Проект на тему:

Решение уравнений II,III,IV степени.

Выполнил: Сармутдинов Талгат «10а»
Проверила: Яковлева Т.П.

План:

- 1) Квадратные уравнения.
- 2) Теорема Виета.
- 3) Из истории.
- 4) Формула Кардано.
- 5) Метод Феррари.

Решение уравнений II,III,IV-й степеней по формуле.

Уравнения первой степени, т.е. линейные, нас учат решать ещё с первого класса, и особого интереса к ним не проявляют. Интересны нелинейные уравнения т.е. больших степеней. Среди нелинейных (уравнений общего вида, не решающихся разложением на множители или каким-либо другим относительно простым способом) уравнения низших степеней (2,3,4-й) можно решить с помощью формул. Уравнения 5-й степени и выше неразрешимы в радикалах (нет формулы). Поэтому мы рассмотрим только три метода.

I. Квадратные уравнения.

Формула Виета.

Дискриминант квадратного трехчлена.

- Для любого приведённого кв. уравнения справедлива формула : $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \frac{+}{-} \sqrt{\frac{p2}{4} - q}$
- Обозначим: D=p-4q тогда формула примет вид: $$x_{1,2} = \frac{-p+-\sqrt{p^2-q}}{2} = \frac{-p+-\sqrt{D}}{2}$$
- Выражение D называют дискриминантом. При исследовании кв. трехчлена смотрят на знак D. Если D>0,то корней 2; D=0, то корень 1; если D<0, то корней нет.

II. Теорема Виета

- Для любого приведённого кв. уравнения $x^2 + px + q = 0$

Справедлива теорема Виета: $x_1 + x_2 = \left(\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\right) + \left(\frac{-p-\sqrt{D}}{2}\right) = -p$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-p+\sqrt{D}}{2}\right) + \left(\frac{-p-\sqrt{D}}{2}\right) = \frac{p^2 - \left(p^2 - 4q\right)}{4} = q$$

- Для любого уравнения n-ой степени теорема Виета также справедлива: коэффициент взятый с противоположным знаком, равен сумме его n корней; свободный член равен произведению n его корней и числа (-1) в n степени.

Вывод формулы Виета.

- Запишем формулу квадрата суммы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
- И заменим в ней а на х, b на $\frac{p}{2}$
- Получим: $(x+\frac{p}{2})^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$
- Теперь отсюда вычтем первоначальное равенство: $(x+\frac{p}{2})^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$
- Теперь нетрудно получить нужную формулу.

Пример :

$$3x^2+7x+2=0$$

$$D=p^2-4aq=49-24=25=5^2$$

$$x_{1,2}=\frac{-p+-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-7+-5}{6}$$

$$x_1=\frac{-7+5}{6}=-\frac{1}{3}$$

$$x_2=\frac{-7-5}{6}=-\frac{12}{6}=-2$$

$$Ответ: x_1=-\frac{1}{3}; x_2=-2.$$

III. Из истории.

В XV-XVI вв. расцвет науки происходит главным образом в Италии, во Франции и в Германии, а позднее, - в конце 16 в., - в Голландии, которая в это время переживала первую в Европе буржуазную революцию.

Итальянские математики 16 в. сделали крупнейшее математическое открытие. Они нашли формулы для решения уравнений третьей и четвертой степеней.

Рассмотрим произвольное кубическое уравнение:

$$y^3 + ay^2 + by + c = 0$$

И покажем, что с помощью подстановки $y = x - \frac{a}{3}$ его можно преобразить к виду $x^3 + px + g = 0$

Пусть $y = x + a$ Получим: $(x+a)^3 + a(x+a)^2 + b(x+a) + c = 0$

$$x^3 + (3a + a)x^2 + (3a^2 + 2aa + b)x + (a^3 + aa^2 + ba + c) = 0$$

Положим $3a + a = 0$ т.е. $a = -\frac{a}{3}$ Тогда данное уравнение

примет вид

$$\boxed{x^3 = px + g = 0}$$

В 16 в. было распространено соревнование между учеными, проводившееся в форме диспута. Математики предлагали друг другу определенное число задач, которые нужно было решить к началу поединка. Выигрывал тот, кто решил большее число задач. Антонио Фиоре постоянно участвовал в турнирах и всегда выигрывал, так как владел формулой для решения кубических уравнений. Победитель получал денежное вознаграждение, ему предлагали почетные, высоко оплачиваемые должности.

IV. Тарталья преподавал математику в Вероне, Венеции, Брешии. Перед турниром с Фиоре он получил от противника 30 задач, увидев,что все они сводятся к кубическому уравнению $x^3 + ax = b, a > 0$

И приложил все силы для его решения. Отыскав формулу, Тарталья решил все задачи, преложенные ему Фиоре, и выиграл турнир. Через день после поединка он нашел формулу для решения уравнения $x^3 = ax + b, a > 0, b > 0$

Это было величайшее открытие. После того как в Древнем Вавилоне была найдена формула для решения квадратных равнений, выдающиеся математики в течение двух тысячелетий безуспешно пытались найти формулу для решений кубических уравнений. Метод решения Тарталья держал втайне.

Рассмотрим уравнение $x^3 = ax + b$

Тарталья использовал подстановку $x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}.$

Из уравнения он получил: $\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)^3=a\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)+b,$

$$u+v+3\sqrt[3]{u}\sqrt[3]{v}\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)=a\left(\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v}\right)+b,$$

$$u+v=b, 3\sqrt[3]{uv}=a$$

Для u и v получена система $\begin{cases} u+v=b, \\ uv=\left(\dfrac{a}{3}\right)^3. \end{cases}$

Значит, они являются корнями квадратного уравнения

$$y^3-by+\left(\frac{a}{3}\right)^3=0$$

Следовательно, для отыскания x имеем формулу

$$x=\sqrt[3]{\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{3}\right)^3}}$$

Ее называют сейчас формулой Кардано, так как она впервые была опубликована в 1545 г. в книге Кардано «Великое искусство, или Об алгебраических правилах».

Джироламо Кардано (1501-1576) окончил университет в Падуе. Его главным занятием была медицина. Кроме того, он занимался философией, математикой, астрологией, составлял гороскопы Петрарки, Лютера, Христа, английского короля Эдуарда 6. Папа римский пользовался услугами Кардано - астролога и покровительствовал ему. Кардано умер в Риме. Существует легенда, что он покончил жизнь самоубийством в тот день, который предсказал, составляя собственный гороскоп, как день своей смерти.

Кардано неоднократно обращался к Тарталье с просьбой сообщить ему формулу для решения кубических уравнений и обещал хранить ее тайну. Он не сдержал слова и опубликовал формулу, указав, что Тарталье принадлежит честь открытия «такого прекрасного и удивительного, превосходящего все таланты человеческого духа».

В книге Кардано «Великое искусство…» опубликована также формула для решения уравнений четвертой степени, которую открыл Луиджи Феррари (1522-1565)- ученик Кардано, его секретарь и поверенный.

V. Изложим метод Феррари. Запишем общее уравнение четвертой степени:

$$y^4 + py^3 + gy^2 + ry + s = 0$$

С помощью подстановки $y = x + a$ его можно привести к виду $x^4 + ax^2 + bx + c =$

Используя метод дополнения до полного квадрата, запишем: $x^4 + ax^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2$

Феррари ввел параметр t и получил: $\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = \left(x^2 + \frac{a}{2}\right)^2 + 2t\left(x^2 + \frac{a}{2}\right) + t^2$

Отсюда $x^4 + ax^2 + bx + c = \left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 - 2t\left(x^2 + \frac{a}{2}\right) - t - \frac{a^2}{4} + bx + c.$

Учитывая, получим

$$\left(x^2 + \frac{a}{2} + t\right)^2 = 2tx^2 - bx + \left(at + t^2 + \frac{a^2}{4} - c\right).$$

В левой части уравнения стоит полный квадрат, а в правой - квадратный трехчлен относительно х. Чтобы правая часть была полным квадратом, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант квадратного трехчлена равнялся нулю, т.е. число t должно удовлетворять уравнению

- Кубические уравнения Феррари решил по формуле Кардано. Пусть t_0 - корень уравнения. Тогда уравнение запишется в виде $\left(x^2+\frac{a}{2}+t_0\right)^2=2t_0\left(x-\frac{b}{4t_0}\right)^2$
- Отсюда получаем два квадратных уравнения: $x^2+\frac{a}{2}+t_0=\frac{+}{-}\sqrt{2t_0}\left(x-\frac{b}{4t_0}\right)$
- Они дают четыре корня исходного уравнения.

Приведем пример. Рассмотрим уравнение $x^3+15x+4.$

Легко проверить, что $x=4$ -корень этого уравнения.

Естественно считать, что, используя формулу Кардано, мы найдем этот корень. Проведем вычисления, учитывая, что $a=15, b=4.$

По формуле находим: $x^2=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}.}$

Как понять выражение $\sqrt{-121}$ На этот вопрос первым ответил инженер Рафаэль Бомбелли (ок. 1526-1573), работавший в Болонье В 1572 г. он издал книгу «Алгебра», в которую ввел в математику число i, такое, что

$$i\cdot i=-1$$

Бомбелли сформулировал правила операций с числом

$1\cdot i=i$ $\quad(-1)\cdot i=-i$ $\quad i\cdot i=-1$ $\quad(-i)(i)=1$

$1\cdot(-i)=-i$ $\quad(-1)(-i)=i$ $\quad i\cdot(-i)=1$ $\quad(-i)(-i)=-1$

Согласно теории Бомбелли,выражение $\sqrt{-121}$ можно записать так:

$$\sqrt{-1\cdot 121}=\sqrt{i\cdot i\cdot 121}=11i$$

А корень уравнения, имеющий вид, можно записать так:

$$x=\sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2+11i}$$

Вывод:

Изучая данную тему, я пришёл к выводу, что существуют формулы для решения уравнений **II, III, IV** степеней, не входящие в школьный курс математики. Корни уравнения не всегда действительные числа.

Список использованной литературы:

- 1) Энциклопедия для школьников. Математика 1998 г.
- 2) История математики. К.А. Рыбников