

# Электронный справочник «Способы решения квадратных уравнений»

[pptcloud.ru](http://pptcloud.ru)

Открыть

# Способы решений полных квадратных уравнений.

С помощью Дискриминанта

Разложение

«Переброска»

Выделение

Свойство коэффициентов

Теорема Виета

Графическое решение

Выйти

# С помощью Дискриминанта.

- Дискриминант позволяет определить сколько же корней имеет данное квадратное уравнение.

$$D = b^2 - 4ac$$

- Формула корней квадратного уравнения имеет вид:  $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$   
она позволяет найти корни любого квадратного уравнения (если они есть), в том числе приведенного и неполного.

- Таким образом, квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  ,
  - если  $D > 0$ , то имеет два различных корня;
  - если  $D = 0$ , то имеет единственный корень;
  - если  $D < 0$ , то не имеет корней.

# Разложение на множители.

## ● Пример 1

$x^2 - 4x + 4 = 0$ , разложим левую часть уравнения на множители;

$$x^2 - 2x - 2x + 4 = 0,$$

$$x(x - 2) - 2(x - 2) = 0,$$

$(x - 2)(x - 2) = 0$ , произведение равно нулю, значит хотя бы один из его множителей равен нулю

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2.

## ● Пример 2

$$x^2 + 10x - 24 = 0,$$

$$x^2 + 12x - 2x - 24 = 0,$$

$$x(x + 12) - 2(x + 12) = 0,$$

$$(x + 12)(x - 2) = 0,$$

$$x + 12 = 0 \quad \text{или} \quad x - 2 = 0$$

$$x = -12$$

$$x = 2.$$

Ответ: -12 и 2.

Назад

# Метод выделения полного квадрата.

- **Пример 1**

$x^2 - 4x + 4 = 0$ , используем формулу сокращенного умножения;

$$(x - 2)^2 = 0,$$

$$x - 2 = 0,$$

$$x = 2.$$

Ответ: 2

- **Пример 2**

$x^2 + 6x - 7 = 0$ , выделим в левой части полный квадрат

$x^2 + 2x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 - 7 = 0$ , первое слагаемое – квадрат числа  $x$ , а второе – удвоенное произведение  $x$  на 3, поэтому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить  $3^2$ .

Преобразуем левую часть уравнения прибавляя к ней и вычитая  $3^2$ .

$$(x + 3)^2 - 9 - 7 = 0,$$

$$(x + 3)^2 - 16 = 0,$$

$$(x + 3)^2 = 16,$$

$$x + 3 = 4 \quad \text{или} \quad x + 3 = -4$$

$$x = 1$$

$$x = -7.$$

Ответ: 1 и -7.

# Решение уравнений с использованием теоремы Виета

- Приведенное квадратное уравнение имеет вид  $x^2 + px + q = 0$ .

Его корни удовлетворяют теореме Виета:  $x_1 \cdot x_2 = q$

$$x_1 + x_2 = -p.$$

По коэффициентам можно предсказать знаки корней:

Свободный член «+»

Свободный член «-»

Назад

# Свободный член положительный.

- Если свободный член приведенного уравнения положителен, то уравнение имеет два одинаковых по знаку корня и это зависит от второго коэффициента.

Если  $q > 0$  и  $p > 0$ , то оба корня отрицательны.

Если  $q > 0$  и  $p < 0$ , то оба корня положительные.

- **Пример 1**

$$x^2 + 10x + 9 = 0,$$

$$x_1 = -1 \text{ и } x_2 = -9,$$

т.к.  $q = 9 > 0$  и  $p = 10 > 0$ ;

- **Пример 2**

$$x^2 - 6x + 9 = 0,$$

$$x_1 = 3 \text{ и } x_2 = 3,$$

т.к.  $q = 9 > 0$  и  $p = -6 < 0$ .

# Свободный член отрицательный.

- Если свободный член приведенного уравнения отрицателен, то уравнение имеет два различных по знаку корня.

Если  $q < 0$  и  $p > 0$ , то больший по модулю корень будет отрицателен.

Если  $q < 0$  и  $p < 0$ , то больший по модулю корень будет положителен.

- **Пример 1**

$$x^2 + 2x - 8 = 0,$$

$$x_1 = -4 \text{ и } x_2 = 2,$$

т.к.  $q = -8 < 0$  и  $p = 2 > 0$ ;

- **Пример 2**

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

$$x_1 = 5 \text{ и } x_2 = -3,$$

т.к.  $q = -15 < 0$  и  $p = -2 < 0$ .



# Решение уравнения способом «переброски».

- Умножая обе части квадратного уравнения на  $a$ , получаем уравнение

$$a^2 x^2 + abx + ac = 0.$$

Пусть  $ax = y$ , откуда  $x = \frac{y}{a}$ ; тогда получим уравнение  $y^2 + by + ac = 0$ , равносильное данному. С помощью теоремы Виета найдем корни:  $y_1$  и  $y_2$ , где  $y_1 y_2 = ac$  и  $y_1 + y_2 = -b$ .

$$\text{Окончательно получаем } x_1 = \frac{y_1}{a} \quad x_2 = \frac{y_2}{a}.$$

При этом способе коэффициент  $a$  умножается на свободный член, как бы «перебрасывается» к нему, поэтому его называют способом «переброски».

Этот способ применяют, когда можно легко найти корни уравнения, используя теорему Виета и, что самое важное, когда дискриминант есть точный квадрат.

- Пример**

$2x^2 - 11x + 15 = 0$ , «перебросим» коэффициент 2 к свободному члену:

$y^2 - 11y + 30 = 0$ , согласно теореме Виета найдем корни:

$$y_1 y_2 = 30 \text{ и } y_1 + y_2 = 11,$$

$y_1 = 5$  и  $y_2 = 6$ , окончательно получим:

$$x_1 = 5/2 \text{ и } x_2 = 6/2,$$

$$x_1 = 2,5 \text{ и } x_2 = 3.$$

Ответ: 2,5 и 3.

Назад

# Свойства коэффициентов квадратного уравнения.

- Пусть дано квадратное уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $a \neq 0$ .

Первое свойство

Второе свойство

Третье свойство

Назад

# Первое свойство коэффициентов.

- Если сумма коэффициентов равна нулю, т.е.  $a + b + c = 0$ , то  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ .
- Доказательство: Разделим обе части уравнения на  $a$ , получим приведенное квадратное уравнение  $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$
- Согласно теореме Виета:  $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}, x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ .
- По условию,  $a + b + c = 0$ , тогда  $b = -a - c$ . Значит,  
 $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 1 \cdot \frac{c}{a}, x_1 + x_2 = \frac{b}{a} = \frac{-a - c}{a} = 1 - \frac{c}{a}$ .
- Получаем  $x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a}$ , что и требовалось доказать.
- **Пример**

$$3x^2 + 5x - 8 = 0,$$

т.к.  $a + b + c = 0$

( $3 + 5 - 8 = 0$ ), то получим

$$x_1 = 1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{8}{3}$$

Ответ:  $1$  и  $\frac{8}{3}$

# Второе свойство коэффициентов.

- Если  $a - b + c = 0$ , или  $b = a + c$ , то  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -\frac{c}{a}$ .

Доказательство аналогично.

- **Пример**

$$11x^2 + 27x + 16 = 0,$$

Т.к.  $a - b + c = 0$  ( $11 - 27 + 16 = 0$ ), значит

$$x_1 = -1, x_2 = \frac{c}{a} = \frac{16}{11}.$$

Ответ:  $-1$  и  $\frac{16}{11}$

# Третье свойство коэффициентов.

- Если второй коэффициент  $b = 2k$  четное число, то формулу корней можно записать в виде  $x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$ .

- **Пример**

$$4x^2 - 36x + 77 = 0,$$

$$a = 4, b = -36, c = 77, k = -18;$$

$$D = k^2 - ac = (-18)^2 - 4 \cdot 77 = 324 - 308 = 16, \quad D > 0, \text{ два различных корня;}$$

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} = \frac{18 \pm 4}{4}$$

$x_1 = \dots, x_2 = \dots$

Ответ: 5,5 и 3,5.

# Графическое решение квадратных уравнений.

- Преобразуем уравнение  $x^2 + px + q = 0$  и получим вид:  $x^2 = -px - q$ .
- Построим графики зависимостей  $y = x^2$  и  $y = -px - q$ .
- График первой зависимости - парабола, проходящая через начало координат.
- График второй зависимости – прямая . ([приложение 1, рис.1](#)).

Возможны следующие случаи:

- прямая и парабола могут пересекаться в двух точках, абсциссы точек пересечения являются корнями квадратного уравнения;
- прямая и парабола могут касаться и имеют одну общую точку, значит уравнение имеет одно решение;
- прямая и парабола не имеют общих точек, т. е. квадратное уравнение не имеет корней.

Примеры

Назад

# Примеры.

## ● Пример 1

$x^2 - 3x - 4 = 0$ , запишем уравнение в виде  $x^2 = 3x + 4$ , рассмотрим графики зависимостей  $y = x^2$  и  $y = 3x + 4$ ,

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Прямую  $y = 3x + 4$  построим по двум точкам  $M(0; 4)$  и  $N(3; 13)$  ([приложение 1, рис.2](#)).

Прямая и парабола пересекаются в двух точках  $A$  и  $B$  с абсциссами  $x_1 = -1$  и  $x_2 = 4$ .

Ответ: -1 и 4.

## ● Пример 2.

$$x^2 - 2x + 1 = 0,$$

Построим параболу  $y = x^2$  по координатам (см. таблицу выше) и прямую

$y = 2x - 1$  по двум точкам  $M(0; -1)$  и  $N(1; 0)$  ([приложение 1, рис.3](#)).

Прямая и парабола пересекаются в точке  $A$  с абсциссой  $x = 1$ .

Ответ: 1.

## ● Пример 3.

$$x^2 - 2x + 5 = 0,$$

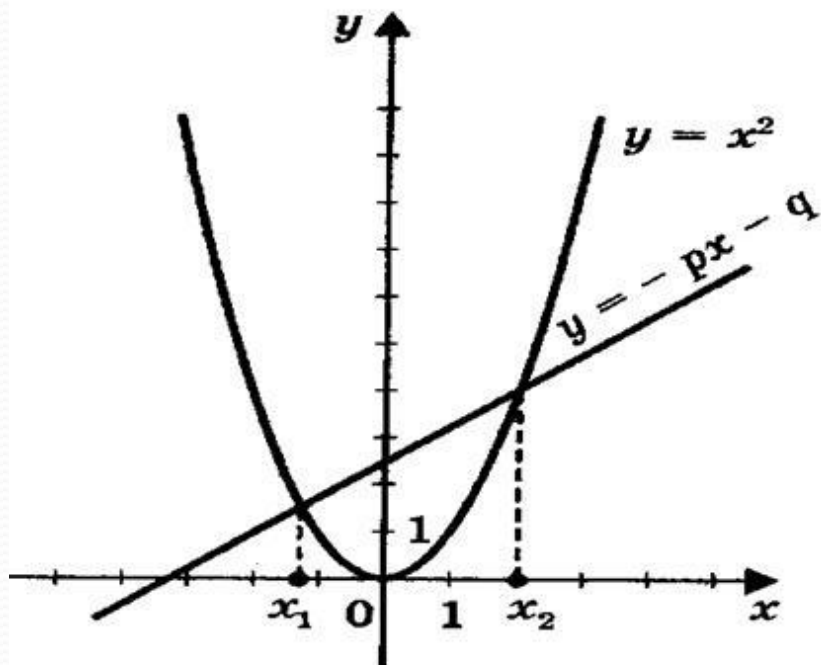
Построим параболу  $y = x^2$  по координатам (см. таблицу выше) и прямую

$y = 2x - 5$  по двум точкам  $M(0; -5)$  и  $N(2,5; 0)$  ([приложение 1, рис.4](#)).

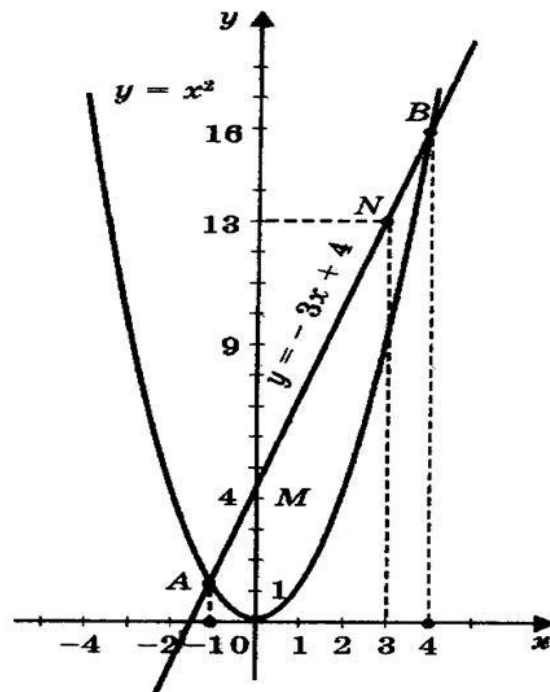
Прямая и парабола не имеют точек пересечения, значит данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

# Приложение.



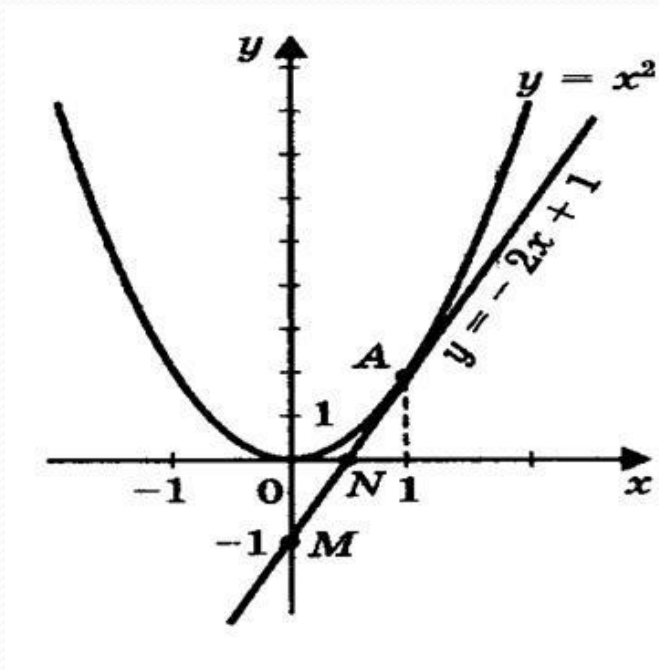
● Рисунок 1



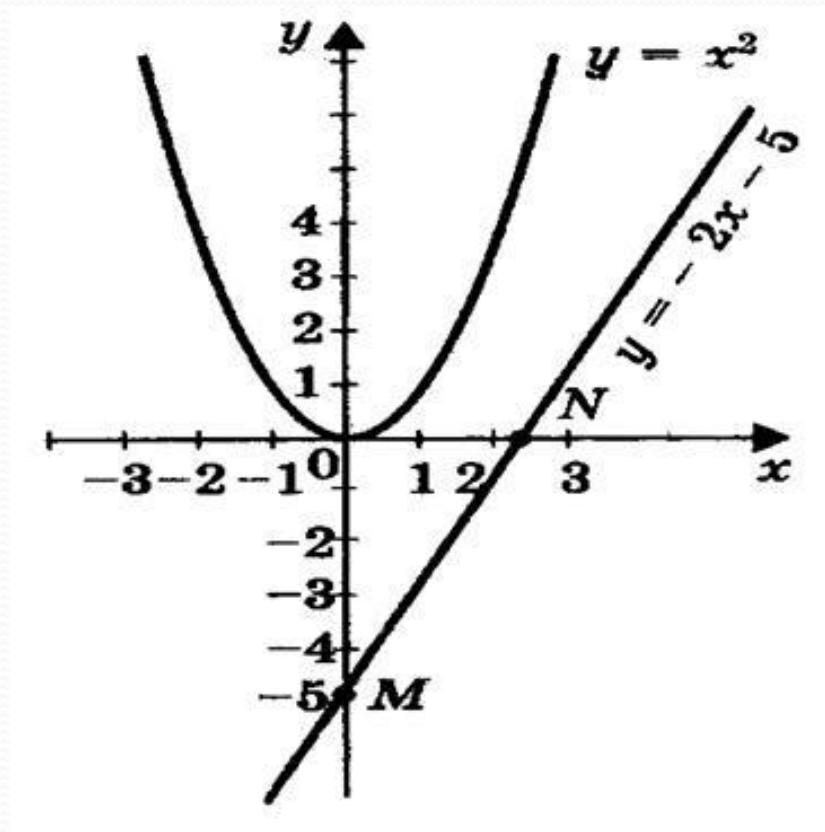
● Рисунок 2



# Приложение.



● Рисунок 3



● Рисунок 4



Спасибо за  
внимание!