Гимназия №125
Советского района

РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СРЕДЕ MAPLE

Выполнила:
ученица 11М класса
Владимирова О.М.
Руководители: к.ф.-м.н.,
доцент КГПУ, заслуженный учитель
РТ Салехова Л.Л.
учитель математики гимназии № 125
Чикрин Е. А.

Казань
2005

Содержание

Формулировка транспортной задачи

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2	…	b_n
a_1	c_{11}	c_{12}	…	c_{1n}
a_2	c_{21}	c_{22}	…	c_{2n}
…	…	…	…	…
a_m	c_{m1}	c_{m2}	…	c_{mn}

Формулировка транспортной задачи

$A=(a_1, a_2, \dots, a_m)$ $B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m. \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

Математическая модель транспортной задачи

a_i \ b_j	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

Математическая модель транспортной задачи

$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$, $i=1, 2, ..., m$, $j=1, 2, ..., n$.

Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи

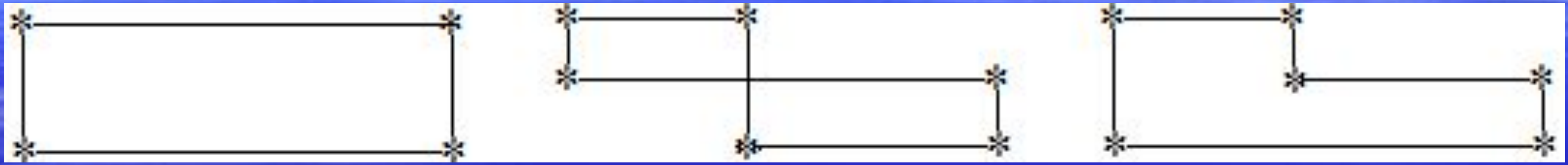
Теорема. Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запасам потребителей:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

т.е. задача должна быть с правильным балансом.

Ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен $N = m + n - 1$.

Опорное решение транспортной задачи. Циклы



Теорема (о взаимосвязи линейной зависимости векторов-условий и возможности образования цикла). Для того, чтобы система векторов-условий транспортной задачи была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы из соответствующих клеток таблицы можно было выделить часть, которая образует цикл.

Следствие. Допустимое решение транспортной задачи $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ является опорным тогда и только тогда, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

Теорема. Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

a_i \ b_j	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8

Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

a_i \ b_j	60	70	110
150	6 40	10	4 110
90	12 20	2 70	8

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix}\rightarrow$$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & \cancel{10} & 4 \\ 12 & 2 & \cancel{8} \end{pmatrix}$$

Число занятых клеток таблицы равно

$N = m + n - 1 = 3+2-1=4$.

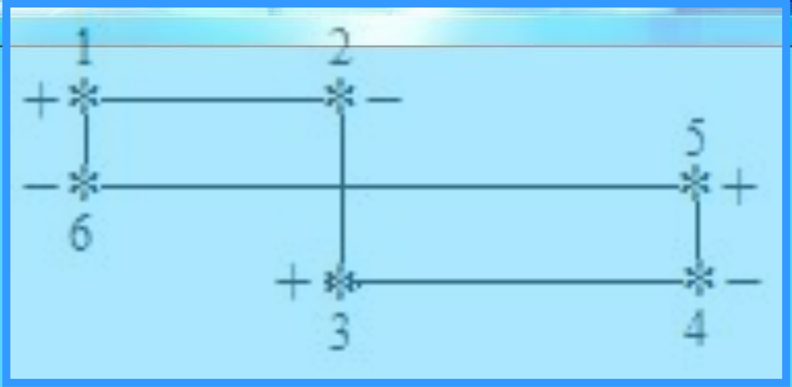
Переход от одного опорного решения к другому

Теорема (о существовании и единственности цикла). Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Цикл называется означенным, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным знак «–».

Переход от одного опорного решения к другому

Сдвигом по циклу на величину θ называется увеличение объемов перевозок во всех нечетных клетках цикла, отмеченных знаком «+», на θ и уменьшение объемов перевозок во всех четных клетках, отмеченных знаком «–», на θ.



Теорема. Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину $\theta = \min\limits_{"-"}\{x_{ij}\}$ получится опорное решение.

Метод потенциалов

Теорема (признак оптимальности опорного решения). Если допустимое решение $X = (x_{ij})$, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков u_i, $i = 1, 2, …, m$ и потребителей v_j, $j = 1, 2, …, n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \le c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \quad \text{при } x_{ij} = 0$$

Опорное решение является оптимальным, если для всех векторов-условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

Решение транспортной задачи методом потенциалов

a_i \ b_j	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 150 + 90 = 240 \qquad \sum_{j=1}^{3} b_j = 60 + 70 + 110 = 240$$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$C=\begin{pmatrix} 6 & \cancel{10} & 4 \\ 12 & 2 & \cancel{8} \end{pmatrix}$$

b_j / a_i	60	70	110
150	6 40	10	4 110
90	12 20	2 70	8

$Z(X_1) = 40*6+110*4+20*12+70*2 = 1060$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_1 + v_3 = 4, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 2. \end{cases}$$

	$v_1 = 6$	$v_2 = -4$	$v_3 = 4$
a_i \ b_j	60	70	110
$u_1=0$ 150	6 40	10	4 110
$u_2=6$ 90	12 20	2 70	8

$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0-4-10 = -14$

$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6+4-8 = 2.$

Решение транспортной задачи методом потенциалов

		$v_1 = 6$	$v_2 = -4$	$v_3 = 4$
	b_j / a_i	60	70	110
$u_1 = 0$	150	6 40	10 –	4 110
$u_2 = 6$	90	12 20	2 70	8 $\boxed{2}$

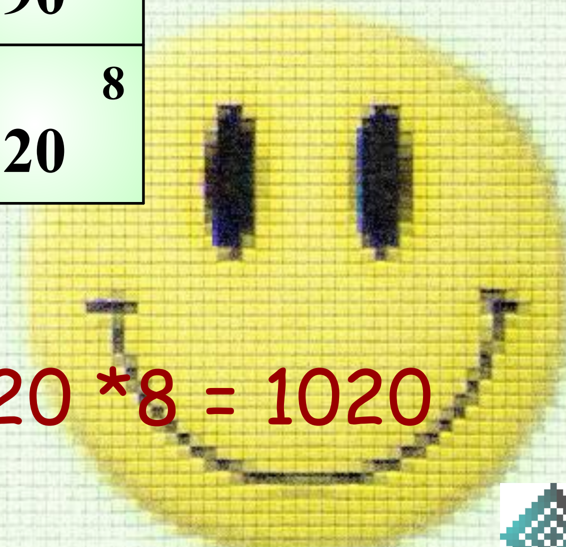
Решение транспортной задачи методом потенциалов

		$v_1=6$	$v_2=-4$	$v_3=4$
	a_i \ b_j	60	70	110
$u_1=0$	150	6 40 +	10 −	4 110 −
$u_2=6$	90	12 20 −	2 70	8 $\boxed{2}$ +

Решение транспортной задачи методом потенциалов

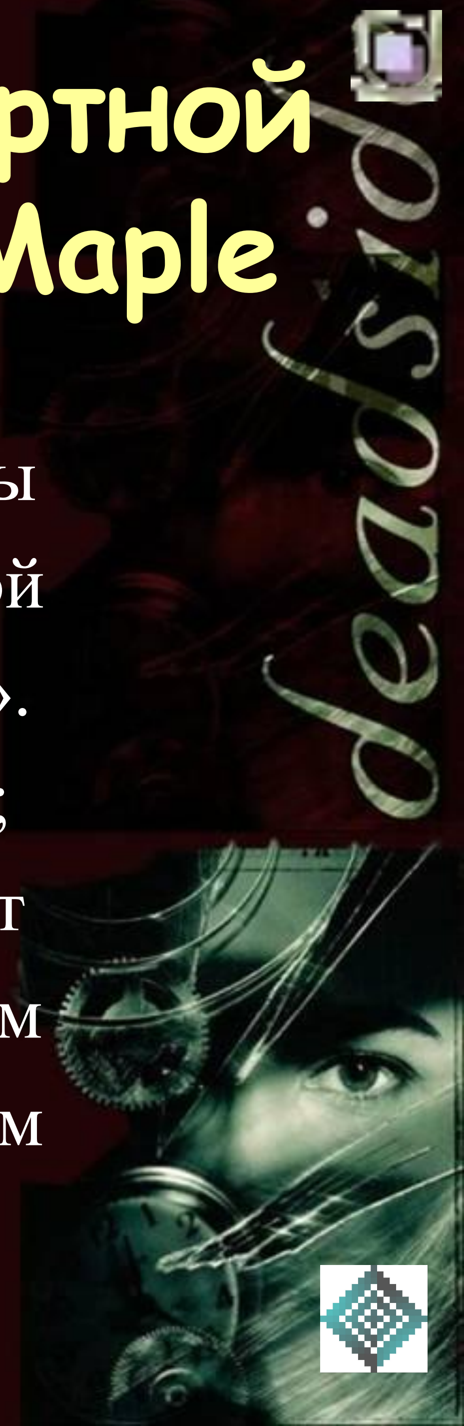
	a_i \ b_j	60	70	110
		$v_1 = 6$	$v_2 = -2$	$v_3 = 4$
$u_1=0$	150	6 60	10 –	4 90
$u_2=4$	90	12 –	2 70	8 20

$Z(X_2) = 60 * 6 + 90 * 4 + 70 * 2 + 20 * 8 = 1020$



Решение транспортной задачи в среде Maple

- standardize – приведение заданной системы уравнений или неравенств к стандартной форме неравенств типа «меньше или равно».
- minimize - вычисление минимума функции;
- simplify (expr, n1, n2, …) – возвращает упрощенное выражение expr с учетом параметров с именами n1, n2, … (в том числе заданных списком или множеством);



Решение транспортной задачи в среде Maple

b_j / a_i	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8

Для решения транспортной задачи в программе Maple 7 имена ячеек должны быть указаны в виде x11, x12 и т.д.

Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):standardize({x11+x12+x13=150,x21+x22+x23=90,x11+x21=60,x12+x22=70,x13+x23=110});
```

$$\{-x11 - x21 \le -60, -x11 - x12 - x13 \le -150, x11 + x21 \le 60, x11 + x12 + x13 \le 150, -x21 - x22 - x23 \le -90, x21 + x22 + x23 \le 90, -x13 - x23 \le -110, x13 + x23 \le 110, x12 + x22 \le 70, -x12 - x22 \le -70\}$$

Conversions → Make into List.

```
[-x11-x21<=-60, -x11-x12-x13<=-150,
x11+x21<=60, x11+x12+x13<=150,
-x21-x22-x23<=-90, x21+x22+x23<=90,
-x13-x23<=-110, x13+x23<=110,
x12+x22<=70,-x12-x22<=-70];
```

Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):minimize(6*x11+10*x12+4*x13+12
*x21+2*x22+8*x23,{-x11-x21<=-60,
-x11-x12-x13<=-150,                 x11+x21<=60,
x11+x12+x13<=150,             -x21-x22-x23<=-90,
x21+x22+x23<=90,                 -x13-x23<=-110,
x13+x23<=110, x12+x22 <=70, -x12-x22<=-70},
NONNEGATIVE);
```

$$\{x13 = 90, x22 = 70, x23 = 20, x11 = 60, x12 = 0, x21 = 0\}$$

a_i \ b_j	60	70	110
150	6 60	10 –	4 90
90	12 –	2 70	8 20

```
simplify(6*x11+10*x12+4*x13+12*x21+2*x22+
8*x23, [x13=90, x22=70, x23=20, x11=60,
x12=0, x21=0]);
```

$$1020$$


Огромное спасибо!!!
PLANET ARAKIS