МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ МОРДОВИЯ

МОУ «ИНСАРСКАЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ШКОЛА №1»

Конкурс проектно – исследовательских работ «Интеллектуальное будущее Мордовии – 2008»

Секция: математика

Решение уравнений содержащих неизвестную под знаком модуля

Автор работы: ЛУКИНА НИНА, 9 кл;

Научный руководитель: Чудаева Е. В.,

учитель математики

ВНИМАНИЕ!

При использовании наших материалов помните о соблюдении авторских прав!

Объект исследования:

решение уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля

Предмет исследования:

способы решения уравнений

Цель работы:

ознакомление учащихся с теоретическими основами решения уравнений с модулем, рекомендациями к решению, алгоритмирование процесса решения уравнений содержащих неизвестную под знаком модуля

Методы исследования:

1) Работа с литературными источниками.

2) Математическое моделирование постановки задачи для построения графического образа линий, входящих в данное уравнение.

3) Эксперимент: исследование различных подходов и методов решения уравнений; исследование изменения вида кривой, в зависимости от параметров входящих в её уравнение .

Содержание работы

1.1.Определение модуля. Решение по определению.

По определению, модуль, или абсолютная величина, неотрицательного числа *a* совпадает с самим числом, а модуль отрицательного числа равен противоположному числу, то есть – *a*:

$$|a| = \begin{cases} a, \quad если \ a \geq 0, \\ -a, если \ a < 0 \end{cases}$$

Запишем решение простейших уравнений в общем виде:

$$|x| = b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \pm b, \ b > 0 \\ x = 0, \quad b = 0 \\ \varnothing, \qquad b < 0 \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение |*x* –3| = 3 – 2*x.*
Рассматриваем два случая.
При *x* – 3> 0 уравнение принимает вид *x* – 3 = 3 – 2*x*, откуда *x* = 2. Но это значение не удовлетворяет неравенству *x* – 3 > 0, потому не входит в ответ исходного уравнения.
При *x* – 3 < 0 получаем 3 – *x* = 3 – 2*x* и *x* = 0. Этот корень удовлетворяет соответствующему условию *x* – 3 < 0.
Итак, ответ к исходному уравнению: *x* = 0.
Ответ: *x* = 0.

1.2. Решение уравнений по правилам

1-е правило:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \ge 0; \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x) = g(x), \\ f(x) < 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

2-е правило:

$$|f(x)| = g(x) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0; \\ \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x). \end{array}\right. \end{cases}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Фигурные скобки обозначают системы, а квадратные – совокупности.

***Решения системы уравнений** – это значения переменной, одновременно удовлетворяющие всем уравнениям системы.*

***Решениями совокупности уравнений** являются все значения переменной, каждое из которых есть корень хотя бы одного из уравнений совокупности.*

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x), \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Пример . Решить уравнение $|x^2 - x - 6| = |2x^2 + x - 1|$.

Решение. Мы уже знаем, что рассматривать (целых 4) варианта распределения знаков выражений под модулями здесь не нужно: это уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений без каких-либо дополнительных неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 6 = 2x^2 + x - 1, \\ x^2 - x - 6 = -2x^2 - x + 1. \end{array}\right.$$

Которая равносильна: $\left[\begin{array}{l} x^2 + 2x + 5 = 0, \\ 3x^2 = 7. \end{array}\right.$

Первое уравнение совокупности решений не имеет (его дискриминант отрицателен), второе уравнение имеет два корня .

Ответ **:** $-\sqrt{\frac{7}{3}}; \sqrt{\frac{7}{3}}$

Третий способ освобождения от модуля – замена переменной

Пример . Решить уравнение: $(x-7)^2-|x-7|=30.$

Решение. Заметим, что $(x-7)^2=|x-7|^2$, тогда уравнение примет вид:

$|x-7|^2-|x-7|-30=0.$

Пусть $|x-7|=t,\ t\geq 0$, тогда решим квадратное уравнение: $t^2-t-30=0$

Его корни $t_1=6, t_2=-5$, условию $t\geq 0$ удовлетворяет первый корень.

Возвращаясь к переменной *x*, получаем уравнение $|x-7|=6$

решая которое находим: $x=13,\ \ x=1$

Ответ: . $x=13,\ \ x=1$

Задачи с несколькими модулями. Два основных подхода к решению.

«последовательное» раскрытие модулей

Сначала один из модулей изолируется в одной части уравнения (или неравенства) и раскрывается одним из описанных ранее методов. Затем то же самое повторяется с каждым из получившихся в результате уравнений с модулями и так продолжается, пока мы не избавимся ото всех модулей.

«параллельное» раскрытие модулей

Можно снять сразу все модули в уравнении или неравенстве и выписать все возможные сочетания знаков подмодульных выражений. При снятии модуля может получить один из двух знаков – плюс или минус. Эти области определяются знаками выражений под модулями.

Пример. Решить уравнение: $|1-3x|+4|3+x|=12$ 1способ

Решение.

Уединим второй модуль и раскроем его, пользуясь первым способом, то есть просто определением абсолютной величины:

$$4|3+x|=12-|1-3x| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3+x\geqslant 0,\\ 12+4x=12-|1-3x|,\end{cases}\\ \begin{cases}3+x<0,\\ -12-4x=12-|1-3x|\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}3+x\geqslant 0,\\ -4x=|1-3x|,\end{cases}\\ \begin{cases}3+x<0,\\ 24+4x=|1-3x|.\end{cases}\end{array}\right.$$

К полученным двум уравнениям применяем второй способ освобождения от модуля:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-3\leqslant x\leqslant 0,\\ \left[\begin{array}{l}1-3x=-4x,\\ 1-3x=4x,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-6\leqslant x<-3,\\ \left[\begin{array}{l}1-3x=24+4x,\\ 1-3x=-4x-24.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Наконец, решаем получившиеся четыре линейных уравнения и отбираем те их корни, которые удовлетворяют соответствующим неравенствам :

Ответ: -1; $-\frac{23}{7}$

2способ

Пример. Решить уравнение: $|1-3x|+4|3+x|=12$

Решение.

Рассмотрим 4 возможных набора знаков выражений под модулями.

1. $1-3x \ge 0,\ 3+x \ge 0$: $(1-3x)+4(3+x)=12 \Leftrightarrow x=-1.$
2. $1-3x < 0,\ 3+x \ge 0$: $-(1-3x)+4(3+x)=12 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{7}.$
3. $1-3x \ge 0,\ 3+x < 0$: $(1-3x)-4(3+x)=12 \Leftrightarrow x=-\dfrac{23}{7}.$
4. $1-3x < 0,\ 3+x < 0$: $-(1-3x)-4(3+x)=12 \Leftrightarrow x=-25.$

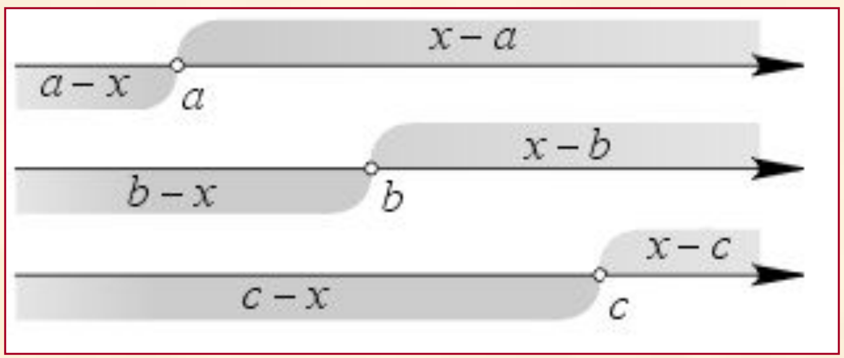
Лишь первый и третий из этих корней удовлетворяют соответствующим неравенствам, а значит, и исходному уравнению.

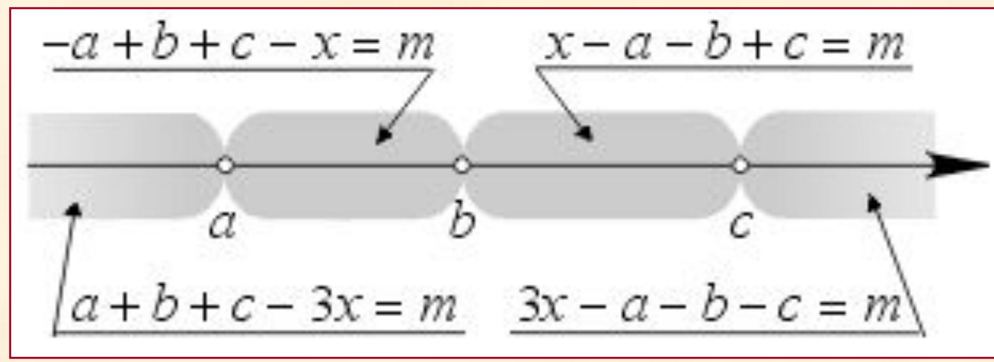
Ответ: -1; $-\dfrac{23}{7}$

Метод интервалов в задачах с модулями.

Пусть имеется уравнение, в которое входят три модуля от линейных выражений; например: **$|x - a| + |x - b| + |x - c| = m$.**

Первый модуль равен $x - a$ при x ³ a и $a - x$ при $x < a$. Второй равен $x - b$ или $b - x$ при x ³ b и $x < b$ соответственно. Аналогично раскрывается и третий модуль. Нарисуем эти области и возьмем их пересечения.





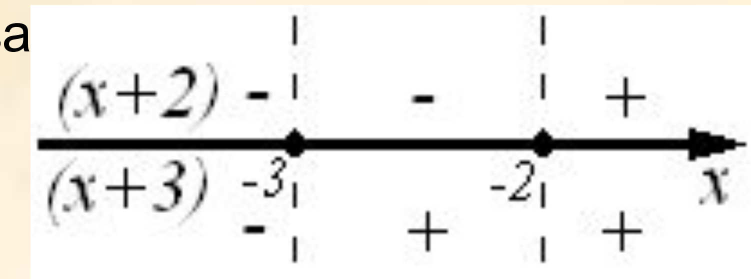
В частности, если все выражения под модулями рациональны, то достаточно отметить на оси их корни, а также точки, где они не определены, то есть корни их знаменателей. Отмеченные точки и задают искомые промежутки знакопостоянства.

Пример. Решить уравнение: $|x+2|+|x+3|=x$

Решение.

Найдем нули функции ***x+2=0*** или ***x+3=0*** , откуда ***x=-2 , x=-3***. Рассмотрим 3 возможных набора знаков выражений под модулями.

Решаем задачу на каждом интерва



$$1)\, x<-3: \quad -x-2-x-3=x, \; -3x=5 \;\Rightarrow\; x=-\frac{5}{3} \;\notin\; (-\infty;-3)$$

$$2)\, -3\le x<-2: \quad -x-2+x+3=x, \; x=-5 \;\Rightarrow\; x=-5 \;\notin\; [-3;-2)$$

$$3)\, x\ge -2: \quad x+2+x+3=x, \; x=-5 \;\Rightarrow\; x=-5 \;\notin\; [-2;+\infty)$$

Итак, данное уравнение не имеет решений.

Ответ: $\varnothing$

Вложенные модули

Последовательное раскрытие модулей наиболее эффективно в "задачах-матрешках", где внутри одного модуля находится другой, а то и несколько.

Пример. Решить уравнение: $\left||x-1|+2\right|=3$

Решение.

Освободимся от внешнего модуля, получим:

$$\left[\begin{array}{l}|x-1|+2=3,\\ |x-1|+2=-3;\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|x-1|=1,\\ |x-1|=-5.\end{array}\right.$$

Второе уравнение совокупности решений не имеет, так как модуль всегда положителен, а первое уравнение

равносильно совокупности: $\left[\begin{array}{l}x-1=1,\\ x-1=-1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=0.\end{array}\right.$

Ответ: 0; 2.

Модули и квадраты

Существует простой и быстрый способ освобождения от знака модуля в уравнениях вида |*f*(*x*)| = |*g*(*x*)|: $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x)$

Он основан на двух очевидных соображениях. Во-первых, из двух неотрицательных чисел то больше, квадрат которого больше, а если квадраты равны, то и числа равны: $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$; $a = b \Leftrightarrow a^2 = b^2$.

Во-вторых, квадрат модуля числа равен квадрату самого числа: $|a|^2 = a^2$. Поэтому допускается такое равносильное преобразование:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x) \Leftrightarrow \big(f(x)+g(x)\big)\big(f(x)-g(x)\big) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$$

Эту же идею можно применить к уравнениям или неравенствам, одна часть которых равна нулю, а другая содержит разность модулей как сомножитель. В такой задаче разность модулей можно заменить разностью квадратов тех же выражений: $\big(|f(x)| - |g(x)|\big)h(x) > 0 \Leftrightarrow \big(f^2(x) - g^2(x)\big)h(x) > 0$

Модули неотрицательных выражений.

Пример 1. Решить уравнение: $\left|\left|\ldots\left|\left|x\right|+1\right|+\ldots\right|+10\right|=55$

Решение.

Нетрудно догадаться, что все выражения, стоящие под знаком второго, третьего и т.д. модулей положительны. И поскольку модуль положительного выражения равен самому этому выражению, получим

$$\left|\left|\ldots\left|\left|x\right|+1\right|+\ldots\right|+10\right|=55 \Leftrightarrow \left|x\right|+1+2+\ldots+10=55 \Leftrightarrow \left|x\right|=0 \Leftrightarrow x=0$$

Ответ: 0

Пример 2. Решить уравнение: $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$

Решение.

Воспользуемся тождеством $\sqrt{f^2(x)}=\left|f(x)\right|$, и получим уравнение $\left|x+1\right|-\left|x-2\right|=3$, решая которое методом интервалов получим ответ

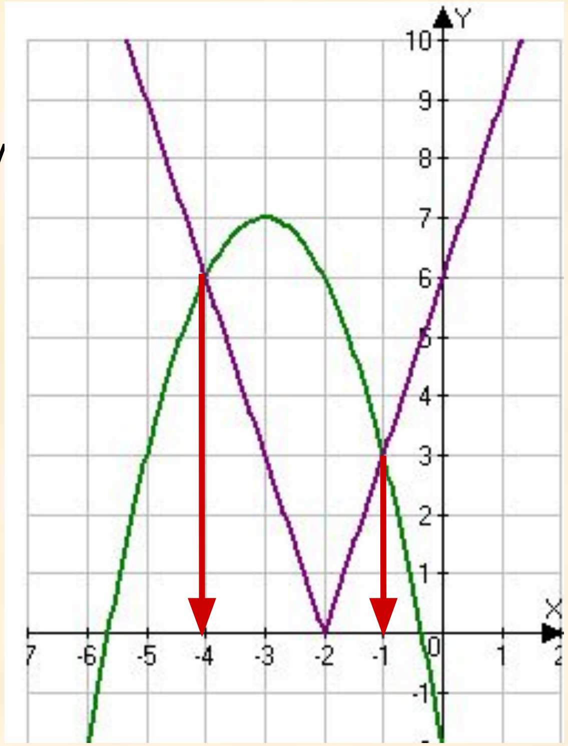
Ответ: $x\in\left[2;+\infty\right)$

Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

Решить уравнение : 3| *x* + 2 | + *x* ² + 6*x* + 2 = 0.

Для решения уравнения графическим способом надо построить графики функций

$$y = 3|x+2| \qquad y = -x^2 - 6x - 2$$



Парабола пересеклась с «уголком» в точках с координатами (-4; 6) и (-1; 3), следовательно, решениями уравнения будут абсциссы точек: $x = -1, x = -4$

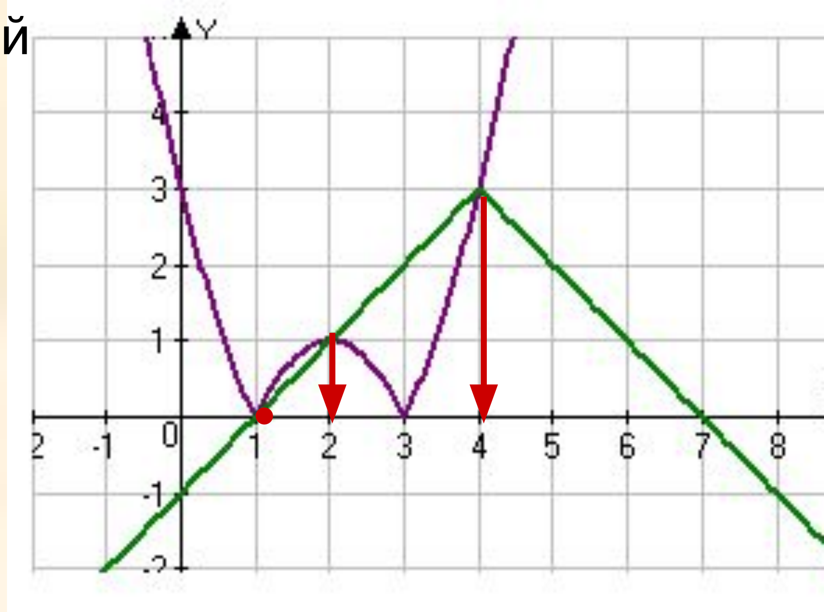
Ответ: $x = -1, x = -4$

Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

Решить равнение: | 4 – *x* | + | (*x* – 1)(*x* – 3) | = 3.

Для решения уравнения графическим способом, надо построить графики функций

$$y = 3 - |4 - x| \qquad y = |(x-1)(x-3)|$$



Парабола пересеклась с «уголком» в точках с координатами (1; 0), (2; 1) и (4; 3), следовательно, решениями уравнения будут абсциссы точек:

$$x = 1, x = 2, x = 4$$

Ответ: $x = 1, x = 2, x = 4$

Графическое решение уравнений, содержащих знак абсолютной величины.

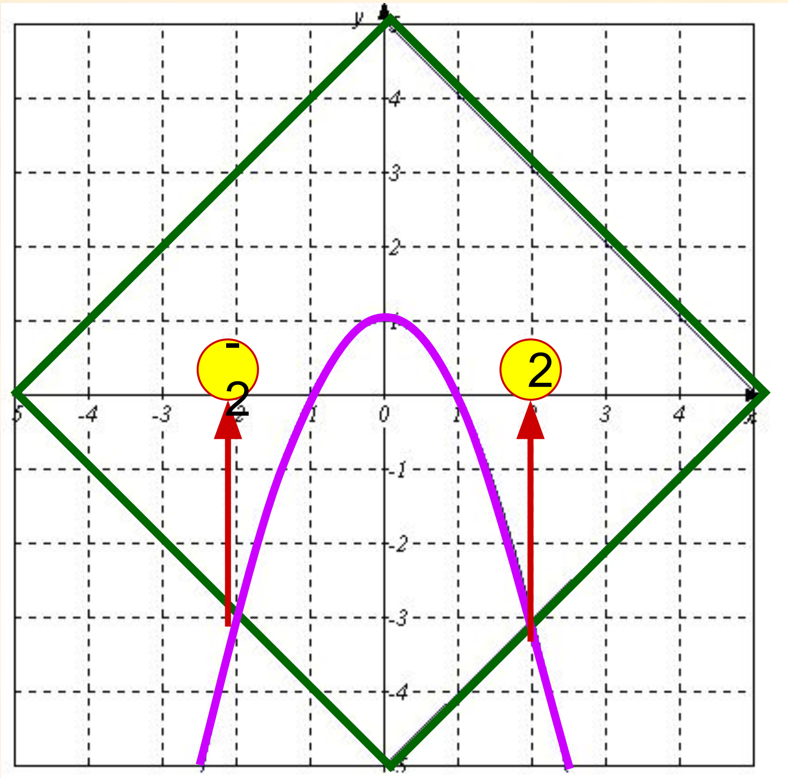
Решить графически уравнение $\begin{cases} 1 - x^2 = y \\ |x| + |y| = 5 \end{cases}$

Для решения уравнения графическим способом, надо построить графики:

$|y| = 5 - |x|$ $\qquad y = 1 - x^2$

Эти графики пересекаются в двух точках (-2; -3) и (2; 3), следовательно, исходное уравнение имеет два решения

$$x = -2, x = 2$$



Ответ: $x = -2, x = 2$

Найти все значения *а*, при которых уравнение

$$(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$$

имеет ровно три корня?

Данное уравнение равносильно совокупности

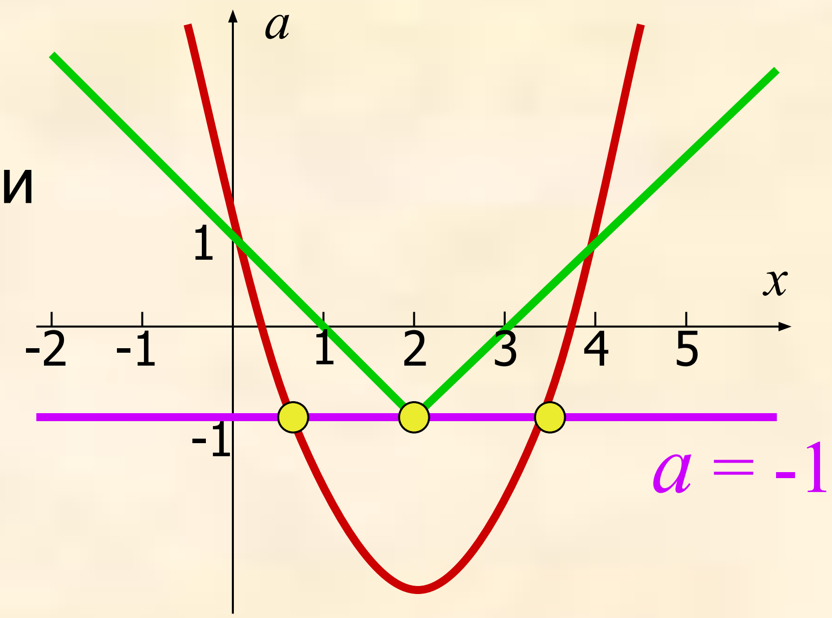
$$\left[\begin{array}{l} a-x^2+4x-1=0 \\ a-|x-2|+1=0 \end{array}\right.$$

Выражая параметр *а*, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} a=x^2-4x+1 \\ a=|x-2|-1 \end{array}\right.$$

График этой совокупности – объединение уголка и параболы.

Прямая $a=-1$ пересекает полученное объединение в трех точках.



Ответ: $a=-1$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе работы над темой «Решение уравнений содержащих неизвестную под знаком модуля» мы:

- ***Изучили литературу по данному вопросу.***
- ***Познакомились с алгебраическим и графическим подходом к решению уравнений, содержащих неизвестную под знаком модуля.***
- ***Исследовали количество решений уравнения, в зависимости от параметров входящих в её условие.***

и пришли к выводу:

2. ***В ряде случаев при решении уравнений с модулем, возможно, решать уравнения по правилам, а иногда удобнее воспользоваться геометрический способ решения, который, к сожалению, не всегда применим, из-за сложности изображения линий входящих в условие задачи.***
3. ***При решении уравнений, содержащих модуль и параметр, графический способ является более наглядным и сравнительно более простым.***