4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ

Древняя задача.

4.1. Предварительные сведения

Выбор метода и алгоритма решения уравнений зависит от их типа.

Классификация уравнений

УРАВНЕНИЯ

Одно уравнение **Система уравнений**

линейное **нелинейное** **линейная** **нелинейная**

тривиально

алгебраическое трансцендентное

Методы решения уравнений

- прямые;
- итерационные

Прямые методы:

Позволяют найти решение непосредственно с помощью формул.

Обеспечивают точное (без погрешностей метода) решение.

Итерационные методы:

Процедура решения задается в виде многократного применения некоторого алгоритма.

Полученное решение всегда является приближенным.

Пример. $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$

решение

$$x1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

$$x2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$$

4.2. Решение одного уравнения

Функция f(x) предполагается непрерывной или дифференцируемой.

Решить уравнение $f(x) = 0$, (1)

с неизвестным **x** - значит найти такие значения x, которые удовлетворяют этому уравнению. Эти значения называются **корнями уравнения.**

Корни могут быть **действительными** или **комплексными**.

Решение можно проверить подстановкой.

Решение задачи (1) обычно **выполняется в несколько этапов:**

1 этап ⇒ **2 этап** ⇒ **3 этап**

1 этап: Исследование количества, характера и расположения корней;

2 этап: Выбор приближенного значения интересующего нас корня;

3 этап: Вычисление этого корня с требуемой точностью.

Локализация корня (1 и 2 этапы)

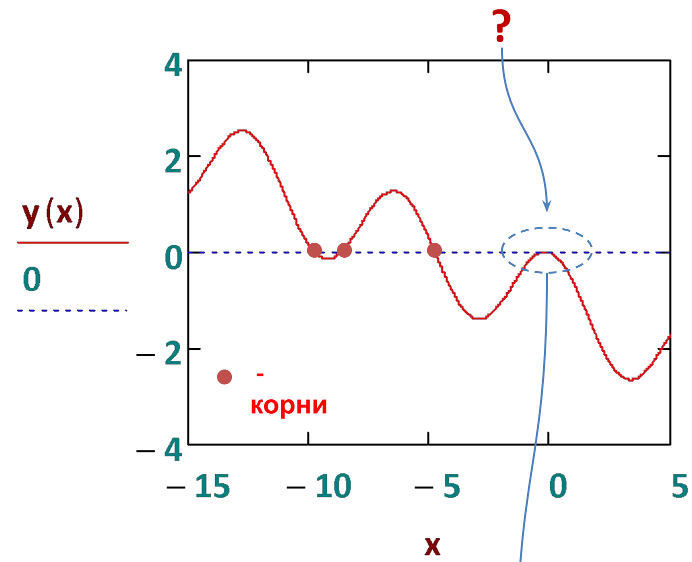
Локализация корней

Первые два этапа удобно проводить графически.

Например, рассмотрим уравнение

$$\cos(x) - 0.2 \cdot x - 1 = 0$$

графи к



Корней много: 3+?

Видим, что есть 5 вещественных корней.

<u>Приблизительные значения:</u>

x1= -10

x2= - 9

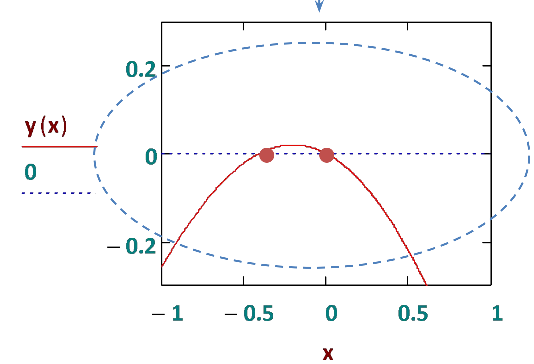
x3= - 5

x4= - 0.5

x5= 0

Эти значения – начальные приближения для итерационных методов.

увеличиваем – видим еще 2 корня



нелинейные уравнения

алгебраические уравнения

$$\boxed{a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot x + a_0 = 0} \qquad n \ge 2$$

В математике хорошо изучено.
Оно имеет n корней, включая кратные и комплексные.

Например: $a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0$

Одно уравнение

линейное **нелинейное**

алгебраическое
трансцендентное

трансцендентные уравнения

Это **уравнения**, в которых **неизвестное входит в аргумент трансцендентных функций**.
Нет общей теории.
Обычно заранее неизвестно, есть ли решение и сколько корней.

Например: $\cos(x) - x = 0$

$$a^x + \ln(x) = 0$$

итерационные методы решения

Методы решения
- прямые;
- итерационные

Решение нелинейных уравнений, как правило, проводится итерационными методами.

1 этап ⟹ **2 этап** ⟹ **3 этап**

1 этап: Исследование количества, характера и расположения корней;

2 этап: Выбор приближенного значения интересующего нас корня;

Локализация корня

3 этап: Вычисление этого корня с требуемой точностью.

итерационный метод

Третий этап:

Проводится численно. Обычно задается некоторое грубое начальное приближение корня, которое шаг за шагом уточняется соответствующим итерационным методом.

Каждый **такой шаг называется итерацией**.

начальное приближение

$$x_0 \to x_1 \to x_2 \to \dots$$

MathCAD итерации

Сходимость итерационного метода

начальное приближение $\rightarrow \boxed{x_0} \rightarrow x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots$

сходимость обычно проверяют условием $\rightarrow \left|x_{i+1} - x_i\right| \leq \varepsilon$

Если в ходе итераций получаются все более точные значения корня, то говорят, что метод сходится.

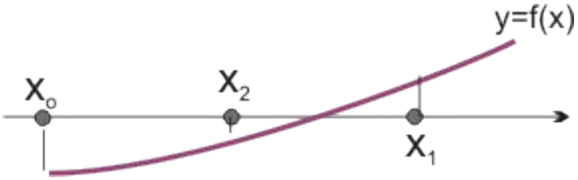
Если итерационный **метод не сходится**, то это может быть вызвано следующими причинами:

1. **отсутствием решения**;
2. выбором **неудачного начального приближения**;
3. **непригодностью используемого метода** к решению данной задачи.

Итерационных методов много.
Мы рассмотрим:

1. **метод бисекции** (деления пополам);
2. **метод Ньютона-Рафсона**.

метод половинного деления (бисекция)



Рассмотрим некоторое уравнение $f(x) = 0$

1 шаг. Находим некоторый отрезок **[xo, x1]**, на котором функция **f(x)** меняет знак, т.е.

$$f(x_0) \cdot f(x_1) \le 0$$

2шаг. Делим отрезок **[xo, x1]** пополам, находим его середину $x_2 = \dfrac{x_0 + x_1}{2}$

Из двух половинок выбираем ту, в которой функция меняет знак, $f(x_2) \cdot f(x_{gr}) \le 0$

3 шаг. Повторяем предыдущий шаг для нового отрезка.

Когда остановить итерации?

Если требуется найти корень с точностью , то итерации продолжаются до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше

достоинства метода

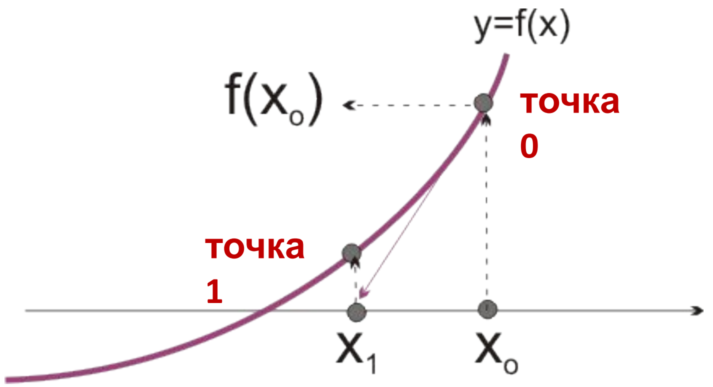
- всегда сходится;
- не требует гладкости функции;

недостатки метода

- медленная сходимость;
- не распространяется на системы уравнений;

метод Ньютона – Рафсона

(метод касательной)



1) Задается некоторое **начальное приближение** $\mathbf{x_o}$ и находится соответствующее значение $\mathbf{f(x_0)}$ – точка 0;
2) Из точки О **проводится касательная** к функции и находится следующая точка – $\mathbf{x_1}$;
3) Для точки $\mathbf{x_1}$ получаем $\mathbf{f(x_1)}$ – точку 1. Из нее снова проводим касательную и т.д.

Итерационный процесс описывается соотношением:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Заканчивается, если достигнуто условие:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \varepsilon$$

<u>достоинства метода</u>

- **быстрая сходимость;**
- **распространяется на системы уравнений;**
- **можно находить комплексные корни.**

<u>недостатки метода</u>

- **требует гладкости функции;**
- **не всегда сходится (требует хорошего начального приближения);**

решение уравнений в MathCAD

Алгебраические уравнения. Если задан полином n степени,

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n = 0$$

то для нахождения его корней (включая комплексные) можно использовать **стандартную функцию** polyroots(V) , которая возвращает вектор решений данного полинома.

Задача №1. Найти корни уравнения $x^3 - 10 \cdot x + 2 = 0$.

Решение:

Задаем вектор коэффициентов уравнения:

$$V := \begin{pmatrix} 2 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(в обратном порядке)

Используем функцию **polyroots**

$$x := \text{polyroots}(V) \qquad x = \begin{pmatrix} -3.258 \\ 0.201 \\ 3.057 \end{pmatrix}$$

решение – вектор из 3-х корней

Проверка:

$$x^3 - 10 \cdot x + 2 = \begin{pmatrix} 5.358 \times 10^{-10} \\ 5.358 \times 10^{-10} \\ 5.358 \times 10^{-10} \end{pmatrix}$$

ненулевые значения получаются из-за приближенности решения

Demo MathCAD (одно уравнение)

Уравнения любого типа. Решение одного уравнения любого типа дается стандартной функцией **root()**, которая имеет **2 формы**:

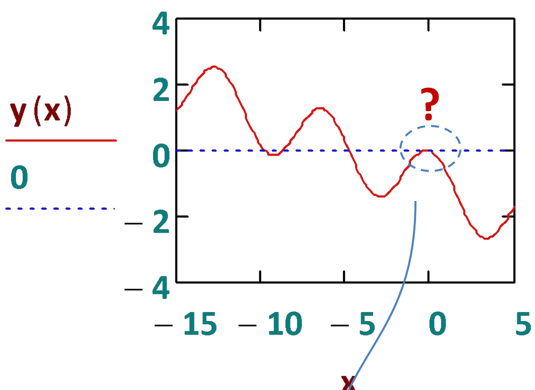
root(∎)

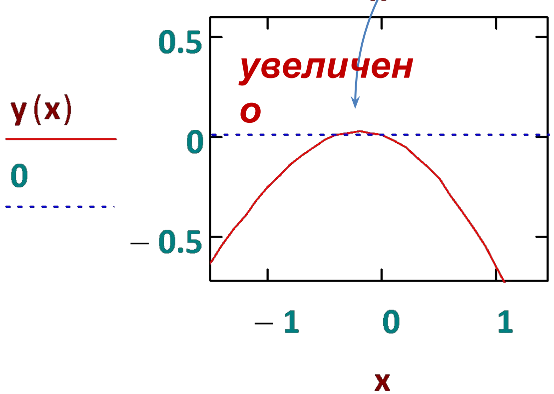
root(f(x) , x) — задается начальное приближение **x** и получаем решение.

root(f(x) , x , a , b) — задается интервал [a, b], на котором ищется решение. **При этом должны выполняться условия: 1) b>a;**
2) f(a) f(b) <0.
Начальное приближение для x не требуется.

Задача №2. Найти корни трансцендентного уравнения

$$\cos(x) - 0.2 \cdot x - 1 = 0$$





начальное приближение   решение

$x := -1 \qquad \mathrm{root}(y(x), x) = -0.406$

$x := 1 \qquad \mathrm{root}(y(x), x) = 5.309 \times 10^{-10}$

Demo MathCAD (одно уравнение)

4.3. Решение систем линейных уравнений

Часто встречается на практике:
системы из десятков и сотен уравнений.

Система уравнений

линейная нелинейная

Система **n** уравнений с **n** неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + \ldots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + \ldots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + \ldots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$$

матричная форма

$$\boxed{A\cdot X = B}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Для матрицы A можно рассчитать определитель $\det(A)$

$\det(A) = 0$

решения нет

не рассматриваем

$\det(A) \neq 0$

решение единственно

геометрическая интерпретация

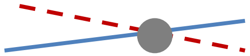
В случае системы 2-х уравнений – простая геометрическая трактовка.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x + a_{12} \cdot y = b_1 \\ a_{21} \cdot x + a_{22} \cdot y = b_2 \end{cases}$$

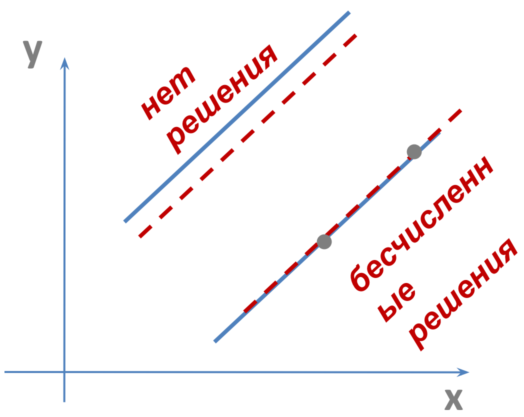
прямая

прямая

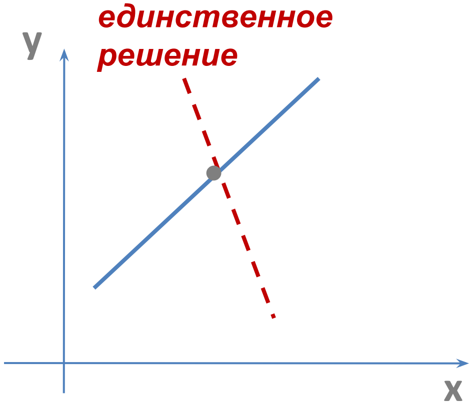
решение – точка пересечения прямых



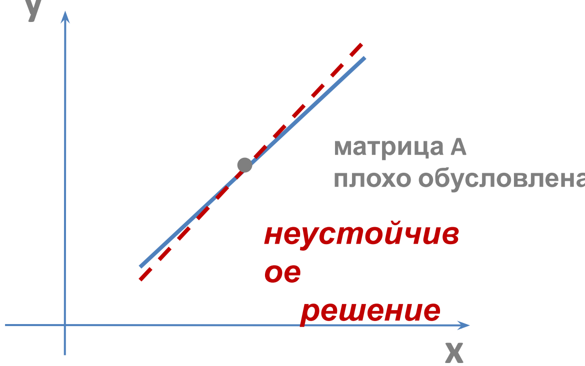
$\det(A) = 0$



$\det(A) \neq 0$



$\det(A) \approx 0$



Метод исключения Гаусса

Прямой метод. Широко используется на практике для решения линейных систем.

Идею метода покажем на примере системы уравнений 4-ой степени.

$$
\begin{cases}
a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + a_{14}\cdot x_4 = b_1 \\
a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + a_{24}\cdot x_4 = b_2 \\
a_{31}\cdot x_1 + a_{32}\cdot x_2 + a_{33}\cdot x_3 + a_{34}\cdot x_4 = b_3 \\
a_{41}\cdot x_1 + a_{42}\cdot x_2 + a_{43}\cdot x_3 + a_{44}\cdot x_4 = b_4
\end{cases}
$$

Для нее можно записать соответствующую матрицу коэффициентов:

прямой ход

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & b_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & b_4
\end{array}\right)
\xRightarrow{\det(A) \neq 0}
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & A_{12} & A_{13} & A_{14} & B_1 \\
0 & 1 & A_{23} & A_{24} & B_2 \\
0 & 0 & 1 & A_{34} & B_3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & B_4
\end{array}\right)
$$

(умножением строк на константу и вычитанием строк друг из друга матрица приводится к специальному 3-угольному виду – это **прямой ход метода** Гаусса)

обратный ход

Последняя строка эквивалентна уравнению $1\cdot x_4 = B_4$

Далее последовательно находим остальные корни x_3, x_2, x_1 .

Итерационный метод Гаусса - Зейделя

Покажем на примере:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

преобразуем

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}}\cdot\left(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3\right) \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}}\cdot\left(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3\right) \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}}\cdot\left(b_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2\right) \end{cases}$$

Итерационная формула Гаусса-Зейделя

$$\begin{cases} \left(x_1\right)^{\langle i+1\rangle} = \frac{1}{a_{11}}\cdot\left[b_1 - a_{12}\left(x_2\right)^{\langle i\rangle} - a_{13}\left(x_3\right)^{\langle i\rangle}\right] \\ \left(x_2\right)^{\langle i+1\rangle} = \frac{1}{a_{22}}\cdot\left[b_2 - a_{21}\left(x_1\right)^{\langle i+1\rangle} - a_{23}\left(x_3\right)^{\langle i\rangle}\right] \\ \left(x_3\right)^{\langle i+1\rangle} = \frac{1}{a_{33}}\cdot\left[b_3 - a_{31}\left(x_1\right)^{\langle i+1\rangle} - a_{32}\left(x_2\right)^{\langle i+1\rangle}\right] \end{cases}$$

$$\underbrace{\left[\left(x_1\right)^{\langle 0\rangle}, \left(x_2\right)^{\langle 0\rangle}, \left(x_3\right)^{\langle 0\rangle}\right]}_{\text{задаем}} \longrightarrow \left[\left(x_1\right)^{\langle 1\rangle}, \left(x_2\right)^{\langle 1\rangle}, \left(x_3\right)^{\langle 1\rangle}\right] \longrightarrow \left[\left(x_1\right)^{\langle 2\rangle}, \left(x_2\right)^{\langle 2\rangle}, \left(x_3\right)^{\langle 2\rangle}\right]$$

Конец итерациям, если

$$\boxed{\max\left[\left|\left(x_1\right)^{\langle i+1\rangle} - \left(x_1\right)^{\langle i\rangle}\right|, \left|\left(x_2\right)^{\langle i+1\rangle} - \left(x_2\right)^{\langle i\rangle}\right|, \left|\left(x_3\right)^{\langle i+1\rangle} - \left(x_3\right)^{\langle i\rangle}\right|\right] \le \varepsilon}$$

решение систем линейных уравнений в MathCAD

Если система уравнений записана в матричной форме $A \cdot X = B$,
то можно использовать стандартную функцию **lsolve(A,B)**, которая возвращает вектор решений.

Задача №3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + x_3 + 5 \cdot x_4 = 31 \\ -x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 + 3 \cdot x_4 = -2 \\ 3 \cdot x_1 + x_2 + 7 \cdot x_3 - 2 \cdot x_4 = 18 \end{cases}$$

Решение:

1. Определяем матрицу A и вектор B

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 10 \\ 31 \\ -2 \\ 18 \end{pmatrix}$$

2. Проверяем матрицу A на вырожденность

$$|A| = 12$$

3. Решаем

$$X := \mathrm{lsolve}(A, B) \qquad X = \begin{pmatrix} 16 \\ -15.5 \\ 0.5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

4. Проверка

$$A \cdot X - B = \begin{pmatrix} 1.776 \times 10^{-15} \\ 3.553 \times 10^{-15} \\ 3.553 \times 10^{-15} \\ 7.105 \times 10^{-15} \end{pmatrix}$$

Demo MathCAD (системы уравнений)

4.4. Решение систем нелинейных уравнений

В общем случае прямых методов нет. **Только итерационные методы**. Рассмотрим, например, **метод простой итерации**.

$$\begin{cases} f1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ fn(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{Преобразуем к форме типа}} \begin{cases} x_1 = \varphi1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots \\ x_n = \varphi n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

Система n нелинейных уравнений с n неизвестными

задаем начальное приближение

итерации

$$\begin{bmatrix} (x_1)^{\langle 0 \rangle} \\ (x_2)^{\langle 0 \rangle} \\ \dots \\ (x_n)^{\langle 0 \rangle} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (x_1)^{\langle 1 \rangle} \\ (x_2)^{\langle 1 \rangle} \\ \dots \\ (x_n)^{\langle 1 \rangle} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (x_1)^{\langle 2 \rangle} \\ (x_2)^{\langle 2 \rangle} \\ \dots \\ (x_n)^{\langle 2 \rangle} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

1-ая итерация *2-ая итерация*

Проблемы

1) Если начальные приближения сильно отличаются от решения, то может не сходиться;

2) Особенно для больших систем;

3) Если сходимости нет, то можно изменить форму итерационных уравнений.

Решение системы нелинейных уравнений в МС

Проводится с помощью специального вычислительного блока, который имеет следующую структуру:

<Начальные приближения переменных>

Given

<Уравнения>

<Ограничительные условия>

<Выражения с функциями Find или Minerr>

При записи уравнений и ограничений – булевы операторы!

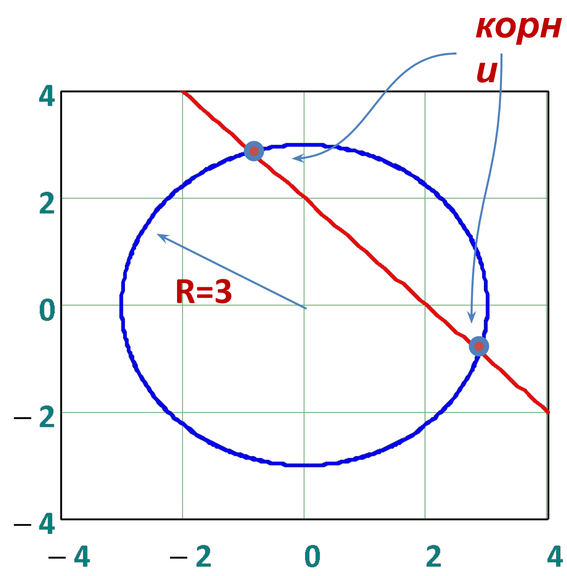
- **Нальные приближения переменных** - начальные значения для всех неизвестных системы;
- **Given** - ключевое слово;
- **Уравнения** - решаемые уравнения;
- **Ограничительные условия** - дополнительные ограничения на решения в виде неравенств;
- **Функции Find(z1,z2,z3, ...) и Minerr(z1,z2,z3, ...)** возвращают вектор решений системы. Число аргументов z1, z2, z3, ... должно быть равно числу неизвестных в уравнениях.

Задача №4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Решение:

1. **Геометрическая интерпретация.**
   Два корня.



2. **Решение в MathCAD**

$x := -1 \quad y := 2$ **начальные приближения**

Given

$$x^2 + y^2 = 9$$

$$x + y = 2$$

$$x < 0 \qquad y > 0$$ **область поиска (локализация)**

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} -0.871 \\ 2.871 \end{pmatrix}$$

решение

Demo MathCAD (системы уравнений)