Решение тригонометрических уравнений

$$a\sin x + b\cos x = c$$

Мишурова Любовь Александровна,
учитель математики
Муниципальное общеобразовательное учреждение
«Средняя общеобразовательная школа № 2»

Цели урока:

- Создания условий для осознанного усвоения решения тригонометрических уравнений вида

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

- Формирование навыков самоконтроля и взаимоконтроля, алгоритмической культуры учащихся.
- Развитие устной математической речи. Обеспечение условий для развития умения решать тригонометрические уравнения, совершенствовать мыслительные умения старшеклассников: сравнивать, обобщать и анализировать, развития навыков обработки информации.
- Развитие коммуникативных умений делового общения сверстников. Воспитание аккуратности.

Проверка домашнего задания

$\sin 7x - \sin x = \cos 4x$

Решение.

sin7x – sin x =cos4x,
2sin3x cos4x - cos4x =0,
cos4x (2sin3x – 1)=0,
cos4x=0 или 2cos3x -1 =0
cos4x=0
4x =П/2+Пn, n € Z;
X=П/8 +Пn/4, n € Z,

cos3x =1/2,
3x =±arccos1/2 +2Пn, n
3x =±П/3 +2Пn, n € Z,
X =±П/9 + 2/3Пn, n € Z.

Ответ: X=П/8 +Пn/4, X =±П/9 = 2/3Пn, n € Z

Решить уравнение

$$\sin^2 x - \cos^2 x = \cos 4x$$

Решение.

$\sin^2x - \cos^2x = \cos4x$,
$-(\cos^2 - \sin^2x) = \cos4x$,
$-\cos2x = \cos^22x - \sin^22x$,
$-\cos2x = \cos^22x - (1 - \cos^22x)$,
$-\cos2x - \cos^22x + 1 - \cos^22x = 0$,
$-2\cos^22x - \cos2x + 1 = 0$,
$2\cos^22x + \cos2x - 1 = 0$.
Заменим cos2x на У , где $|У| \leq 1$
Тогда $2y^2 + y - 1 = 0$,
$D = 1 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 9$,
$У = 1/2$, $y = -1$.
Выполним обратную замену

$\cos2x = 1/2$,
$2x = \pm\arccos1/2 = 2Пn$, $n \in Z$,
$2x \pm П/3 + 2Пn$. $n \in Z$,
$X = \pm П/6 + Пn$, $n \in Z$.

$\cos2x = -1$,
$2x = П + 2Пn$, $n \in Z$,
$x = П/2 + Пn$, $n \in Z$.

Ответ: $X = \pm П/6 + Пn$, $x = П/2 + Пn$, $n \in Z$.

Решение уравнений учащимися

- №628 (1)
- №628 (3)
- №629 (2)

$$\cos x = a, \text{ где } |a| \leq 1$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in Z$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$$

sin x = a, где $|a| \le 1$

$$x=(-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in Z$$

$$\arcsin(-a) = -\arcsin a$$

$\mathbf{tg\ x = a}$, где $a \in R$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\quad n \in Z$$

$$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, \; n \in Z$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Решить уравнение

- $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$
- $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$

Ответы.

- $4\sin^2 x - 4\sin x - 3 = 0$
- $(-1)^{n+1}\,\Pi/6 + \Pi n,\ n \in Z.$

- $2\cos^2 x - \sin x - 1 = 0$
- $\pm\Pi/6 + \Pi n; \quad -\Pi/2 + 2\Pi n,\ n \in Z.$

Уравнения:

$$\sin^2 x = \frac{1}{3};$$

$$\cos^2 x = -\frac{1}{4}.$$

Уравнение

$$2\sin x - 3\cos x = 0$$

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Уравнение $2\sin x - 3\cos x = 0$.

Поделив уравнение на $\cos x$, получим $2tgx - 3 = 0$, $tgx = \frac{3}{2}$, $x = arctg\frac{3}{2} + \pi n, n \in Z$.

При решении этой задачи обе части уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ были поделены на $\cos x$.

Напомним, что при делении уравнения на выражение, содержащее неизвестное, могут быть потеряны корни. Поэтому нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями данного уравнения. Если $\cos x = 0$, то из уравнения $2\sin x - 3\cos x = 0$ следует, что $\sin x = 0$. Однако $\sin x$ и $\cos x$ не могут одновременно равняться нулю, так как они связаны равенством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Следовательно, при делении уравнения $a\sin x + b\cos x = 0$ где $a \neq 0$, $b \neq 0$, на $\cos x$ (или $\sin x$) получаем уравнение, равносильное данному.

Уравнение $2\sin x + \cos x = 2$.

Используя формулы **sin x = 2 sin** $\frac{x}{2}$**cos** $\frac{x}{2}$, **cos x = cos²** $\frac{x}{2}$ **- sin²** $\frac{x}{2}$ и

записывая правую часть уравнения в виде $2 = 2\cdot 1 = 2(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2})$

получаем $4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{2}$,

$3\sin^2\frac{x}{2} - 4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 0.$ Поделив это уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$,

получим равносильное уравнение $3tg^2\frac{x}{2} - 4tg\frac{x}{2} + 1 = 0.$

Обозначая $tg\frac{x}{2} = y$, получаем $3y^2 - 4y + 1 = 0$, откуда $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}$.

1) $tg\frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \ \frac{x}{2} = arctg\frac{1}{3} + \pi n, \ x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

2) $tg\frac{x}{2} = 1, \ \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ \ x = 2arctg\frac{1}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

$$2\sin x + \cos x = 2$$

Данное уравнение является уравнением
вида $a\sin x + b\cos x = c$, (1)

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, которое можно решить другим способом.
Разделим обе части этого уравнения на $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \qquad (2)$$

Введем вспомогательный аргумент φ , такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Такое число существует, так как

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$$

Таким образом, уравнение можно записать в виде

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Последнее уравнение является простейшим тригонометрическим уравнением.

Решить уравнение

$$4\sin x + 3\cos x = 5.$$

Решить уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5.$

Здесь $a = 4,\ b = 3,\ c = 5,\ \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Поделим обе части уравнения на 5:

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1.$$

Введем вспомогательный аргумент φ, такой, что $\cos\varphi = \frac{4}{5},\quad \sin\varphi = \frac{3}{5}$

Исходное уравнение можно записать в виде

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = 1$$

$$\sin(x + \varphi) = 1$$

откуда $x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ где\ \varphi = \arccos\frac{4}{5},\ x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n,\ n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{5} + 2\pi n, n \in \mathrm{Z}.$