Уравнения линейные

(х находится только в числителе и только
в 1-й степени)

Алгоритм решения:

1. Раскрыть скобки в уравнении
2. Неизвестные слагаемые влево, извест-
ные – вправо, меняя знаки при переносе
3. Привести подобные слагаемые
4. Уравнение сводится к виду Ах=В, где А и В $\neq$
числа

- Если А $\neq$ 0, то х= $\frac{B}{A}$ (один корень)
- Если А = 0 и В=0, то х- любое $(x \in R)$ (бесконечно много корней)
- Если А=0, В $\neq$ 0, то корней нет.

Пример:

$$3(x-2)+12=18-(x-5),$$
$$3x-6+12=18-x+5,$$
$$3x+x=6-12+18+5,$$
$$2x=17, x=\frac{17}{2},$$
$$x=8{,}5$$

Пример:

$$\frac{5x-7}{12}-\frac{x-5}{8}=5$$
$$\frac{5x-7^{(2}}{12}-\frac{x-5^{(3}}{8}-5^{(24}=0$$
$$\frac{2(5x-7)-3(x-5)-5\cdot 24}{24}=0$$
$$\frac{10x-70-3x+15-120}{24}=0$$
$$\frac{7x-175}{24}=0,$$
$$7x-175=0, \qquad 24\neq 0$$
$$7x=175 \qquad x=\frac{175}{7} \qquad x=25$$

Пример: $0\cdot x=5,$ Корней нет

Пример: $0\cdot x=0,$ Х- любое

Уравнения квадратные

(уравнения вида Ax²+Bx+C=0, где A,B, C –числа, $A \neq 0$)

1 способ:

$$D = B^2 - 4AC \qquad x = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}$$

$$\text{Если } D > 0, \text{ то } 2 \text{ корня,}$$
$$\text{если } D = 0, \text{ то } 1 \text{ корень,}$$
$$\text{если } D < 0, \text{ то корней нет.}$$

$$6x^2 + 5x - 4 = 0$$

$$D = 5^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-4) = 121$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 6} = \frac{-5 \pm 11}{12}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5-11}{12} = -\dfrac{16}{12} = -1\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{-5+11}{12} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

2 способ:
(для четного B)

$$D_1 = \left(\frac{B}{2}\right)^2 - AC \qquad x = \frac{-\frac{B}{2} \pm \sqrt{D_1}}{A}$$

$$3x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$D_1 = (-1)^2 - 3 \cdot (-8) = 25$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3}$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{1-5}{3} = -1\dfrac{1}{3} \\ x = \dfrac{1+5}{3} = 2 \end{array}\right.$$

3 способ: (для приведенного уравнения)

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = q, \\ x_1 + x_2 = -p. \end{cases}$$

$$x^2 + 3x - 28 = 0 \qquad \begin{cases} x_1 \cdot x_2 = -28, \\ x_1 + x_2 = 3, \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} x_1 = 7, \\ x_2 = -4. \end{array}\right.$$

4 способ: (если A+B+C=0)

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = \dfrac{C}{A}. \end{array}\right.$$

$$-2x^2 + 5x - 3 = 0, \ -2 + 5 - 3 = 0 \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = 1, \\ x_2 = \dfrac{-3}{-2} = 1{,}5 \end{array}\right.$$

5 способ: (если A+C=B)

$$\left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = -\dfrac{C}{A}. \end{array}\right.$$

$$-6x^2 - x + 5 = 0, \ -6 + 5 = -1 \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = -1, \\ x_2 = \dfrac{-5}{-6} = \dfrac{5}{6}. \end{array}\right.$$

6 способ: (если полный квадрат)

$$x^2 - 2x + 1 = 0, \ (x-1)^2 = 0, \ x - 1 = 0, \ x = 1$$

Неполные квадратные уравнения

(решаются разложением на множители левой части уравнения)

1 случай (С=0)

$$x^2+3x=0$$
$$x(x+3)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x+3=0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

2 случай (В=0)

$$x^2-3=0$$
$$\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} x-\sqrt{3}=0, \\ x+\sqrt{3}=0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{3}, \\ x=-\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

$$x^2+3=0$$
$$x^2\geq 0, x^2+3>0,$$
$$\textit{корней нет}$$

3 случай (В=0, С=0)

$$x^2=0$$
$$x=0$$

Алгоритм решения квадратных уравнений

1) Свести уравнение к виду Ax²+Bx+C=0 раскрыв скобки, перенеся все слагаемые в левую часть уравнения, приведя подобные слагаемые.
2) Если коэффициенты дробные, домножить обе части уравнения на такое число, чтобы коэффициенты стали целыми
3) Если первый коэффициент отрицательный, домножить обе части уравнения на (-1)
4) Применить один из способов решения

Пример

:

$$(0,3x-0,2)(3-x)=-2\,(\textit{раскрываем скобки})$$
$$0,9x-0,3x^2-0,6+0,2x=-2\,(\textit{переносим все слагаемые в левую часть уравнения})$$
$$0,9x-0,3x^2-0,6+0,2x+2=0\,(\textit{приводим подобные слагаемые})$$
$$-0,3x^2+1,1x+1,4=0\,(\textit{умножим на } 10, \textit{ чтобы избавиться от запятых})$$
$$-3x^2+11x+14=0\,(\textit{умножим на } (-1), \textit{ чтобы коэффициент при } x^2 \textit{ стал положительным})$$
$$3x^2-11x-14=0$$
$$A+C=B$$
$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=\dfrac{14}{3} \end{array}\right.$$

Формулы Виета

Если квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2

$$\begin{cases} x_1\cdot x_2=\dfrac{C}{A}, \\ x_1+x_2=-\dfrac{B}{A}. \end{cases}$$

Дробные рациональные уравнения

(уравнения, содержащие переменную в знаменателе дроби)

Алгоритм решения

1) Перенести все слагаемые в левую часть уравнения
2) Выполнить сложение, вычитание дробей, свести левую часть уравнения к виду $\frac{P(x)}{Q(x)}=0$

3) Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. $P(x)=0$, при $Q(x) \neq 0$
4) Решить уравнение $P(x)=0$
5) Решить «неуравнение» $Q(x) \neq 0$
6) В ответ записать те корни уравнения, которые не обращают в 0 знаменатель.

Пример

: $\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+x}$ (*перенесем все в левую часть уравнения*)

$$\frac{x}{x+1}-\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+x}=0 \; (\text{сложим дроби (см. сложение и вычитание алгебраических дробей)})$$

$$\frac{x^{(x}}{x+1}-\frac{1^{(x+1}}{x}-\frac{1}{x(x+1)}=0$$

$$\frac{x^2-x-1-1}{x(x+1)}=0$$

$$\frac{x^2-x-2}{x(x+1)}=0 \; (\text{приравниваем к } 0 \text{ числитель, а знаменатель} \neq 0)$$

$$x^2-x-2=0 \quad \text{при } x(x+1)\neq 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} x\neq 0 \quad x+1\neq 0 \\ \qquad\quad x\neq -1 \end{array}$$

Ответ: 2

Уравнения высших степеней

(уравнения, содержащие переменную в степени больше 2)

Метод замены переменной

1) Выполнить необходимые преобразования выражений к виду, когда можно ввести новую переменную
2) Обозначить повторяющееся выражение за новую переменную(при этом не должно остаться старой переменной)
3) Ввести ограничения для новой переменной, если они есть
4) Решить полученное уравнение относительно новой переменной
5) Сделать обратную замену
5) Решить полученное уравнение (уравнения)

Пример: биквадратные уравнения

$$x^4+15x^2-16=0$$

$$\left(x^2\right)^2+15x^2-16=0$$

Пусть $x^2=t, t\geq 0$

$$t^2+15t-16=0$$

$$\left[\begin{array}{l} t=-16<0 \\ t=1. \end{array}\right.$$

$$x^2=1,\; x^2-1=0,\; (x-1)(x+1)=0$$

$$x=1,\; x=-1.$$

Ответ: 1; −1.

Примеры:

$$1)\ (x-1)x(x+1)(x+2)=24,\quad \big((x-1)(x+2)\big)\big(x(x+1)\big)=24$$

$$(x^2+x-2)(x^2+x)=24,\qquad x^2+x=t,\ (t-2)t=24,$$

$$t^2-2t-24=0,\ t=-4,\ t=6.\quad \left[\begin{array}{l} x^2+x=-4, \\ x^2+x=6, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=2. \end{array}\right.$$

$$Ответ: -3; 2.$$

$$2)\ (2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2,$$

Т.к. $x=0$ не является корнем уравнения, разделим обе части уравнения на x^2.

$$\frac{(2x^2-3x+1)}{x}\cdot\frac{(2x^2+5x+1)}{x}=\frac{9x^2}{x^2},\quad \left(2x-3+\frac{1}{x}\right)\cdot\left(2x+5+\frac{1}{x}\right)=9,$$

$$2x+\frac{1}{x}=t,\ (t-3)(t+5)=9,\ \ldots$$

$$3)\ x^4-3x^3-8x^2+12x+16=0,$$

Т.к. $x=0$ не является корнем уравнения, разделим обе части уравнения на x^2.

$$x^2-3x-8+\frac{12}{x}+\frac{16}{x^2}=0,\quad x^2+\frac{16}{x^2}-3\left(x-\frac{4}{x}\right)-8=0,$$

Пусть $x-\dfrac{4}{x}=t$, *тогда* $\left(x-\dfrac{4}{x}\right)^2=t^2$,

$$x^2-8+\frac{16}{x^2}=t^2,\ x^2+\frac{16}{x^2}=t^2+8,$$

Уравнение примет вид $t^2+8-3t-8=0,\ t^2-3t=0,\ldots$

Разложение на множители.

1. Все слагаемые переносятся в левую часть уравнения, справа остается 0.
2. Левая часть уравнения раскладывается на множители.
3. Произведение равно нулю, когда какой-либо множитель равен нулю, а другие при этом не теряют смысла.

Пример:

$$x^3+2x^2=x+2,\ x^3+2x^2-x-2=0,$$

$$x^2(x+2)-(x+2)=0,\ (x+2)(x^2-1)=0,$$

$$\left[\begin{array}{l} x+2=0, \\ x^2-1=0, \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=\pm 1. \end{array}\right. \quad Ответ: -2; -1; 1.$$

Нельзя решать так:

$x^2(x+2)=(x+2)$, (*разделим на* $(x+2)$)

$x^2=1,\ x=\pm 1$. *Происходит потеря корня* -2.

С помощью теоремы Безу и схемы Горнера.

1. Теорема Безу. Остаток от деления многочлена Pn(x) на двучлен (x-a) равен значению этого многочлена при x = a.
2. Следствие: Если число a является корнем многочлена P (x) , то этот многочлен делится на (x-a) без остатка .
3. Т.о. подобрав один из корней a, можно многочлен, содержащийся в левой части разделить на (x-a)
4. Целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем свободного члена этого многочлена.
5. Пусть несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения с целыми коэффициентами. Тогда число p является делителем свободного члена , а q- делителем - коэффициента при старшей степени x.
6. Корень уравнения удобно подбирать с помощью схемы Горнера.

Пример

$2x^3 - x^2 + 3 = 0$, *корни будем искать в виде*

дроби $\frac{p}{q}$, *где* p – *делители* $3(\pm 1, \pm 3)$,

а q – *делители* $2(\pm 1, \pm 2)$. *То есть среди чисел*

$\pm 1, \pm 3, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}.$

	x^3	x^2	x^1	x^0	
	2	-1	0	3	
1	2	$1 \cdot 2 - 1 = 1$	$1 \cdot 1 + 0 = 1$	$1 \cdot 1 + 3 = 4$	$\neq 0$ *не корень*
-1	2	$-1 \cdot 2 - 1 = -3$	$-1 \cdot (-3) + 0 = 3$	$-1 \cdot 3 + 3 = 0$	корень
…					

$$2x^3 - x^2 + 3 = 0,$$
$$(x+1)(2x^2 - 3x + 3) = 0,$$
$$x + 1 = 0, \ \ 2x^2 - 3x + 3 = 0$$
$$x = -1, \qquad \textit{корней нет}$$
$$\textit{Ответ}: -1.$$

Решение задач с помощью уравнений (систем уравнений)

1. Принять какую-либо неизвестную величину за х (Чаще за х принимают наименьшую величину или то, что требуется найти в задаче)
2. Выразить через х все неизвестные величины, составив схему, таблицу или чертеж к задаче
3. Найти одно, не использованное в пункте 2, условие, которое использовать для составления уравнения
4. Решить составленное уравнение
5. Оценить результат (соответствует ли полученное значение х условиям задачи)
6. Найти другие неизвестные, подставив найденное значение х в выражения (если это требуется в задаче)

Пример 1. Роман состоит из трех глав и занимает в
книге 340 страниц. Число страниц второй главы состав-
ляет 42% числа страниц первой главы, а число страниц
третьей главы составляет 2/3 числа страниц второй главы.
Сколько страниц занимает каждая глава романа?

1 глава - ? Стр.
2 глава - ? Стр., 42% от 340стр.
3 глава - ? Стр., 2/3 от

Пусть 1 глава занимает х стр., тогда вторая – 0,42х стр., а
третья $0{,}42x\cdot 2/3=0{,}28x$ стр.. Т.к. всего 340 стр.,

Пример 2. В первом бидоне было в 5 раз больше моло-
ка, чем во втором. После того, как из первого бидона пере-
лили во второй 5 литров, в первом бидоне стало в 3 раза
больше молока, чем во втором. Сколько литров молока
было в каждом бидоне первоначально?
Пусть во втором бидоне было х л молока. Тогда составим
таблицу:

	Было, л	Измен., л	Стало, л
1	5х	-5	5х-5, в 3р.>
2	х	+5	х+5

Так как в первом бидоне стало в 3 раза больше, составим
уравнение: (М*3=Б)

$$(x+5)\cdot 3=5x-5$$
$$3x+15=5x-5$$
$$3x-5x=-15-5$$
$$-2x=-20$$
$$x=10(л)-\textit{было во втором бидоне.}$$
$$5\cdot 10=50(л)-\textit{было в первом бидоне.}$$

Ответ: 50л, 10л.

Пример 3. Чтобы ликвидировать опоздание на 1 час, поезд на перегоне в 720 км увеличил скорость, с которой должен был идти на 10 км/ч. Какова скорость поезда по расписанию?

Пусть скорость поезда по плану x км/ч, тогда составим таблицу:

	v, км/ч	t, ч	S, км
По плану	x	$\frac{720}{x}$	720
Фактически	x+10	$\frac{720}{x+10}$	720

Так как время движения по плану больше фактического на 1 час, составим уравнение. (Б-М=Р)

$$\frac{720}{x}-\frac{720}{x+10}=1$$

$$\frac{720^{(x+10}}{x}-\frac{720^{x}}{x+10}-1^{(x(x+10)}=0$$

$$\frac{720x+7200-720x-x^2-10x}{x(x+10)}=0$$

$$\frac{7200-x^2-10x}{x(x+10)}=0$$

$$7200-x^2-10x=0 \quad при \quad x(x+10)\neq 0$$

$$x^2+10x-7200=0$$

$$x=-90<0-не\ удовлетворяет\ усл.задачи$$

$$x=80км/ч-скорость\ по\ плану$$

Пропорции

Пропорция – это равенство двух отношений.

Основное свойство: Произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов.

$$\underline{\underline{2,8}}:\underline{3,2}=\underline{\underline{2,1}}:\underline{x}$$

$$2,8\cdot x=3,2\cdot 2,1$$

$$x=\frac{3,2\cdot 2,1}{2,8}$$

$$x=\frac{\cancel{32}^{8}\cdot\cancel{21}^{3}\cdot\cancel{10}^{1}}{10\cdot\cancel{10}_{1}\cdot\cancel{28}^{\cancel{4}\,1}}$$

$$x=2,4$$

Задача. Для изготовления 8 одинаковых приборов требуется 12 кг цветных металлов. Сколько килограммов цветных металлов потребуется для изготовления 6 таких приборов?

8 приборов – 12 кг

(Чем меньше приборов, тем меньше металла)

6 приборов – X кг

$$\frac{8}{6}=\frac{12}{x},\quad 8x=6\cdot 12,\quad x=\frac{6\cdot 12}{8},\quad x=9кг$$

Задача. 24 человека за 6 дней пропололи участок клубники. За сколько дней выполнят эту же работу 36 человек, если будут работать с той же производительностью?

24 чел. – 6 д.

(Чем больше человек, тем меньше времени)

36 чел. – X д.

$$\frac{24}{36}=\frac{x}{6},\quad 36x=6\cdot 24,\quad x=\frac{6\cdot 24}{36},\quad x=4д.$$

Системы уравнений

<u>Метод подстановки:</u> (выразить из одного уравнения одну переменную через другую, подставить во второе уравнение, решить его относительно этой переменной, найденное значение подставить в первое уравнение, решить его относительно второй переменной.)

$$\begin{cases}8y-x=4,\\2x-21y=2;\end{cases}\begin{cases}-x=4-8y,\\2x-21y=2;\end{cases}\begin{cases}x=-4+8y,\\2\cdot(-4+8y)-21y=2;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=-4+8y,\\-8+16y-21y=2;\end{cases}\begin{cases}x=-4+8y,\\-5y=10;\end{cases}\begin{cases}x=-4+8\cdot(-2),\\y=-2;\end{cases}\begin{cases}x=-20,\\y=-2.\end{cases}$$

Ответ: (-20;-2)

<u>Метод сложения:</u> (умножить левую и правую
часть одного уравнения на число, подобранное таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных оказались противоположными числами, сложить полученные уравнения, решить получившееся уравнение относительно одной из переменных, найденное значение подставить в любое уравнение системы и найти значение другой переменной)

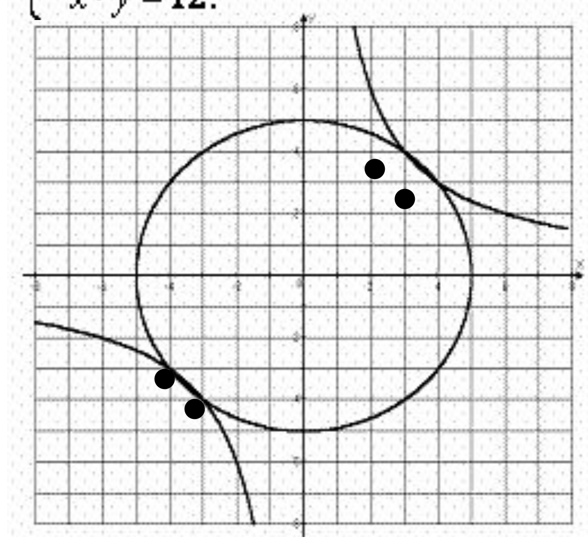
$$\begin{cases}3x+2y=-27, \ \big| \cdot(-1)\\-5x+2y=13;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x-2y=+27,\\-5x+2y=13;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5,\\-5\cdot(-5)+2y=13;\end{cases}$$

$$-8x=40,\ x=-5$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5,\\2y=13-25;\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-5,\\y=-6.\end{cases}\quad Ответ:(-5;-6)$$

<u>Графический метод:</u> (построить графики всех уравнений системы, найти точки пересечения графиков. В ответе координаты точки пересечения.)

$$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\x\cdot y=12.\end{cases}$$ -окружность с центром (0;0) радиуса 5



Ответ: (3;4),

<u>Метод замены переменнных:</u>

$$\begin{cases}\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{10}{3};(1)\\x-y=6;(2)\end{cases}\quad Пусть\ \frac{x}{y}=t, тогда\ (1)\ t+\frac{1}{t}=\frac{10}{3}$$

$$\frac{3t^2-10t+3}{3t}=0,\ t=3;\ t=\frac{1}{3}.$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\dfrac{x}{y}=3,\\\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{3},\end{array}\right.\\x-y=6;\end{cases}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3y,\\3y-y=6;\end{cases}\\\begin{cases}x=\dfrac{1}{3}y,\\\dfrac{1}{3}y-y=6;\end{cases}\end{array}\right.\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=9,\\y=3;\end{cases}\\\begin{cases}x=-3,\\y=-9.\end{cases}\end{array}\right.\ Ответ:(9;3),(-3;-9).$$