

Решение тригонометрических уравнений , содержащих радикалы



Курылева С.С., учитель
математики МОУ «Лицей №1» г.
Воркуты

Эпиграф:

*Три пути ведут к знанию:
путь размышления – это путь
самый благородный, путь
подражания – это путь самый
легкий и путь опыта – это путь
самый горький.*

Конфуций

Задачи на урок:

- совершенствовать навыки решения тригонометрических уравнений различными способами;
- продолжить формирование умений применять различные способы отбора корней в тригонометрических уравнениях;
- Развивать познавательный интерес, интеллектуальные способности.

Решение простейших тригонометрических уравнений

$$\sin x = a$$
$$a \in [-1; 1]$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
$$x = \begin{cases} \arcsin a + 2\pi n, \\ \pi - \arcsin a + 2\pi n. \end{cases}$$

$$\cos x = a$$
$$a \in [-1; 1]$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
$$x = \begin{cases} \arccos a + 2\pi n, \\ -\arccos a + 2\pi n. \end{cases}$$

$$\operatorname{tg} x = a$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$
$$x = \begin{cases} \operatorname{arctg} a + 2\pi n, \\ \pi + \operatorname{arctg} a + 2\pi n. \end{cases}$$

Частные случаи записи

решения

$$\sin x = a$$

уравнения

$$a = 0 \quad x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$a = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$a = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Частные случаи записи решения уравнения $\cos x = a$

$$a = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in N$$

$$a = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in N$$

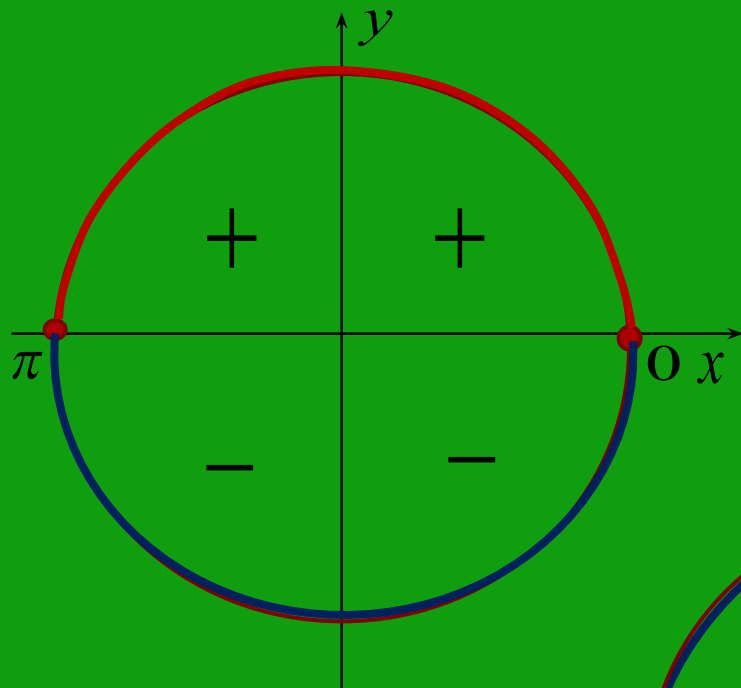
$$a = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in N$$

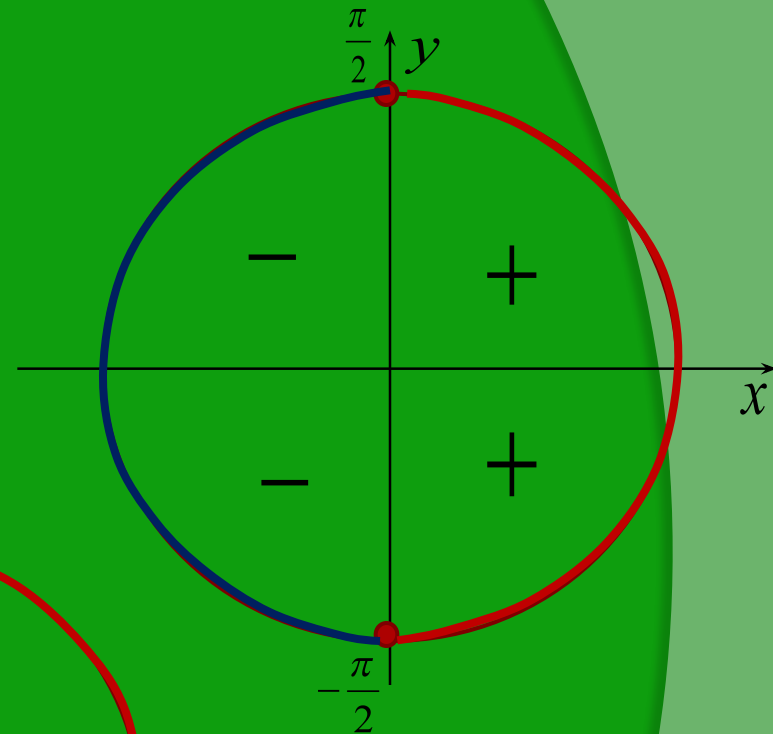
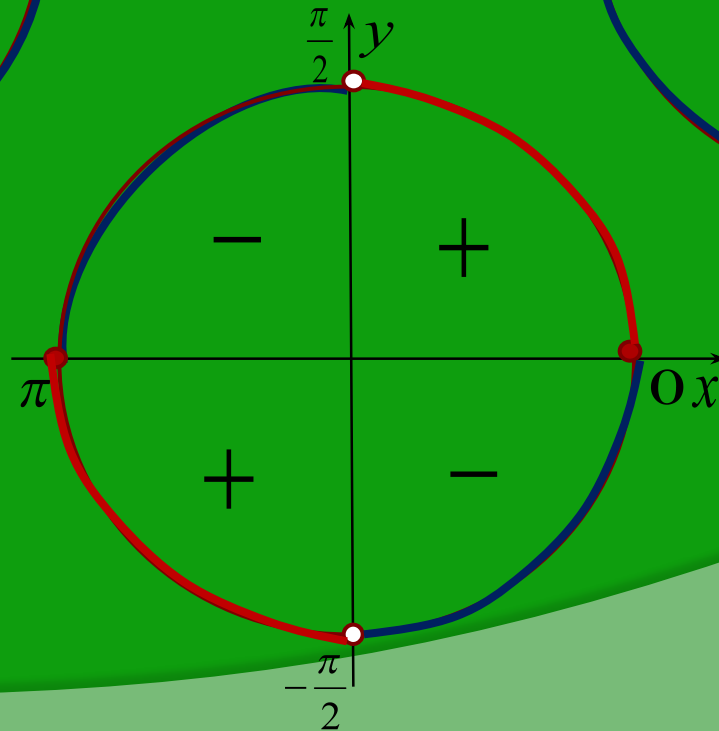
Решение неравенств вида

$$\sin x \vee 0$$

$$\cos x \vee 0$$

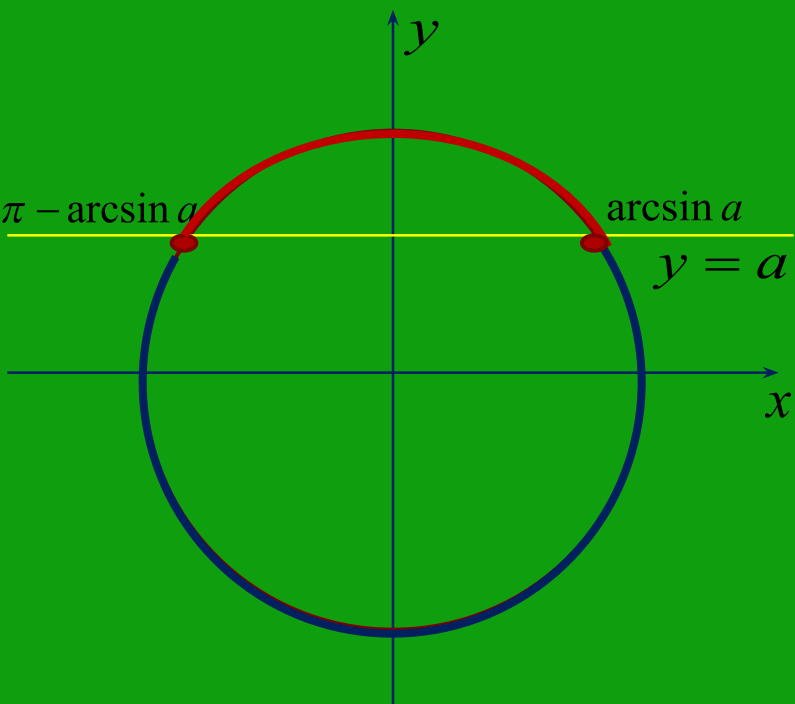


$$\operatorname{tg} x \vee 0$$

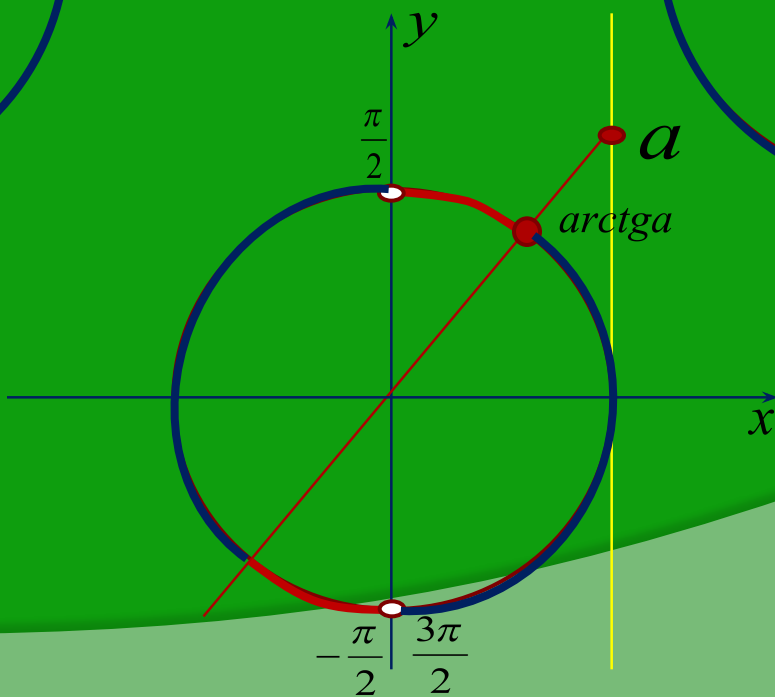


Решение неравенств вида

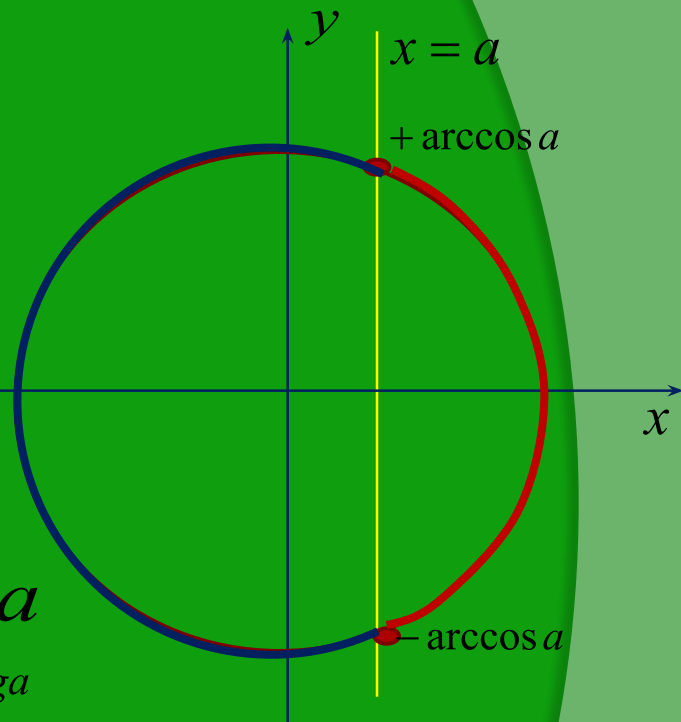
$$\sin x \vee a$$



$$\operatorname{tg} x \vee a$$



$$\cos x \vee a$$



Решение некоторых иррациональных уравнений

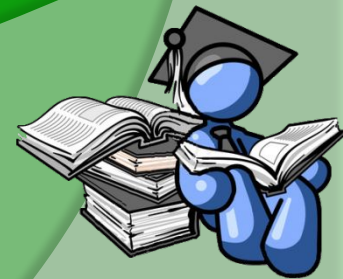
$$\sqrt{f(x)} = \varphi(x)$$

$$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) = 0$$

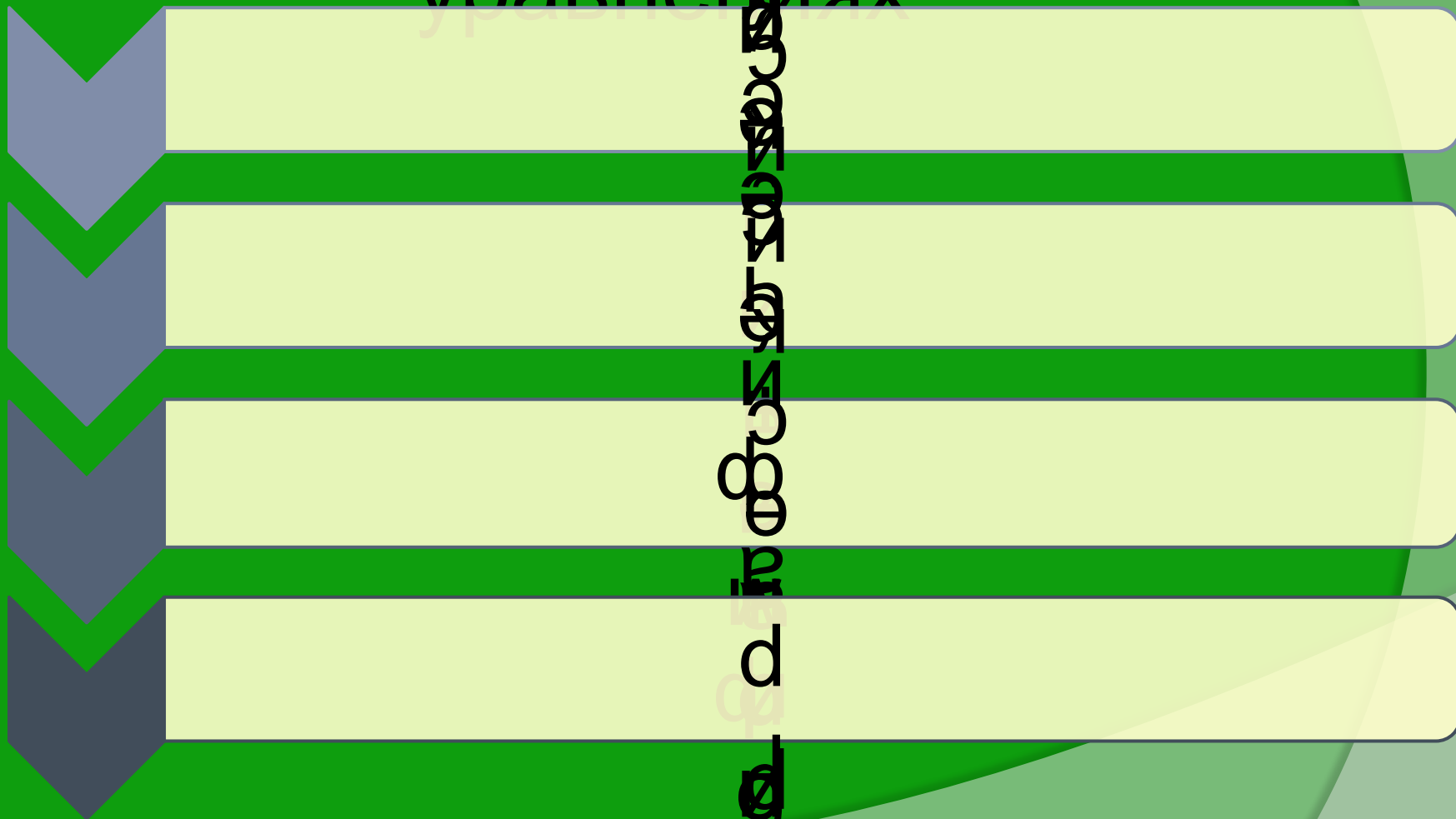
$$\begin{cases} f(x) = \varphi^2(x) \\ \varphi(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \text{ определена} \\ g(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$$

Область определения функции $\sqrt[n]{f(x)}$
находим из условия $f(x) \geq 0$



Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях



Арифметический способ

Данный способ отбора корней связан с вычислением корней при переборе значений целочисленного параметра или нахождением значений тригонометрических выражений непосредственной подстановкой при отборе корней.



Непосредственная

подстановка

В случае непосредственной подстановки серий полученных решений для удаления «посторонних» решений полезно использование формул приведения.

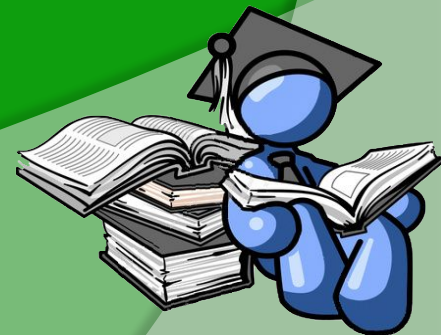
В частности,

$$\sin(x + \pi k) = \begin{cases} \sin x & \text{при } k = 2n, \\ -\sin x & \text{при } k = 2n + 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(x + \pi k) = \begin{cases} \cos x & \text{при } k = 2n, \\ -\cos x & \text{при } k = 2n + 1, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg}x, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg}x, \quad x \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$



Алгебраический способ

Применяется если

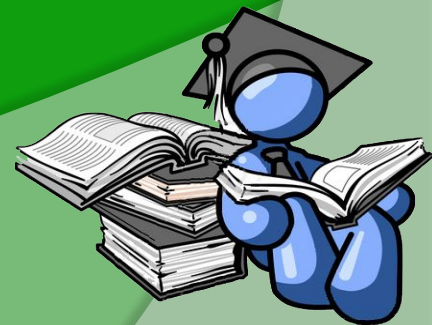
- заданные ограничения охватывают большой промежуток, а последовательный перебор значений параметров приводит к громоздким вычислениям;
- серии решений содержат нетабличные значения обратных тригонометрических функций;
- требуется определить количество корней уравнения, удовлетворяющих дополнительным условиям.



Тригонометрическая окружность

Удобно использовать

- при отборе корней на промежутке длина которого не превосходит π ;
- в случае, когда значения обратных тригонометрических функций, входящих в серию решений, не являются табличными.



Основные методы решения тригонометрических уравнений:

- разложение на множители;
- способ замены;
- сведение к уравнениям, однородным относительно $\sin x$ и $\cos x$;
- преобразование суммы тригонометрических функций в произведение;
- преобразование произведения тригонометрических функций в сумму;
- использование формул понижения степени;
- равенство одноименных тригонометрических функций;
- введение вспомогательного аргумента.

Тренировочные упражнения

Решите уравнения:

Уравнение $1\sqrt{1 - \cos 2x} = \sin 2x$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n; \pi n; n \in \mathbb{Z}$

Уравнение $2\left(2\sqrt{3}\cos^2 x - 2\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) \cdot \sqrt{7x - x^2} = 0$

Ответ: $0; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{3}; 7$

Уравнение $3\frac{2\cos x - \sqrt{3}}{\sqrt{1 - 2\sin x}} = 0$

Ответ: $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Проверь себя

Самостоятельная работа

I
вариант

$$\left(2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1\right) \sqrt{25 - 4x^2} = 0$$

$$(6 \sin^2 x - 11 \sin x + 4) \sqrt{-3 \operatorname{tg} x} = 0$$

II
вариант

$$\left(1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}\right) \sqrt{9 - 4x^2} = 0$$

$$(2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3) \sqrt{-2 \operatorname{tg} x} = 0$$

III
вариант

$$\sqrt{2 \cos x + 3} = 2, \quad \text{если} \quad \operatorname{tg} x \leq 0$$

$$(2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2) \sqrt{\cos x} = 0$$

Проверь себя!!!

I
вариант

$$\pm \frac{\pi}{2}; \pm \frac{5}{2};$$
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

II
вариант

$$\pm \frac{3}{2}$$
$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

III
вариант

$$\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$
$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Спасибо за

урок!

УДАЧИ

НА ЕЕГЭ !!!