

Гимназия №125  
Советского района

# РЕШЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ЗАДАЧИ В СРЕДЕ MAPLE



Выполнила:  
ученица 11М класса  
Владимилова О.М.

Руководители: К.Ф.-М.Н.,  
доцент КГПУ, заслуженный учитель  
РТ Салехова Л.Л.  
учитель математики гимназии № 125  
Чикрин Е. А.

Казань  
2005

# Содержание

- ❖ Формулировка транспортной задачи
- ❖ Математическая модель транспортной задачи
  - ❖ Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи
  - ❖ Опорное решение транспортной задачи. Циклы
- ❖ Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости
  - ❖ Переход от одного опорного решения к другому
    - ❖ Метод потенциалов
- ❖ Решение транспортной задачи методом потенциалов
  - ❖ Решение транспортной задачи в среде Maple

# Формулировка транспортной задачи

$a_i$	$b_j$	$b_1$	$b_2$	...	$b_n$
$a_1$		$c_{11}$	$c_{12}$	...	$c_{1n}$
$a_2$		$c_{21}$	$c_{22}$	...	$c_{2n}$
...		...	...	...	...
$a_m$		$c_{m1}$	$c_{m2}$	...	$c_{mn}$



# Формулировка транспортной задачи

$$A=(a_1, a_2, \dots, a_m) \quad B=(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$



# Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i=1, 2, \dots, m.$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j=1, 2, \dots, n.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n.$$



# Математическая модель транспортной задачи

$a_i$ $b_j$	20	30	40
40	3	5	7
50	4	6	10

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$



# Математическая модель транспортной задачи

$$Z(X) = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 4x_{21} + 6x_{22} + 10x_{23}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 40, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 20, \\ x_{12} + x_{22} = 30, \\ x_{13} + x_{23} = 40 \end{array} \right.$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, j=1, 2, \dots, n.$$



# Необходимое и достаточное условия разрешимости транспортной задачи

**Теорема.** Для того чтобы транспортная задача линейного программирования имела решение, необходимо и достаточно, чтобы суммарные запасы поставщиков равнялись суммарным запасам потребителей:

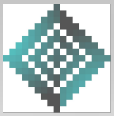
$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$$

т.е. задача должна быть с правильным балансом.

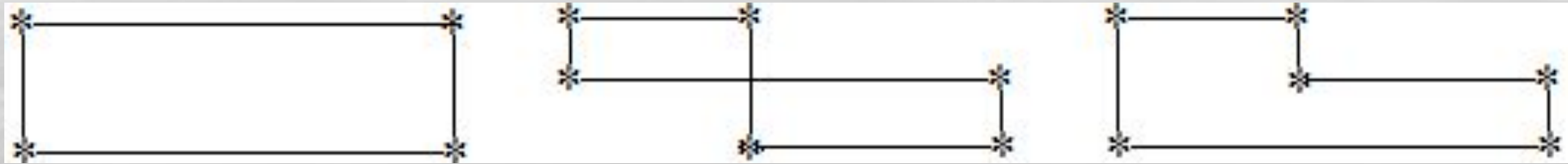
Ранг системы векторов-условий транспортной задачи равен  $N = m + n - 1$ .







# Опорное решение транспортной задачи. Циклы



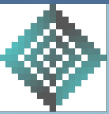
**Теорема** (о взаимосвязи линейной зависимости векторов-условий и возможности образования цикла). Для того, чтобы система векторов-условий транспортной задачи была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы из соответствующих клеток таблицы можно было выделить часть, которая образует цикл.

**Следствие.** Допустимое решение транспортной задачи  $X = (x_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  является опорным тогда и только тогда, когда из занятых им клеток таблицы нельзя образовать ни одного цикла.

# Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

Теорема. Решение транспортной задачи, построенное методом минимальной стоимости, является опорным.

$a_i \quad b_j$	60	70	110
150	6	10	4
90	12	2	8



# Построение начального опорного решения методом минимальной стоимости

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10	4 110
90	12 20	2 70	8

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$c = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & 10 & \textcircled{4} \\ \textcircled{12} & \textcircled{2} & 8 \end{pmatrix}$$

Число занятых клеток таблицы равно

$$N = m + n - 1 = 3 + 2 - 1 = 4.$$



# Переход от одного опорного решения к другому

Теорема (о существовании и единственности цикла). Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то для любой свободной клетки таблицы существует единственный цикл, содержащий эту клетку и часть клеток, занятых опорным решением.

Цикл называется означенным, если его угловые клетки пронумерованы по порядку и нечетным клеткам приписан знак «+», а четным знак «-».



# Переход от одного опорного решения к другому

Сдвигом по циклу на

величину  $\theta$  называется

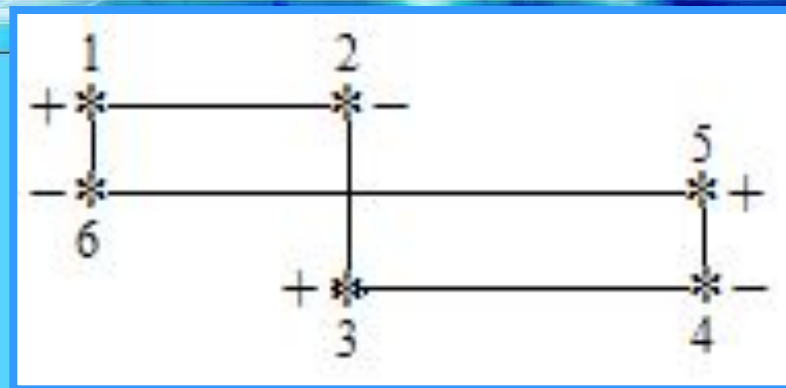
увеличение объемов перевозок

во всех нечетных клетках

цикла, отмеченных знаком «+»,

на  $\theta$  и уменьшение объемов перевозок во всех четных

клетках, отмеченных знаком «-», на  $\theta$ .



**Теорема.** Если таблица транспортной задачи содержит опорное решение, то при сдвиге по любому циклу, содержащему одну свободную клетку, на величину  $\theta = \min_{\text{"_"}} \{x_{ij}\}$  получится опорное решение.





# Метод потенциалов

**Теорема** (признак оптимальности опорного решения). Если допустимое решение  $X = (x_{ij})$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  транспортной задачи является оптимальным, то существуют потенциалы (числа) поставщиков  $u_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  и потребителей  $v_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие следующим условиям:

$$u_i + v_j = c_{ij} \text{ при } x_{ij} > 0,$$

$$u_i + v_j \leq c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0.$$

$$\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \text{ при } x_{ij} = 0$$

Опорное решение является **оптимальным**, если для всех векторов-условий (клеток таблицы) оценки неположительные.

# Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

$a_i$	$b_j$	60	70	110
150		6	10	4
90		12	2	8

$$\sum_{i=1}^2 a_i = 150 + 90 = 240$$

$$\sum_{j=1}^3 b_j = 60 + 70 + 110 = 240$$



# Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ 12 & 2 & 8 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$C = \begin{pmatrix} \textcircled{6} & 10 & \textcircled{4} \\ \textcircled{12} & \textcircled{2} & \textcircled{8} \end{pmatrix}$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10 70	4 110
90	12 20	2 70	8

$$Z(X_1) = 40 \cdot 6 + 110 \cdot 4 + 20 \cdot 12 + 70 \cdot 2 = 1060$$





# Решение транспортной задачи МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛОВ

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -4 \quad v_3 = 4$$

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 6, \\ u_1 + v_3 = 4, \\ u_2 + v_1 = 12, \\ u_2 + v_2 = 2. \end{cases} \quad \begin{matrix} u_1 = 0 \\ u_2 = 6 \end{matrix}$$

	$b_j$	60	70	110
$a_i$				
150		6	10	4
		40		110
90		12	2	8
		20	70	

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 - 4 - 10 = -14$$

$$\Delta_{23} = u_2 + v_3 - c_{23} = 6 + 4 - 8 = 2.$$



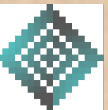
# Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -4 \quad v_3 = 4$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	6 40	10 —	4 110
90	12 20	2 70	8 2

$$u_1 = 0$$

$$u_2 = 6$$



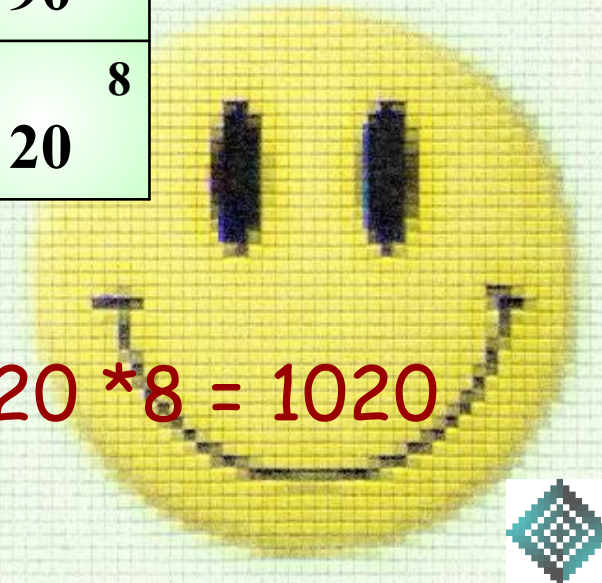


# Решение транспортной задачи методом потенциалов

$$v_1 = 6 \quad v_2 = -2 \quad v_3 = 4$$

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
$u_1 = 0$ 150	6 60	10 -	4 90
$u_2 = 4$ 90	12 -	2 70	8 20

$$Z(X_2) = 60 * 6 + 90 * 4 + 70 * 2 + 20 * 8 = 1020$$





App7.ico

# Решение транспортной задачи в среде Maple

- **standardize** – приведение заданной системы уравнений или неравенств к стандартной форме неравенств типа «меньше или равно».
- **minimize** - вычисление минимума функции;
- **simplify** (*expr*, *n1*, *n2*, ...) – возвращает упрощенное выражение *expr* с учетом параметров с именами *n1*, *n2*, ... (в том числе заданных списком или множеством);





App7.ico

# Решение транспортной задачи в среде Maple

$a_i$	$b_j$	60	70	110
150		6	10	4
90		12	2	8

Для решения транспортной задачи в программе Maple 7 имена ячеек должны быть указаны в виде x11, x12 и т.д.





# Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex):standardize({x11+x12+x13=150,x
21+x22+x23=90,x11+x21=60,x12+x22=70,x13+x23=
110});
```

```
{-x11 - x21 ≤ -60, -x11 - x12 - x13 ≤ -150, x11 + x21 ≤ 60, x11 + x12 + x13 ≤ 150,
-x21 - x22 - x23 ≤ -90, x21 + x22 + x23 ≤ 90, -x13 - x23 ≤ -110, x13 + x23 ≤ 110,
x12 + x22 ≤ 70, -x12 - x22 ≤ -70}
```

Conversions → Make into List.

```
[-x11-x21<=-60, -x11-x12-x13<=-150,
x11+x21<=60, x11+x12+x13<=150,
-x21-x22-x23<=-90, x21+x22+x23<=90,
-x13-x23<=-110, x13+x23<=110,
x12+x22<=70, -x12-x22<=-70];
```





App7.ico

# Решение транспортной задачи в среде Maple

```
with(simplex): minimize(6*x11+10*x12+4*x13+12*x21+2*x22+8*x23, {-x11-x21<=-60,
-x11-x12-x13<=-150, x11+x21<=60,
x11+x12+x13<=150, -x21-x22-x23<=-90,
x21+x22+x23<=90, -x13-x23<=-110,
x13+x23<=110, x12+x22 <=70, -x12-x22<=-70},
NONNEGATIVE);
{x13 = 90, x22 = 70, x23 = 20, x11 = 60, x12 = 0, x21 = 0}
```

```
simplify(6*x11+10*x12+4*x13+12*x21+2*x22+8*x23, [x13=90, x22=70, x23=20, x11=60, x12=0, x21=0]);
```

$a_i \backslash b_j$	60	70	110
150	60	-	90
90	-1020	2	8
	-70	20	







Огромное  
спасибо!!!

PLANET ARAKIS