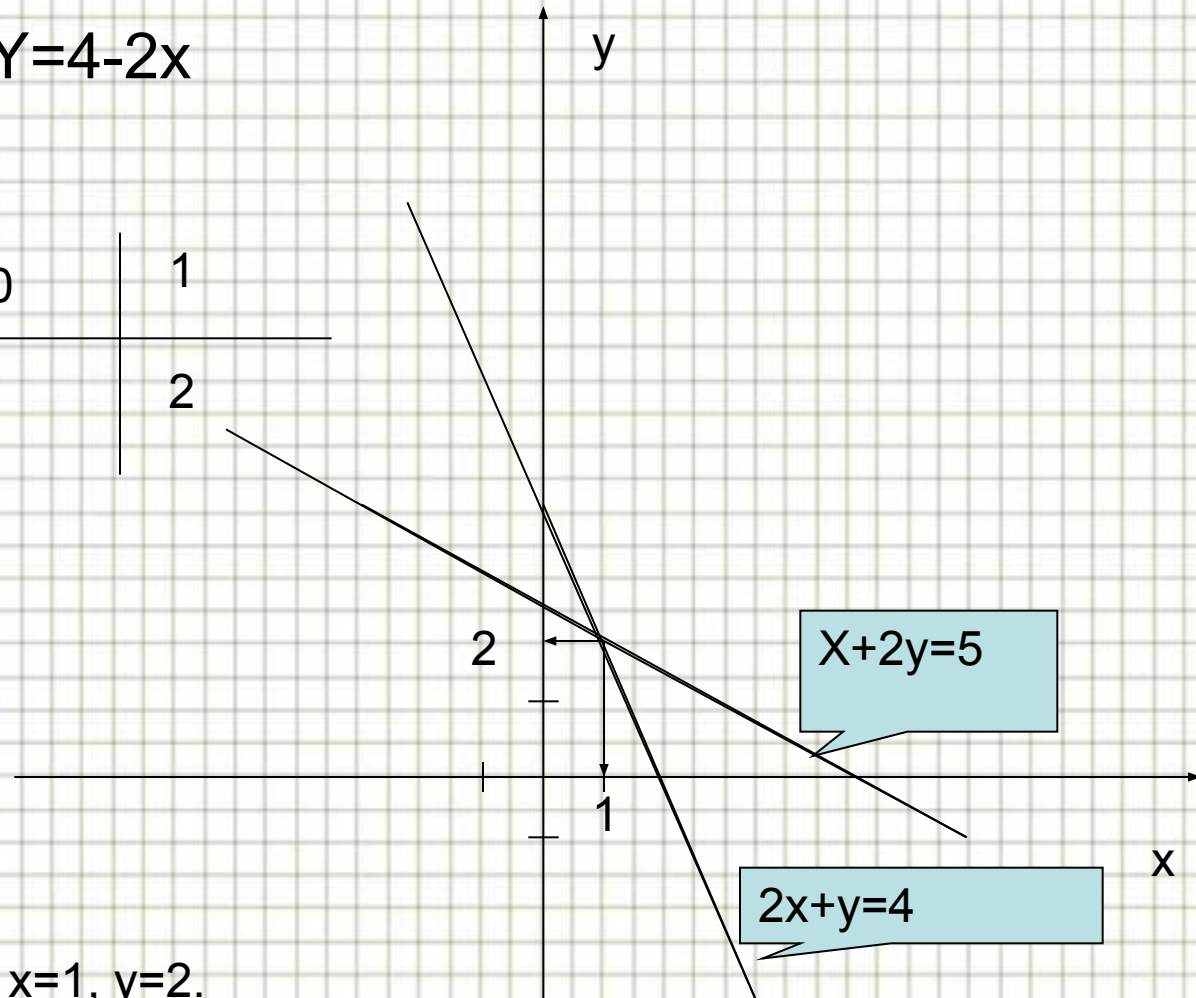
$$2y = 5 - x$$

$$y = 4 - 2x$$

$$y = 2,5 - 0,5x$$

x	1	3
y	2	1

x	0	1
y	4	2



Ответ:  $x = 1, y = 2.$

# Формулы Крамера

$\Delta$  --- главный определитель

$\Delta_x, \Delta_y$  вспомогательные определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1 \cdot b_2 - c_2 \cdot b_1$$

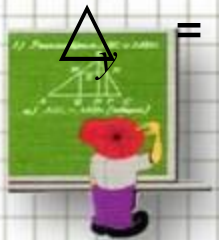
$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 \cdot c_2 - a_2 \cdot c_1$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

1. Если главный определитель не равен нулю, то система имеет одно решение
2. Если главный определитель равен нулю, то:

Нет решений, если вспомогательные определители не равны нулю;

Много решений, если вспомогательные определители равны нулю



## Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 \neq 0$$

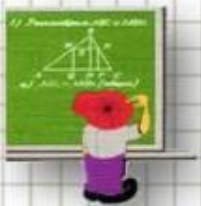
$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -3 : (-3) = 1$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 4 \cdot 2 = -3$$

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -6 : (-3) = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = -6$$

**Ответ: (1;2)**



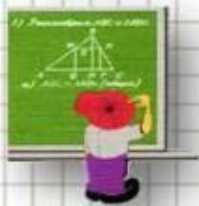
## Метод подбора

1. Назови решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 16 \\ x + y = 80 \end{cases}$$

2. К уравнению  $x+y=6$  добавь такое уравнение, чтобы решением системы была упорядоченная пара чисел  $(4;2)$

3. Придумать систему уравнений такую, чтобы её решением была упорядоченная пара чисел  $(5;2)$



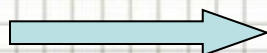
## О количестве решений системы уравнений по виду системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

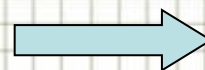
Одно решение

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

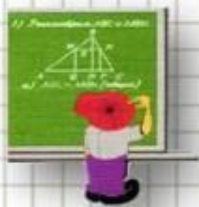
$$\begin{cases} 2x + y = 7, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$



$$\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-2}$$



Одно  
решение

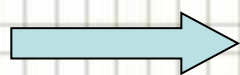




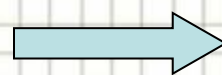
Нет решений, если

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

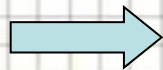


$$\frac{2}{1} = \frac{2}{1} \neq \frac{1}{6}$$

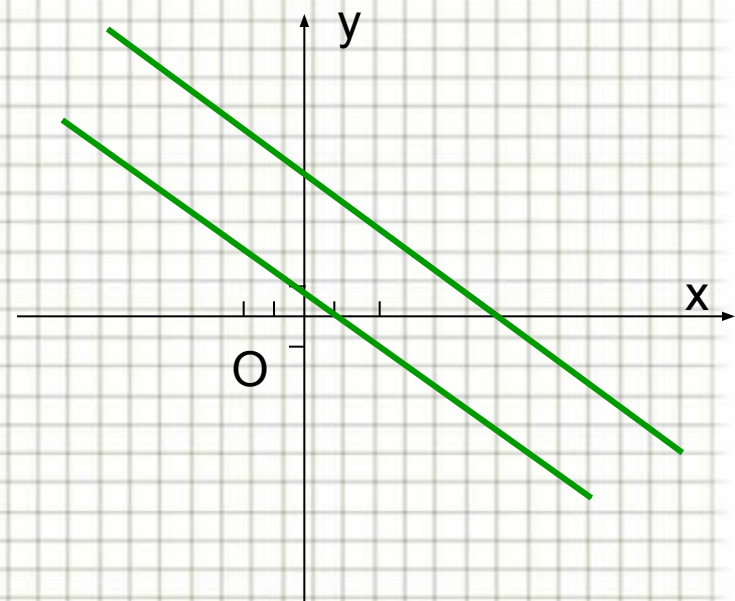


Нет решений

$$\begin{cases} 2x + 2y = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$$



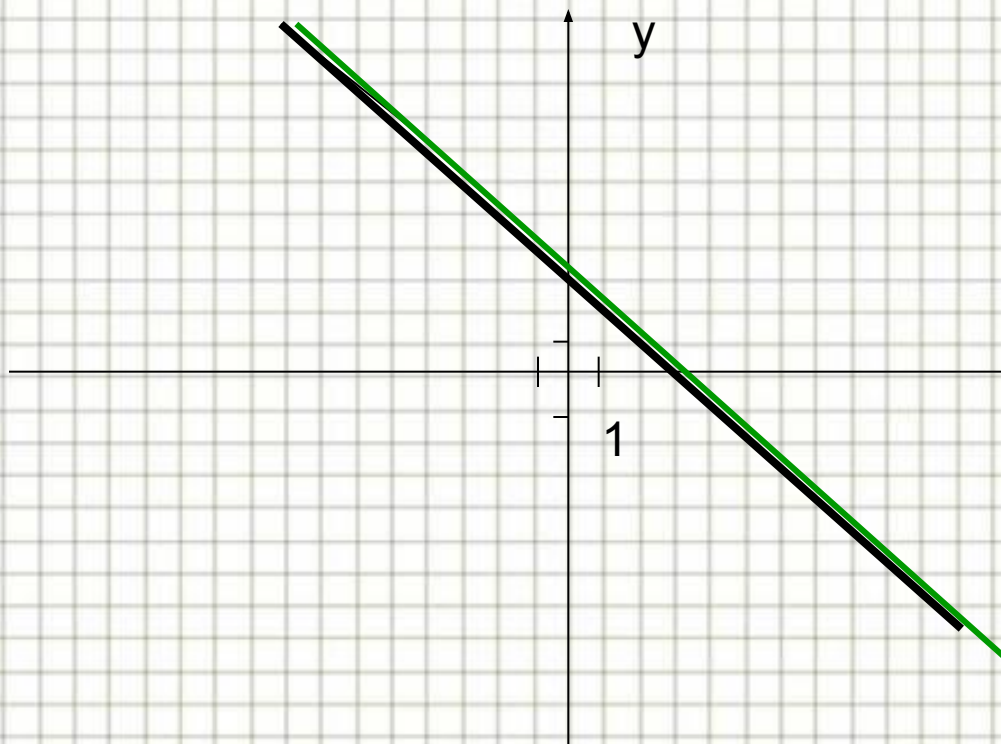
$$\begin{cases} y = -x + \frac{1}{2} \\ y = -x + 6 \end{cases}$$



**Много решений, если**

$$\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x - 2y = 6. \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{2} = \frac{-1}{-2} = \frac{3}{6} \longrightarrow \text{Много реш}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ y = x - 3 \end{cases}$$



**Проверь себя ( работа в группах)**

**При каком значении параметра система уравнений имеет одно решение?**

$$\begin{cases} 3ax + 2y = a + 3, \\ 6x + 4y = 2ax + 1. \end{cases}$$

**При каком значении параметра система уравнений не имеет решений?**

$$\begin{cases} 2ax + 3y = a + 1, \\ 6x + y = 2a - 1. \end{cases}$$



При каком значении параметра система уравнений имеет много решений?

$$\begin{cases} (a-1)x + 3y = a+2, \\ ax + 4y = 2a. \end{cases}$$

Решение: Система имеет много решений, если

$$\frac{a-1}{a} = \frac{3}{4} = \frac{a+2}{2a} \quad \longrightarrow \quad \frac{a-1}{a} = \frac{3}{4} \quad \longrightarrow$$

$$4a-4=3a; \quad 4a-3a=4; \quad \underline{a=4}$$

Значит при  $a=4$   $\frac{a-1}{a} = \frac{3}{4}$  и  $\frac{a+2}{2a} = \frac{4+2}{4*2} = \frac{6}{8}$

Так как  $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$

То при  $a=4$  система имеет много решений



Итак, мы научились:

1. Решать системы линейных уравнений разными способами;

2. По виду системы отвечать на вопрос: «сколько решений имеет система»

3. А также узнали, при каком условии прямые параллельны, пересекаются.



## Зачётная работа по теме: «Решение систем линейных уравнений»

1. Решить систему разными способами(3балла за каждый способ)

$$\begin{cases} 3x - 5y = 8 \\ 6x + 3y = 3 \end{cases}$$

2. Решить систему уравнений методом подбора(1 балл)

$$\begin{cases} x + y = 84, \\ x - y = 5. \end{cases}$$



3. При всех значениях параметра  $a$ , определите число решений системы (3 балла):

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4a \\ ax + y = 3 \end{cases}$$

4. При каком значении параметра  $a$  система имеет единственное решение (2 балла):

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 2)x + 2y = 5a - 3. \end{cases}$$

5. При каком значении параметра  $a$  система не совместна (2 балла):

$$\begin{cases} (2a - 1)x + 3y = 7a + 1, \\ (a + 2)x + 2y = 5a - 3. \end{cases}$$



6. При каком значении параметра  $a$  система уравнений неопределена (2 балла):

$$\begin{cases} (2a-1)x + 3y = 7a+1, \\ (a+2)x + 2y = 5a-3. \end{cases}$$

7. Прямая  $y=kx+b$  проходит через точки  $A(2;7)$  и  $B(-1;-2)$ . Найдите значения  $k$  и  $b$ . (2 балла)

Шкала оценивания:

206-246 --- «5»; 136-156 --- «4»; 66-96 --- «3»

