

# Решение транспортной задачи в среде Excel

## Лекция 12

Транспортная задача относится к двухиндексным задачам, т. к. ее математическая модель сводится к минимизации целевой функции, выражающей суммарные затраты на перевозку всего груза

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при ограничениях

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m} \\ x_{ij} \geq 0 \end{array} \right.$$

Значит, в результате решения задачи необходимо получить матрицу с компонентами  $x_{ij}$  .

# Пример. Задача организации оптимального снабжения .

Три фермерских хозяйства  $A_1, A_2, A_3$  ежедневно могут доставлять в город соответственно 60, 60 и 50 ц молока для обеспечения пяти торговых точек :

$B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$

Стоимость перевозки 1ц молока и потребности торговых точек в молоке указаны в таблице

# Таблица

Фермерские хозяйства	Затраты на перевозку 1ц к торговым точкам					Запасы молока ц
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$	7	6	8	10	12	60
$A_2$	9	5	7	4	6	60
$A_3$	6	8	4	9	7	50
Потребности в молоке, ц	30	20	55	20	25	

Определить оптимальный план поставки молока в каждую торговую точку для удовлетворения потребностей, чтобы суммарные транспортные издержки были минимальными.

## Экономико-математическая модель задачи.

Переменные :  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,5}$ )

- количество молока , поставляемое  $i$ -м фермерским хозяйством в  $j$ -ю торговую точку.

Целевая функция – суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать

$$\begin{aligned} F = & 7x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} + 10x_{14} + 12x_{15} + \\ & + 9x_{21} + 5x_{22} + 7x_{23} + 4x_{24} + 6x_{25} + \\ & + 6x_{31} + 8x_{32} + 4x_{33} + 9x_{34} + 7x_{35} \rightarrow \min \end{aligned}$$

# Функциональные ограничения:

По поставщикам (их 3)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 60 - \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 50 \end{cases}$$

И по потребителям (их 5)

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 55, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20, \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 25. \end{array} \right.$$



Постановка этой задачи была рассмотрена выше . Теперь мы решим эту задачу средствами Excel.

**1) Указать адреса ячеек**, в которые будет помещен результат решения задачи, т. е. изменяемые ячейки . Эти ячейки можно размещать либо в первых строках массива, либо в нижних, как в нашей задаче.

**2) Ввести исходные данные** , как в транспортной таблице.

Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

C19 Arial Cyr 10

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						
12	A2						
13	A3						
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Готово

Лист1 / Отчет по устойчивости 2 / Лист2 / Лист4 / Лист5 / Лист3

NUM

пуск Мои документы Презентация1 Пример 2 транспорт... Microsoft Excel - Кни... RU 20:32

### 3) Ввести зависимости для ограничений.

Сначала введем условия реализации мощностей поставщиков, т.е. ограничения по запасам:

$$\sum_{j=1}^5 x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1,3},$$

где  $a_i$  - запас поставщика. Количество потребителей равно 5.

Поместим курсор в ячейку G11.

Выберем функцию **СУММ**.

Выделим для суммирования ячейки B11:F11.

Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Г11 =СУММ(B11:F11)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						
13	A3						
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Готово

NUM

ПУСК

Мои документы Презентация1 Пример 2 транспорт... Microsoft Excel - Кни...

RU 20:41



Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Г13 =СУММ(B13:F13)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						0
13	A3						0
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Готово

NUM

ПУСК

Мои документы

Презентация1

Пример 2 транспорт...

Microsoft Excel - Кни...

RU

20:45



Это мы введем левые части неравенств (1). Обратим внимание : здесь суммирование идет по строке без каких –либо коэффициентов.

Теперь введем условия по потребителям:

$$\sum_{i=1}^3 x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1,5}.$$

- Нам сейчас нужно просуммировать ячейки по потребителям. Поместим курсор в ячейку **B14**.
- Выберем функцию **сумм**.
- Выделим для суммирования ячейки **B11:B13**, где находятся запасы молока. Нажмем кнопку **ОК**.
- Эту же последовательность действий повторим для ячеек **C14, D14, E14, F14**.

Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

Arial Cyr 10

F14 =СУММ(F11:F13)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						0
13	A3						0
14		0	0	0	0	0	
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Лист1 / Отчет по устойчивости 2 / Лист2 / Лист4 / Лист5 / Лист3

Готово

ПУСК Мои документы Презентация1 Пример 2 транспорт... Microsoft Excel - Кни... 21:10



4) Ввести зависимость для целевой функции. Целевую функцию поместим в ячейку G14. Сюда надо ввести формулу  $F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ . Это двойная сумма, где суммируются произведения. Здесь надо учесть, что перемножаются все коэффициенты из транспортной таблицы и все соответствующие им переменные, стоящие в изменяемых клетках.

- Поместим курсор в ячейку **G14**.
- Запустим **мастер функций** .
- Выберем **СУММПРОИЗВ**.
- Нажмем **ОК**.

- В окне укажем адреса массивов .В нашей задаче это произведение затрат на доставку (ячейки **B3:F5**)и объемов поставок к каждому потребителю (ячейки **B11:F13**).
- В поле **Массив1** укажем адреса **B3:F5**, поместив курсор в указанные ячейки.
- В поле **Массив2** укажем адреса **B11:F13**, поместив курсор в эти ячейки.
- Нажмем **ОК**.В данной задаче в ячейке **G14** появится число 0.

Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Г14 =СУММПРОИЗВ(B3:F5;B11:F13)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точкам					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9		Количество перевезенного молока от хоз. Ai к Bj					
10	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1						0
12	A2						0
13	A3						0
14		0	0	0	0	0	0
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Готово

NUM

пуск

Мои документы

Презентация1

Пример 2 транспорт...

Книга1.xls

EN

21:20



На рисунке отражены введенные формулы.

Фермер. хозяйства	Количество перевезенного молока от фермерского хозяйства $A_i$ к торговой точке $B_j$					
	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$	$B_5$	
$A_1$						=СУММ (B11:F11)
$A_2$						=СУММ (B12:F12)
$A_3$						=СУММ (B13:F13)
	=СУММ (B11:B13)	=СУММ (C11:C13)	=СУММ (D11:D13)	=СУММ (E11:E13)	=СУММ (F11:F13)	=СУММПРО ИЗВ(B3:F5, B11:F13)

5) Запустить команду Поиск решения.

6) Назначить ячейку для целевой функции. Для этого поместить курсор в целевую ячейку. Адрес  $\$G\$14$  введется при этом сам.

Ввести тип целевой функции –отметить –**Минимальное значение**

Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

G14 =СУММПРОИЗВ(B3:F5;B11:F13)

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точка					Запас молока		
2	B1	B2	B3	B4	B5	(ц)		
3	7	6	8	10	12	60		
4	9	5	7	4	6	60		
5	6	8	4	9	7	50		
6	30	20	55	20	25			
7								
8								
9	Количество перевезенного молока от хоз.Аi к Bj							
10	B1	B2	B3	B4	B5			
11						0		
12						0		
13								
14	0	0	0					
15								
16								
17								
18								
19								
20								

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: \$G\$14

Равной:  максимальному значению  значению: 0

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Выполнить  
Закрыть  
Параметры  
Восстановить  
Справка

Предположить  
Добавить  
Изменить  
Удалить

Готово

Отчет по устойчивости 3 Лист1 Отчет по устойчивости 2 Лист2

NUM

пуск Мои документы Презентация1 Пример 2 транспорт... Книга1.xls EN 21:25



## 7) Ввести ограничения

Первое ограничение –по уровню потребления: $V14:F14=V6:F6$

второе –по уровню запасов $G11:G13 \leq G3:G5$

После ввода ограничений нажмем кнопку **ОК**.



## 8) Ввести параметры.

Установить Неотрицательные значения  
и Линейная модель

Нажмем ОК.

В появившемся окне **Поиск решения**  
нажать **Выполнить**.

Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

G14 =СУММПРОИЗВ(B3:F5;B11:F13)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Затраты на перевозку 1ц молока к торговым точка					Запас мол
2	Фермерские хозяйства	B1	B2	B3	B4	B5	
3	A1	7	6	8	10	12	60
4	A2	9	5	7	4	6	60
5	A3	6	8	4	9	7	50
6	Потребности в молоке	30	20	55	20	25	
7							
8							
9	Фермерские хозяйства	количество перевезенного молока от Ai к Bj					
10		B1	B2	B3	B4	B5	
11	A1	30	10	0	0	0	40
12	A2	0	10	5	20	25	60
13	A3	0	0	50	0	0	50
14		30	20	55	20	25	785
15							
16							
17							
18							
19							
20							

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Параметры

Укажите

пуск | Мои документы | Microsoft PowerPoint ... | Книга1.xls

EN 21:52

**Ответ.** Распределение товара по торговым точкам приведено на рисунке. Общие затраты на перевозку продукции составят **785** д.е. Спрос торговых точек удовлетворен полностью - они получают 150ц молока. У первого фермерского хозяйства останется нереализованным **20ц** молока.

# Пример. Закрепление самолетов за воздушными линиями.

На четырех авиалиниях используется три типа самолетов. В таблицах задано число самолетов каждого типа, месячный объем перевозок и эксплуатационные расходы.

Таблица 1

Тип самолета	Число самолетов	Месячный объем перевозок одним самолетом по авиалиниям			
		I	II	III	IV
1	50	15	10	20	50
2	20	30	25	10	17
3	30	25	50	30	45

Таблица 2

Тип самолета	Эксплуатационные расходы			
	I	II	III	IV
1	15	20	25	40
2	70	28	15	45
3	40	70	40	65
Потребности	300	200	1000	500

Требуется распределить самолеты трех типов по авиалиниям так, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из четырех авиалиний соответственно не менее 300, 200, 1000 и 500 единиц груза.

# Экономико-математическая модель задачи.

*Переменные* :  $x_{ij}$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,4}$ ) - количество самолетов  $i$ -го типа, назначаемых на  $j$ -ю авиалинию.

*Целевая функция* - суммарные транспортные издержки, которые необходимо минимизировать:

$$\begin{aligned} F(x) = & 15x_{11} + 20x_{12} + 25x_{13} + 40x_{14} + \\ & + 70x_{21} + 28x_{22} + 15x_{23} + 45x_{24} + \\ & + 40x_{31} + 70x_{32} + 40x_{33} + 65x_{34} \rightarrow \min \end{aligned}$$

## Ограничения:

По плану перевозок

$$\begin{cases} 15x_{11} + 30x_{21} + 25x_{31} \geq 300, \\ 10x_{12} + 25x_{22} + 50x_{32} \geq 200, \\ 20x_{13} + 10x_{23} + 30x_{33} \geq 1000, \\ 50x_{14} + 17x_{24} + 45x_{34} \geq 500; \end{cases}$$



# Ограничения:

Если нет необходимости использовать все самолеты, то эти ограничения будут иметь вид неравенств типа  $\leq$ .

Все переменные должны быть неотрицательными и целочисленными, т. к. число самолетов не может быть не целым.

# Вид электронной таблицы

Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

Введите вопрос

F38

	A	B	C	D	E	F	G
3	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов	
4	1						
5	2						
6	3						
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозок						
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2	30	25	10	17	20	
14	3	25	50	30	45	30	
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18	1	15	20	25	40		
19	2	70	28	15	45		
20	3	40	70	40	65		
21							

Готово

NUM

Пуск

Мои документы

Пример 2 транспорт...

Microsoft PowerPoint ...

Microsoft Excel - Кни...

EN 9:51

# Решение задачи.

Ограничения по количеству используемых самолетов вводим с помощью функции СУММ.

Эксплуатационные расходы вводим с помощью функции СУММПОИЗВ.

Ячейку ЦФ заполняем с помощью функции СУММПОИЗВ.

	A	B	C	D	E	F	G
4	1					0	
5	2					0	
6	3					0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	12:E14)		
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50	50	
13	2	30	25	10	17	20	
14	3	25	50	30	15	30	
15							
16	Тип самолета						
17							
18							
19							
20							
21							
22							

**Аргументы функции**

СУММПРОИЗВ

Массив1 E4:E6 = {0;0;0}

Массив2 E12:E14 = {50;17;15}

Массив3 = массив

= 0

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов или диапазонов.

**Массив2:** массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все массивы должны иметь одну и ту же размерность.

Справка по этой функции      Значение: 0

OK      Отмена



Microsoft Excel - Книга1.xls

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка Введите вопрос

Ф6 =СУММ(B6:E6)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Тип самолета	Матрица переменных					Число самолетов
4	1					0	
5	2					0	
6	3					0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	0		
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом					Число самолетов
11		I	II	III	IV		
12	1	15	10	20	50		50
13	2	30	25	10	17		20
14	3	25	50	30	45		30
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18	1	15	20	25	40		
19	2	70	28	15	15		
20	3	70	28	15	15		

Готово NUM

пуск Мои документы Пример 2 транспорт... Microsoft PowerPoint ... Книга1.xls EN 10:05

Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Ф8    =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B18:E20)

	A	B	C	D	E	F	G
4		1					0
5		2					0
6		3					0
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	0		0
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12		1	15	10	20	50	50
13		2	30	25	10	17	20
14		3	25	50	30	45	30
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18		1	15	20	25	40	
19		2	70	28	15	45	
20		3	40	70	40	65	
21							
22							

Готово

NUM

пуск    Мои документы    Пример 2 транспорт...    Microsoft PowerPoint ...    Книга1.xls

EN    10:18



	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Тип самолета	Матрица переменных					Число самолетов
4		1				0	
5		2				0	
6		3				0	
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	0	0	0	0	0	
9							

	A	B	C	D	E	F	G
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом					Число самолетов
11							
12		1				50	
13		2				20	
14		3				30	
15							
16	Тип самолета						
17							
18		1					
19		2					

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной:  максимальному значению  значению:

минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

- целое
- >=
- <=



Microsoft Excel - Книга1.xls

Введите вопрос

Ф8    =СУММПРОИЗВ(B4:E6;B18:E20)

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3	Тип самолета	Матрица переменных				Число самолетов	
4		1	20	0	20	10	50
5		2	0	8	0	0	8
6		3	0	0	20	0	20
7	План перевозок	300	200	1000	500	ЦФ	
8	Объем перевозо	300	200	1000	500	2224	
9							
10	Тип самолета	Месячный перевозок одним самолетом				Число самолетов	
11		I	II	III	IV		
12		1	15	10	20	50	50
13		2				17	20
14		3				45	30
15							
16	Тип самолета	Эксплуатационные расходы					
17		I	II	III	IV		
18		1	15	20	25	40	
19		2	70	20	15	15	

**Результаты поиска решения**

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

Тип отчета  
 Результаты  
 Устойчивость  
 Пределы

Сохранить найденное решение  
 Восстановить исходные значения

OK    Отмена    Сохранить сценарий...    Справка

Готово

NUM

пуск    Мои документы    Пример 2 транспорт...    Microsoft PowerPoint ...    Книга1.xls    EN    10:22





# Ответ

Общая стоимость перевозок составит 2224 д.е. Из 20 самолетов второго типа будет использовано 8, из 30 самолетов третьего типа будет использовано 20. Месячный объем перевозок выполнен полностью. Оптимальное распределение самолетов приведено на последнем слайде.