Решение линейных и квадратных уравнений с параметрами в курсе математики основной школы

Задачи с параметрами вызывают большие затруднения у учащихся и учителей. Это связано с тем, что решение таких задач требует не только знания свойств функций и уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования, но также высокой логической культуры и хорошей техники исследования.

Решение линейных и квадратных уравнений с параметрами является одним из наиболее сложных и интересных разделов математики, который развивает мыслительную деятельность учащихся, формирует представление о буквенном выражении чисел и их свойствах, систематизирует и значительно расширяет знания учащихся, полученные в учебной деятельности при изучении свойств уравнений, функций, при выполнении алгебраических преобразований. Открывает перед учащимися значительное число эвристических приемов общего характера, применяемых в исследованиях на любом другом материале, повышает логическую культуру и технику исследований.

Позволяет приблизить знания учащихся к требованиям контрольных измерительных материалов части с единого государственного экзамена.

Решение линейных уравнений с параметрами

Формировать умение учащихся видеть в выражении число, обозначенное буквой, необходимо на начальных ступенях обучения математике. В 5 классе при повторении свойств чисел можно рассмотреть примеры.

Примеры:

1) При каком натуральном значении **a** верно равенство:

а) $a + 7 = 7 + 5$;

б) $3 \cdot a = 8 \cdot 3$?

2)При каких натуральных значениях **b** деление $18 : b$ выполнено без остатка?

3) При каких натуральных значениях **b** при делении $16 : b$ в остатке получится 1?

4)При каких натуральных значениях **c** верно неравенство

$12c < 100$?

5) При каких натуральных значениях **p** верно неравенство

$12 < 5p < 50$?

Задания, подобные примерам 1, 2, 4 можно предлагать учащимся в устной работе, а примеры 3, 5 для индивидуальной работы на уроке или при составлении контрольной работы в качестве задания развивающего плана.

В теме "Решение уравнений" ребята знакомятся с определением понятия "корень уравнения", вызывает интерес и способствует запоминанию определения корня уравнения следующее задание:
Укажите значение $\boldsymbol{a}$, при котором число 5 является корнем уравнения $ax = 20$.
<u>Решение</u>. Если число 5 – корень уравнения ах = 20, то равенство будет верным

$a \cdot 5 = 20$

$a = 20 : 5$

$a = 4$

<u>Ответ</u>: при $a = 4$ число 5 – корень уравнения $ax = 20$.

6 класс

При изучении темы "Обыкновенные дроби" в курсе математики 6 класса в устной и самостоятельной работе можно использовать примеры, способствующие запоминанию понятий "правильная" и "неправильная" дроби, умению сокращать дроби.

1) При каких натуральных значениях **b** дробь $\frac{b-1}{6}$ является правильной?

2) При каких натуральных значениях **m** дробь $\frac{8}{m+1}$ является неправильной?

3) При каких натуральных значениях **a** правильная дробь $\frac{a}{18}$ сократима?

4) При каких натуральных значениях **c** неправильная дробь $\frac{24}{c}$ сократима?

В заключении изучения темы "Действия с рациональными числами" на уроках математики в 6 классе можно рассматривать примеры решения уравнений вида

$0x = 5$; $0x = 0$, предлагать задания развивающего характера в устной работе, а затем и в индивидуальной дифференцированной работе уравнения:

1) $0x = a$; 2) $bx = 0$.

1) При каких значениях **a** уравнение $0x = a$ не имеет решений? При каких значениях **a** уравнение имеет бесконечное множество решений?

2) При каких значениях b уравнение $bx = 0$ имеет бесконечное множество решений?

При каких значениях b уравнение $bx = 0$ не имеет решений?

На внеклассных занятиях по математике в 6 классе рассматривается решение уравнений с параметрами вида:

1) $ax = 6$ 2) $(a - 1)x = 8{,}3$ 3) $bx = -5$

7 класс

Продолжить работу по решению простейших линейных уравнений с параметрами и приводимых к ним можно в 7 классе при изучении темы: "Решение линейных уравнений". В устной работе повторяется решение уравнений вида: $0x = 5$; $6x = 0$; $0x = 0$; $ax = 0$; $0x = b$; $cx = 7$.

Затем в ходе урока можно рассмотреть уравнения, развивающие представление учащихся о решении уравнений с параметрами.

Пример. При каком значении **a** число 4 является корнем уравнения $(a - 5) \cdot 4 - 2a = 3x - 1$?

Решение:

Если 4 – корень уравнения, то при $x = 4$ получим верное равенство

$(a - 5) \cdot 4 - 2a = 3 \cdot 4 - 1$,

$4a - 20 - 2a = 12 - 1$,

$2a = 20 + 11$,

$2a = 31$,

$a = 15{,}5$

Ответ: при $a = 15{,}5$ число 4 – корень уравнения.

Изучив тему седьмого класса "Разложение многочленов на множители" и в ходе изучения этой темы на факультативе, ребята с интересом решают уравнения вида:

При каких значениях **а** уравнение $6(ax + 1) + a = 3(a - x) + 7$ имеет бесконечное множество решений?

Решение:

$$6(ax + 1) + a = 3(a - x) + 7$$

$$6ax + 6 + a = 3a - 3x + 7$$

$$(6a + 3)x = 2a + 1$$

Найдем контрольное значение а.

$$6a + 3 = 0$$

$$a = -1/2.$$

При $a = -1/2$ получим уравнение $0x = 0$. Уравнение имеет бесконечное множество решений.

При $a \neq -1/2$ $x = \frac{2a+1}{6a+3}$, $x = \frac{2a+1}{3(2a+1)}$, $x = 1/3$ – уравнение имеет одно решение.

Ответ: при а = уравнение имеет бесконечное множество решений.

8 класс

Изучение темы "Действия с алгебраическими дробями" позволяет углубить работу с учащимися по выработке их умений проводить анализ решения более сложных линейных уравнений с параметрами на факультативных занятиях.

<u>Пример</u>. Решите уравнение:

$2x - 3(a - x) = ax - 15$

Решение:

$2x - 3(a - x) = ax - 15$

$2x - 3a + 3x = ax - 15$

$5x - ax = 3a - 15$

$(5 - a)x = 3(a - 5)$

Найдем контрольное значение а:

$5 - a = 0$

$a = 5$

При $a = 5$ получим уравнение $0x = 0$, которое имеет бесконечное множество решений.

При $a \neq 5$ $x = \frac{3(a-5)}{5-a}$ (делим на число $5 - a \neq 0$)

$x = \frac{-3(5-a)}{5-a}$

$x = -3$ – уравнение имеет одно решение.

Ответ: при $a = 5$ – бесконечное множество решений, при $a \neq 5$ – одно решение $x = -3$.

Решение квадратных уравнений с параметрами в курсе математики основной школы

Обучение решению квадратных уравнений с параметрами можно начинать в 8 классе с устного счета, применяя знания учащихся, полученные при изучении темы "Решение квадратных уравнений".

Учащиеся знакомятся с понятием "дискриминант", учатся находить количество корней квадратного

уравнения в зависимости от его значения.

Примеры:

1) При каких значениях m уравнение $x^2 - 3x - 2m = 0$ не имеет действительных корней?

Решение: $x^2 - 3x - 2m = 0$. Так как квадратное уравнение не имеет действительных корней, то его дискриминант принимает отрицательные значения:

$D = 9 + 8m$

$9 + 8m < 0$

$m < -1\frac{1}{8}$

Ответ: при $m < -1\frac{1}{8}$ уравнение не имеет действительных корней

2) При каких значениях **a** уравнение $x^2 + 5x + 10a = 0$ имеет два действительных корня?

3) При каких значениях **b** уравнение $x^2 + bx + 4 = 0$ имеет один действительный корень?

Для индивидуальной работы на уроке можно предложить задания развивающего характера.

Пример. При каких значениях m квадратное уравнение $mx^2 + 6x - 3 = 0$ имеет два действительных корня?

Решение: $mx^2 + 6x - 3 = 0$.

Так как уравнение является квадратным, то его первый коэффициент $m \neq 0$.

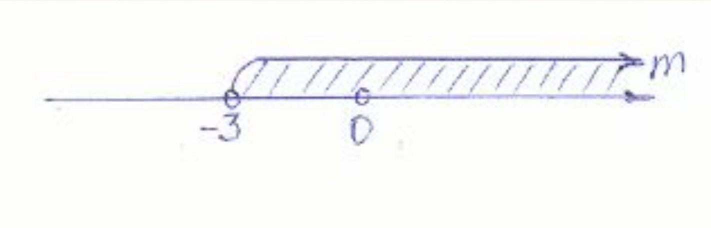
Так как квадратное уравнение имеет два действительных корня, то его дискриминант принимает положительные значения.

$D = 36 + 12m$

$36 + 12m > 0$

$12m > -36$

$m > -3$



Ответ: при $m > -3$, $m \neq 0$ квадратное уравнение $mx^2 + 6x - 3 = 0$ имеет два действительных корня.

При решении этих примеров отрабатывается не только понятие "дискриминант", но и определение квадратного уравнения.

9 класс

После изучения темы "Решение неравенств второй степени с одной переменной" рассматривается решение более сложных примеров.

Пример. При каких значениях параметра m уравнение $mx^2 - 4x + m + 3 = 0$ имеет более одного корня?

Решение: $mx^2 - 4x + m + 3 = 0$. Так как уравнение является квадратным, то его первый коэффициент $m \neq 0$.

При $m \neq 0$ получится квадратное уравнение, которое имеет более одного корня, если его дискриминант имеет положительное значение.

$D=16-4m^2-12m$.

Решим неравенство $m^2 + 3m - 4 < 0$ методом интервалов.

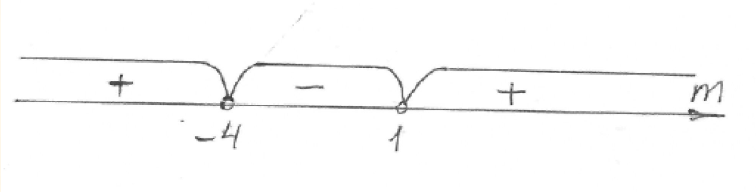
Найдем корни многочлена $m^2 + 3m - 4$.

$m^2 + 3m - 4 = 0$

$m_1 = -4$; $m_2 = 1$

Разложим многочлен $m^2 + 3m - 4$ на множители: $(m + 4)(m - 1) < 0$.

Найдем знаки многочлена $(m + 4)(m - 1)$ на интервалах:



Ответ: уравнение имеет более одного корня при $-4 < m < 1$, $m \neq 0$.

На факультативе в 9 классе можно рассмотреть решение примеров:

1) При каких значениях k корни уравнения $x^2 + (k^2 - 4k - 5)x + k = 0$ равны по модулю?

Решение: $x^2 + (k^2 - 4k - 5)x + k = 0$. Воспользуемся условием равенства корней квадратного уравнения по модулю

$$\begin{cases} k^2 - 4k - 5 = 0 \\ k < 0 \end{cases}$$

$k^2 - 4k - 5 = 0$

$k_1 = -1;\ k_2 = 5$ $\quad -1 < 0;\ 5 > 0 \Rightarrow k = 5$ – посторонний корень.

При k = -1 получим уравнение

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1$

$X_{1,2} = \pm 1$

$|-1| = |1|$

Ответ: при $k = -1$ корни уравнения равны по модулю.

2) Найти значение р квадратного уравнения $x^2 + px + 24 = 0$, если известно, что его корни положительны, и их разность равна 2.

3) При каких значениях **а** оба корня квадратного трехчлена $x^2 + 2(a + 1)x + 9a – 5$ отрицательны?

4) При каких значениях параметра **а** корни уравнения $x^2 + ax + 2a = 0$ действительны и оба больше (-1).

5) При каких значениях параметра **а** сумма корней уравнения $4x^2 – 4(a – 1)x + 1 = 0$ отрицательна?

При решении этих примеров используются необходимое и достаточное условие существования двух различных корней, больших данного числа, и теорема Виета.

Учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами показывают глубокие знания свойств функций, изучаемых в курсе математики основной школы, умение логически мыслить, осуществляя анализ и синтез любой задачи школьных образовательных программ и жизненных ситуаций.

Эти ребята имеют грамотную математическую речь, показывают прочные знания по математике и другим предметам.

Они владеют общеучебными умениями и навыками, что позволяет им самостоятельно приобретать знания, развивать свои творческие способности.