

Решение тригонометрических уравнений

$$a \sin x + b \cos x = c$$

*Мишурова Любовь Александровна,
учитель математики*

*Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 2»*



Цели урока:

- Создания условий для осознанного усвоения решения тригонометрических уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$.
- Формирование навыков самоконтроля и взаимоконтроля, алгоритмической культуры учащихся.
- Развитие устной математической речи. Обеспечение условий для развития умения решать тригонометрические уравнения, совершенствовать мыслительные умения старшеклассников сравнивать, обобщать и анализировать, развития навыков обработки информации.
- Развитие коммуникативных умений делового общения сверстников. Воспитание аккуратности.



Проверка домашнего задания

$$\sin 7x - \sin x = \cos 4x$$



Решение.

$$\begin{aligned}\sin 7x - \sin x &= \cos 4x, \\ 2\sin 3x \cos 4x - \cos 4x &= 0, \\ \cos 4x (2\sin 3x - 1) &= 0, \\ \cos 4x = 0 \text{ или } 2\cos 3x - 1 &= 0 \\ \cos 4x &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4x &= \pi/2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \\ X &= \pi/8 + \pi n/4, n \in \mathbb{Z},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 3x &= 1/2, \\ 3x &= \pm \arccos 1/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ 3x &= \pm \pi/3 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ X &= \pm \pi/9 + 2/3\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

$$\text{Ответ: } X = \pi/8 + \pi n/4, X = \pm \pi/9 + 2/3\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$$



Решение.

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x,$$

$$-(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos 4x,$$

$$-\cos 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x,$$

$$-\cos 2x = \cos^2 2x - (1 - \cos^2 2x),$$

$$-\cos 2x - \cos^2 2x + 1 - \cos^2 2x = 0,$$

$$-2\cos^2 2x - \cos 2x + 1 = 0,$$

$$2\cos^2 2x + \cos 2x - 1 = 0.$$

Заменим $\cos 2x$ на Y , где $|Y| \leq 1$

$$\text{Тогда } 2y^2 + y - 1 = 0,$$

$$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9,$$

$$Y = 1/2, \quad y = -1.$$

Выполним обратную замену

$$\cos 2x = 1/2,$$

$$2x = \pm \arccos 1/2 = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$2x = \pm \pi/3 + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$X = \pm \pi/6 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos 2x = -1,$$

$$2x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $X = \pm \pi/6 + \pi n, \quad x = \pi/2 + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$

Решение уравнений учащимися

- №628 (1)
- №628 (3)
- №629 (2)



$$\cos x = a, \text{ где } |a| \leq 1$$



$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$



$$\sin X = a, \text{ где } |a| \leq 1$$



$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$



$$\operatorname{tg} x = a, \text{ где } a \in \mathbb{R}$$



$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,$$
$$n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$$



$$\cos x = 0$$



$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = 1$$



$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\cos x = -1$$



$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 0$$



$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = 1$$



$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



$$\sin x = -1$$



$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Решить уравнение

- $4\sin^2x - 4\sin x - 3 = 0$
- $2\cos^2x - \sin x - 1 = 0$



ОТВЕТЫ.

- $4\sin^2x - 4\sin x - 3 = 0$
- $(-1)^{n+1} \pi/6 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

- $2\cos^2x - \sin x - 1 = 0$
- $\pm\pi/6 + \pi n; -\pi/2 + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$



Уравнения:

$$\sin^2 x = \frac{1}{3};$$

$$\cos^2 x = -\frac{1}{4}.$$



Уравнение

$$2 \sin x - 3 \cos x = 0$$



Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2\operatorname{tg}x - 3 = 0$, $\operatorname{tg}x = \frac{3}{2}$, $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

При решении этой задачи обе части уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ были поделены на $\cos x$.

Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$ где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Уравнение $2 \sin x + \cos x = 2$.

Используя формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$, $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$ и

записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2 \cdot 1 = 2(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2})$

получаем $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$,

$3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$. Поделив это уравнение на $\cos^2 \frac{x}{2}$

получим равносильное уравнение $3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$.

Обозначая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$, получаем $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.



$2 \sin x + \cos x = 2$

Данное уравнение является уравнением вида $a \sin x + b \cos x = c$,

(1)

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом. Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(2)

Введем вспомогательный аргумент φ , такой, что

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Такое число существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

$$\sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением.



Решить уравнение

$$4 \sin x + 3 \cos x = 5.$$



Решить уравнение $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

Здесь $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент φ , такой, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}$ $\sin \varphi = \frac{3}{5}$

Исходное уравнение можно записать в виде

$$\begin{aligned} \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi &= 1 \\ \sin(x + \varphi) &= 1 \end{aligned}$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5}$, $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.