

Гимназия №125
Советского района

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СРЕДЕ MAPLE



Казань
2005

Выполнила:
ученица 11М класса
Владимилова О.М.
Руководители: К.Ф.-М.Н.,
доцент КГПУ, заслуженный учитель
РТ Салехова Л.Л.
учитель математики гимназии № 125
Чикрин Е. А.

Содержание

- ❖ Формулировка транспортной задачи
- ❖ Математическая модель транспортной задачи
 - ❖ Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи
 - ❖ Опорное решение транспортной задачи. Циклы
- ❖ Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости
 - ❖ Переход от одного опорного решения к другому
 - ❖ Метод потенциалов
- ❖ Решение транспортной задачи методом потенциалов
 - ❖ Решение транспортной задачи в среде Maple

Формулировка транспортной задачи

a_i	b_j	b_1	b_2	...	b_n
a_1		c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}
a_2		c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}
...	
a_m		c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}



Формулировка транспортной задачи

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$



Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$



Математическая модель транспортной задачи

a_i b_j	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$



Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{array} \right.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$



Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи

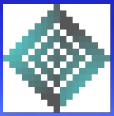
Теорема. Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запасам потребителей:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

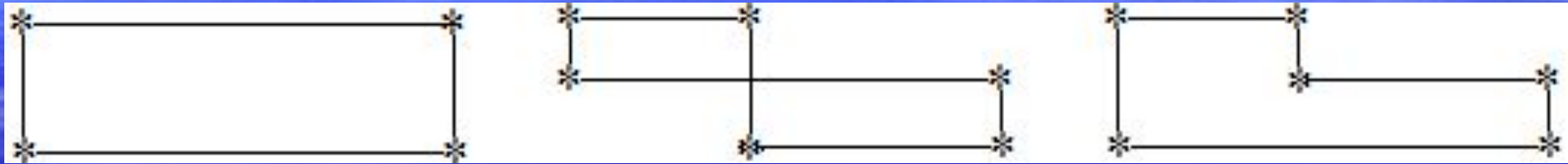
т.е. задача должна быть с правильным балансом.

Ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $N = m + n - 1$.





Опорное решение транспортной задачи. Циклы



Теорема (о взаимосвязи линейной зависимости векторов-условий и возможности образования цикла). Для того, чтобы система векторов-условий транспортной задачи была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы из соответствующих клеток таблицы можно было выделить часть, которая образует цикл.

Следствие. Допустимое решение транспортной задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$ является опорным тогда и только тогда, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

Теорема. Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

$a_i \quad b_j$	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8



Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10	4 110
90	12 20	2 70	8

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$c = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & 10 & \textcircled{4} \\ \textcircled{12} & \textcircled{2} & 8 \end{pmatrix}$$

Число занятых клеток таблицы равно

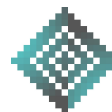
$$N = m + n - 1 = 3 + 2 - 1 = 4.$$



Переход от одного опорного решения к другому

Теорема (о существовании и единственности цикла). Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Цикл называется означенным, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным знак «-».



Переход от одного опорного решения к другому



Сдвигом по циклу на

величину θ называется

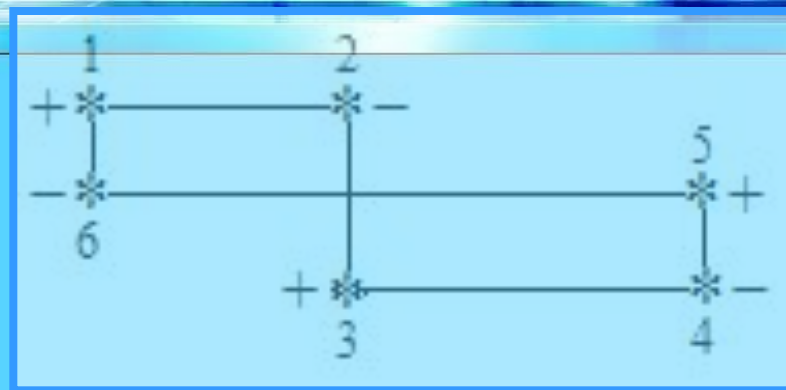
увеличение объемов перевозок

во всех нечетных клетках

цикла, отмеченных знаком «+»,

на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных

клетках, отмеченных знаком «-», на θ .



Теорема. Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min_{\text{"_"}} \{x_{ij}\}$ получится опорное решение.





Метод потенциалов

Теорема (признак оптимальности опорного решения). Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i , $i = 1, 2, \dots, m$ и потребителей v_j , $j = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\begin{aligned} u_i + v_j &= c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0, \\ u_i + v_j &\leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0. \\ \Delta_{ij} &= u_i + v_j - c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Опорное решение является **оптимальным**, если для всех векторов-условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

a_i	b_j	60	70	110
150		6	10	4
90		12	2	8

$$\sum_{i=1}^2 a_i = 150 + 90 = 240$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 60 + 70 + 110 = 240$$



Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & 10 & \textcircled{4} \\ \textcircled{12} & \textcircled{2} & \textcircled{8} \end{pmatrix}$$

	b_j	60	70	110
a_i				
150		6	10	4
		40		110
90		12	2	8
		20	70	

$$Z(X_1) = 40 \cdot 6 + 110 \cdot 4 + 20 \cdot 12 + 70 \cdot 2 = 1060$$



Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -4 \quad v_3 = 4$$

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_1 + v_3 = 4, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 6 \end{matrix}$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10 110	4 110
90	12 20	2 70	8

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 4 - 10 = -14$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6 + 4 - 8 = 2.$$



Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -4 \quad v_3 = 4$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10 —	4 110
90	12 20	2 70	8 2

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 6$$



Решение транспортной задачи методом потенциалов

		$v_1=6$	$v_2=-4$	$v_3=4$
	b_j	60	70	110
a_i				
$u_1=0$	150	6 40	10	4 110
$u_2=6$	90	12 20	2 70	8 2

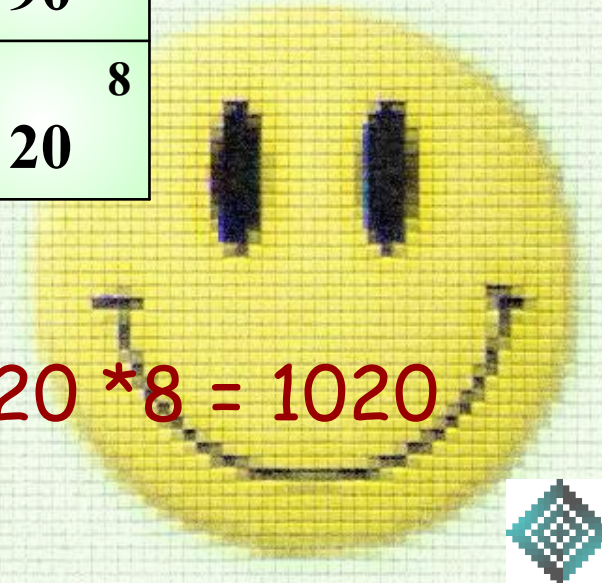


Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -2 \quad v_3 = 4$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
$u_1 = 0$ 150	6 60	10 -	4 90
$u_2 = 4$ 90	12 -	2 70	8 20

$$Z(X_2) = 60 * 6 + 90 * 4 + 70 * 2 + 20 * 8 = 1020$$





Решение транспортной задачи в среде Maple

- **standardize** – приведение заданной системы уравнений или неравенств к стандартной форме неравенств типа «меньше или равно».
- **minimize** - вычисление минимума функции;
- **simplify** (*expr*, *n1*, *n2*, ...) – возвращает упрощенное выражение *expr* с учетом параметров с именами *n1*, *n2*, ... (в том числе заданных списком или множеством);





Решение транспортной задачи в среде Maple

a_i	b_j	60	70	110
150		6	10	4
90		12	2	8

Для решения транспортной задачи в программе Maple 7 имена ячеек должны быть указаны в виде x11, x12 и т.д.





Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):standardize({x11+x12+x13=150,x  
21+x22+x23=90,x11+x21=60,x12+x22=70,x13+x23=  
110});
```

```
{-x11-x21<=-60,-x11-x12-x13<=-150,x11+x21<=60,x11+x12+x13<=150,  
-x21-x22-x23<=-90,x21+x22+x23<=90,-x13-x23<=-110,x13+x23<=110,  
x12+x22<=70,-x12-x22<=-70}
```

Conversions → Make into List.

```
[-x11-x21<=-60,-x11-x12-x13<=-150,  
x11+x21<=60,x11+x12+x13<=150,  
-x21-x22-x23<=-90,x21+x22+x23<=90,  
-x13-x23<=-110,x13+x23<=110,  
x12+x22<=70,-x12-x22<=-70];
```





Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):minimize(6*x11+10*x12+4*x13+12
*x21+2*x22+8*x23,{-x11-x21<=-60,
-x11-x12-x13<=-150, x11+x21<=60,
x11+x12+x13<=150, -x21-x22-x23<=-90,
x21+x22+x23<=90, -x13-x23<=-110,
x13+x23<=110, x12+x22 <=70, -x12-x22<=-70},
NONNEGATIVE);
```

{x13 = 90, x22 = 70, x23 = 20, x11 = 60, x12 = 0, x21 = 0}

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	60	-	90
90	-	1020	20

simplify(6*x11+10*x12+4*x13+12*x21+2*x22+8*x23, [x13=90, x22=70, x23=20, x11=60, x12=0, x21=0]);





Огромное
спасибо!!!

PLANET ARAKIS