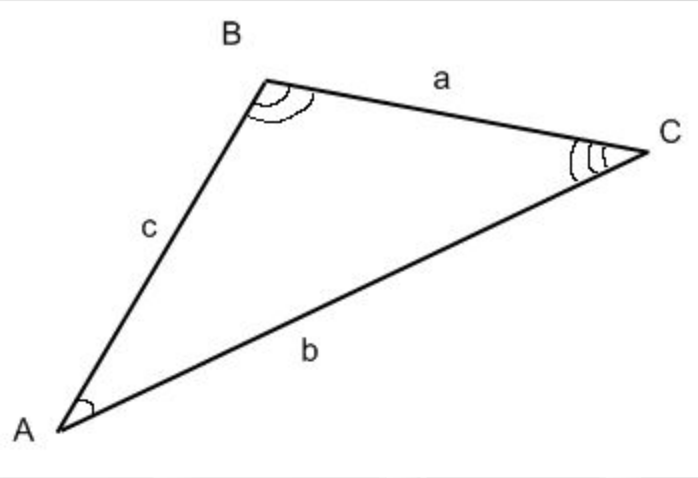
Тема: Решение треугольника.



1 $\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$

2 $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ - теорема косинусов.

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

3 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ где R – радиус описанной окружности.

$R = \frac{abc}{4S\Delta}$ $r = \frac{2S\Delta}{P}$,где P – периметр, r – радиус вписанной окружности.

<u>Площадь треугольника.</u>

<u>1.</u> $S\Delta = \frac{1}{2}ah_a$ $h_a = \frac{2S\Delta}{a}$

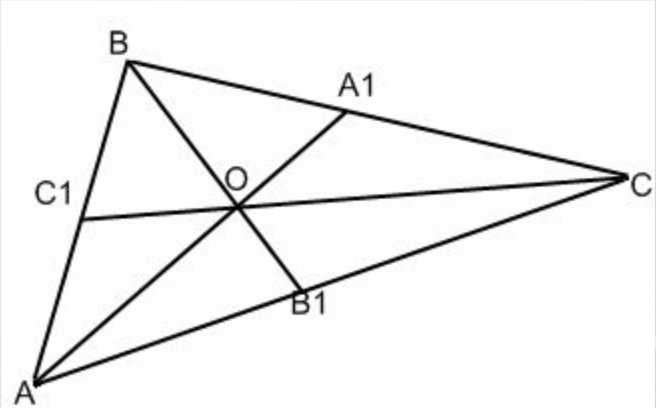
<u>2.</u> $S\Delta = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$

3. $S\Delta = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$, где $P = \frac{a+b+c}{2}$

<u>4.</u> $S\Delta = \frac{1}{2}\Pr$ $S\Delta = \frac{abc}{4R}$

5. $S\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ (если треугольник правильный).

Свойства медиан



<u>Свойства медиан.</u>

O – точка пересечения медиан.

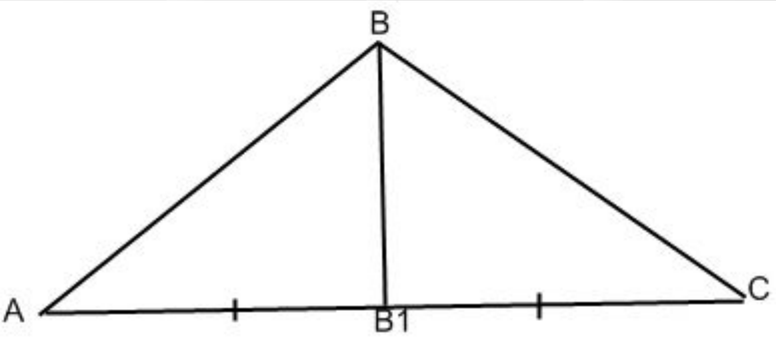
Тогда: $\frac{AO}{OA_1} = \frac{BO}{OB_1} = \frac{CO}{OC_1}$

$OC_1 = \frac{1}{2}OC \quad OC_1 = \frac{1}{3}CC_1$

m_a медиана к стороне a $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$

$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$

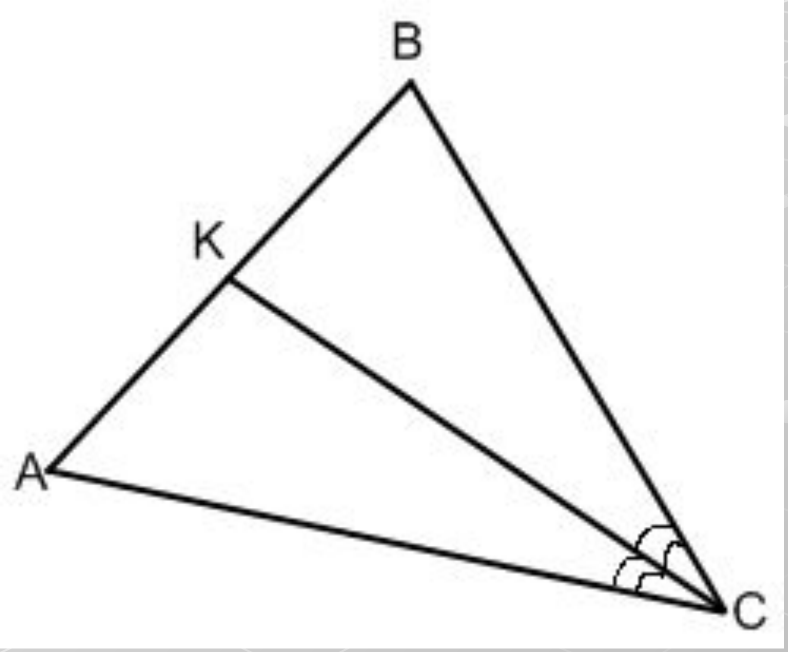
$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$



В любом треугольнике медиана делит его на два <u>равновеликих</u> треугольника т.е треугольники площади которых равны.

$S_{ABB_1} = S_{BCB_1}$

Биссектрисы треугольника.



<u>Биссектрисы треугольника.</u>

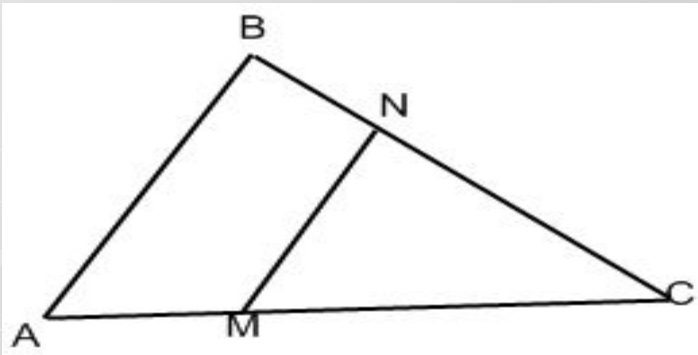
1.Точка пересечения биссектрис треугольника является центром вписанной окружности.

2.Биссектриса треугольника делит сторону на части, пропорциональные двум другим соответственным сторонам.

Если CK - биссектриса, то

$$\frac{AK}{AC} = \frac{KB}{BC}$$

Подобные треугольники.

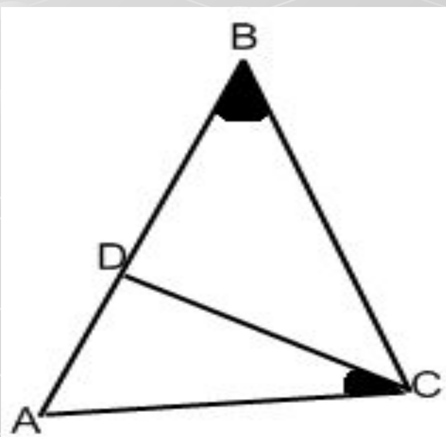


Подобные треугольники.

1.Прямая параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.

$$MN \parallel AB \quad \frac{MN}{AB} = \frac{CN}{BC} = \frac{MC}{AC} = k$$

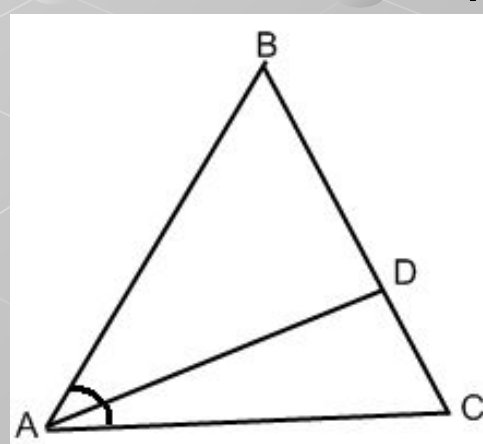
$$\Delta MNC \infty \Delta ABC \quad \frac{S_{NMC}}{S_{ABC}} = k^2 \quad \frac{P_{MNC}}{P_{ABC}} = k$$



2.Сходственные стороны лежат против равных

$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

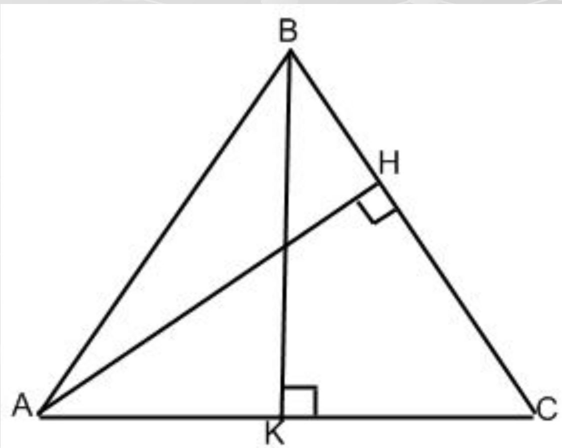
углов подобных треугольников.



3.Если AD биссектриса, т.е. $\angle ABD = \angle CAD$, то $\frac{S_{ABD}}{S_{ADC}} = \frac{AB}{AC}$

Задачи!

Задача 1.



Основание равнобедренного треугольникаравно30 см, а высота, проведённая из вершины основания 24 см. Найти S треугольника.

Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 30 BK = 15 BK$

1. ΔACH :

$$HC = \sqrt{AC^2 - AH^2} = \sqrt{30^2 - 24^2} = \sqrt{(30-24)(30+24)} = \sqrt{6 \cdot 54} = \sqrt{6 \cdot 6 \cdot 9} = 6 * 3 = 18$$

2. ΔKBC прямоугольный, т.к. BK – высота и медиана равнобедренного треугольника, то $KC = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} 30 = 15$

3. $\Delta AHC \infty \Delta BKC$

как прямоугольные с общим острым углом $\angle C$

Тогда: $\frac{BK}{AH} = \frac{KC}{HC} \Rightarrow BK \frac{AH \cdot KC}{HC} = \frac{24 \cdot 15}{18} = 20$

4. $S\Delta = 15 BK = 15 \cdot 20 = 300 (см^2)$

Ответ. $300 см^2$

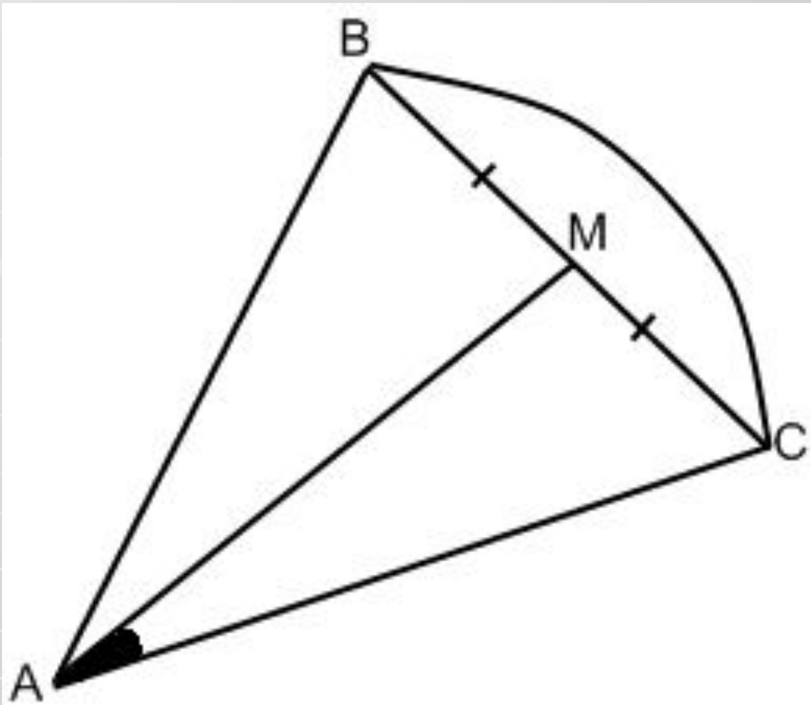
Задача 2.

В ΔABC

проведена медиана AM

Найти S_{ABC}

если $AC = 3\sqrt{2}$ $BC = 10$ $\angle MAC = 45^0$



Решение: $S_{ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC \sin C$

$\Delta AMC : MC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} 10 = 5$

По теореме косинусов:

$MC^2 = AC^2 + AM^2 - 2AC \cdot AM \cos 45^0$

$5^2 = (3\sqrt{2})^2 + AM^2 - 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot AM \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$

$25 = 18 + AM^2 - 6AM$

$AM^2 - 6AM - 7 = 0$

$AM = \chi,$

$\chi > 0$

$\chi^2 - 6\chi - 7 = 0$

$\chi_1 = 7, \chi_2 = -1$

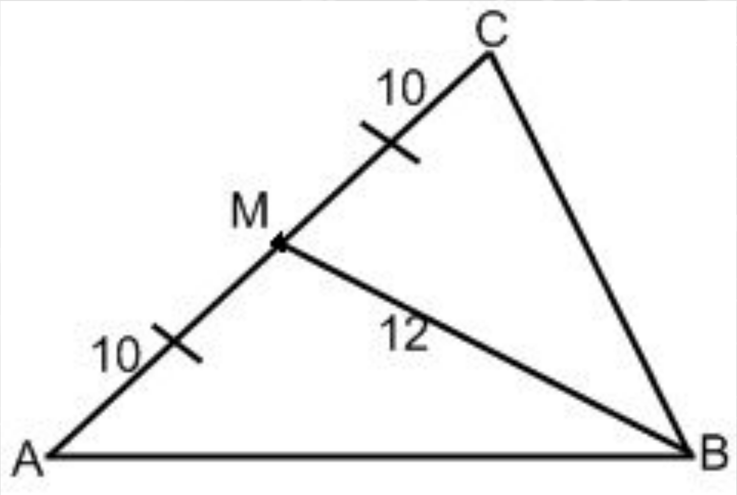
$\chi_2 = -1$ посторонний корень, т.е. не удовлетворяет смыслу задачи.

AM=7, $\frac{AM}{\sin C} = \frac{MC}{\sin 45^0},$

$$\sin C = \frac{AM \sin 45^0}{MC} = \frac{7 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

Тогда $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 3 \cdot 7 = 21$

Ответ. 21



Задача 3.

Найти площадь треугольника, если $AC = 20$ $BC = 2\sqrt{97}$, а медиана $BM = 12$

Решение: ВМ – медиана, значит АМ=МС=10.

Медиана делит ΔABC

на два равнобедренных

треугольника

Значит $S_{ABC} = S_{BMC}$

Тогда $S_{ABC} = 2S_{MBC}$

$$S_{MBC} = P\sqrt{P(P-MC)(P-BC)(P-MB)}$$

$$P = \frac{MC+MB+BC}{2} = \frac{10+12+2\sqrt{97}}{2} = 11+\sqrt{97}$$

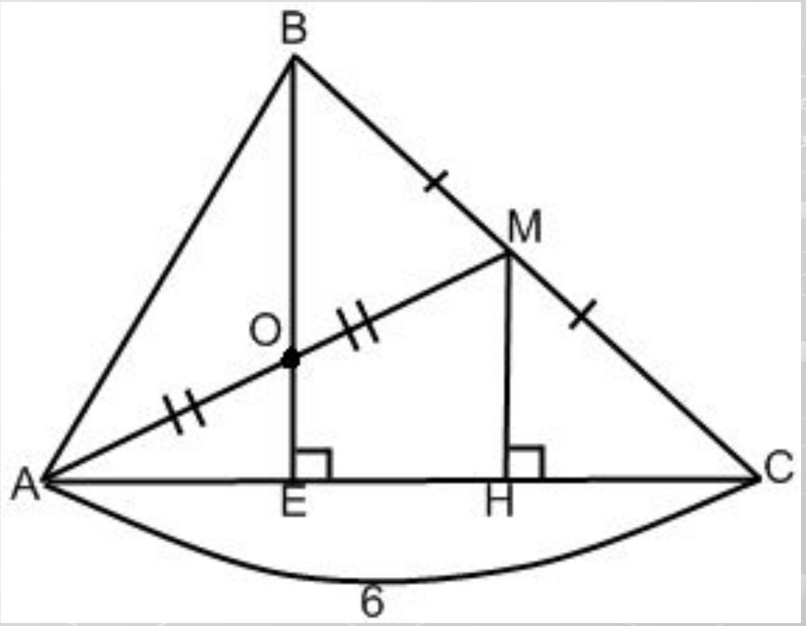
$$S_{MBC} = \sqrt{(11+\sqrt{97})(11+\sqrt{97}-10)(11+\sqrt{97}-12)(11+\sqrt{97}-2\sqrt{97})} =$$

$$= \sqrt{(11+\sqrt{97})(1+\sqrt{97})(\sqrt{97}-1)(11-\sqrt{97})} = \sqrt{(121-97)(97-1)} =$$

$$= \sqrt{24\cdot 96} = \sqrt{6\cdot 4\cdot 6\cdot 16} = 2\cdot 6\cdot 4 = 48$$

$$S_{ABC} = 2\cdot 48 = 96$$

Ответ. 96



Задача 4.

Длина основания АС треугольника АВС равна 6, медиана АМ=5. Высота ВЕ делит медиану АМ пополам. Найти S_{ABC}

АМ – медиана, следовательно $S_{ABM} = S_{AMC}$

, значит $S_{ABC} = 2S_{AMC}$

$S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot MH$

ΔBEC - прямоугольный $MH \parallel AC$ и $BE \parallel AC$

следовательно $MH \parallel BE$,

так как М – середина ВС, то по теореме Фалеса Н – середина ЕС значит $MH = \frac{1}{2} BE$

(по свойству средней линии).

Так как АО=ОМ – по условию, АЕ=ЕН.

Значит, $AE = EH = HC = \frac{1}{3} AC = \frac{1}{3} \cdot 6 = 2$

ΔAMH АН=4, АМ=5, $MH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$

$S_{ABC} = 2S_{AMC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3 = 18$

Ответ. 18

Самостоятельно

Решить самостоятельно:

1.В треугольнике ABC проведена медиана AM.

Найти: S_{ABC} если $AC = 3\sqrt{2}$ $BC = 10$ $\angle MAC = 45^0$

Ответ. 21

2.В треугольнике ABC проведена биссектриса BK, длина которой равна 4, причём

$KC = 2\sqrt{2}$ $\angle BCA = 45^0$

Найти S_{ABK}

Ответ. 4

3.В равнобедренном треугольнике ABC (AB=BC) проведена биссектриса AD. $S_{ABD} = 3\sqrt{35}$

$S_{ADC} = \sqrt{35}$ Найти AC.

Ответ. AC=4.

4.Точка M лежит на стороне AO треугольника

AOM, $AH = 4, OH = 12, \angle A = 30^0, \angle AMH = \angle AOM$

Найти. S_{AMH}

Ответ. 8

5.В треугольнике ABC AB=BC=15, CA=24.

Найти расстояние между точкой пересечения серединных перпендикуляров и точкой пересечения

медиан треугольника.

Ответ. 44