# Решение уравнений, содержащих переменную под знаком модуля

Учитель математики Подгорная Н. П.
МБОУ"Скородняская СОШ"

# Модули обычно представляют трудность практически для всех обучающихся.

Доля уравнений, содержащих переменную под знаком модуля, в наших учебниках стремится к нулю. Именно поэтому школьники **не приобретают прочных навыков** обращения с модулем.

?!

В то же время это **одна из** любимейших **тем** авторов - составителей **заданий ГИА** по математике. В заданиях части С модуль, как правило, либо содержится в условии, либо возникает в процессе решения.

Поэтому, задача учителя помочь обучающимся научиться обращаться с такими заданиями правильно, вооружить их различными приёмами и способами решения уравнений с модулем.

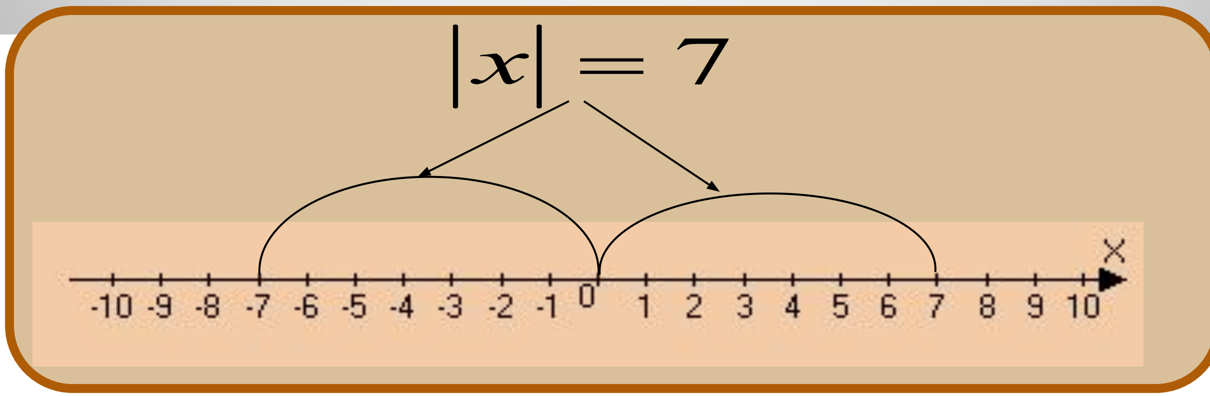
Мало кто из учащихся к 11 классу помнит о смысле понятия «модуль». Если же найдутся те, кто помнит формально – описательную структуру для раскрытия модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{åñëè} \quad x \geq 0 \\ -x, & \text{åñëè} \quad x < 0 \end{cases}$$

то скорее всего дальше этой записи дело не пойдёт, так как учащиеся совершенно не могут её применять при решении уравнений.

Поэтому в первую очередь на самых простых примерах восстанавливаем представление о понятии «модуль». Правило из трёх слов

МОДУЛЬ - ЭТО РАССТОЯНИЕ



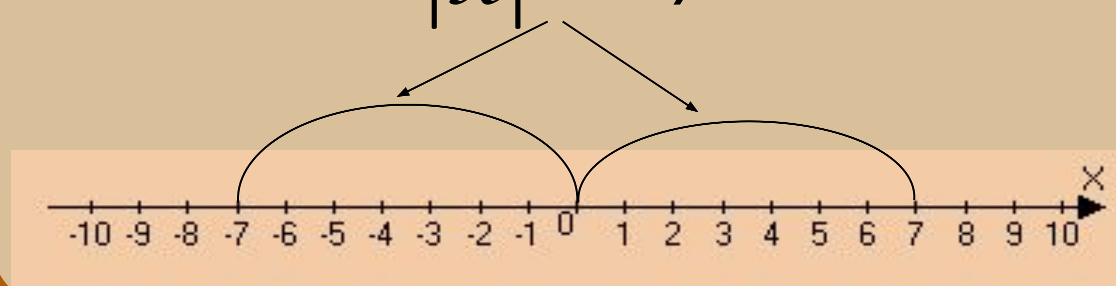

должен запомнить каждый. А затем уточняем, расстояние между чем и чем.

**Оставляя на доске рисунок, который будет играть роль «подсказки - напоминания», предлагаем учащимся решить уравнения**

$$|3x+1| = 7, \quad |1-2x| = 43, \quad |11+10x| = 1 \text{ è } |7-3x| = 11$$

# МОДУЛЬ - ЭТО РАССТОЯНИЕ

$$|x| = 7$$



$$|3x+1|=7,$$
$$\begin{cases}3x+1=7,\\ 3x+1=-7;\end{cases}$$
$$\begin{cases}3x=6,\\ 3x=-8;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=2,\\ x=-\frac{8}{3}.\end{cases}$$
Îòâåò $:-\frac{8}{3};\quad 2.$

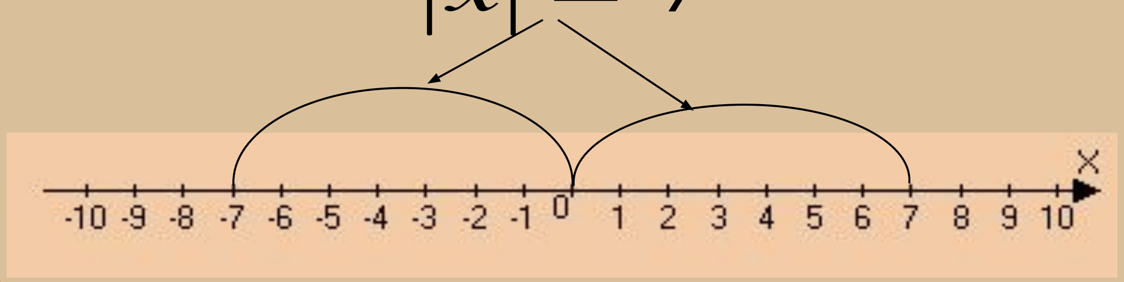
$$|1-2x|=43,$$
$$\begin{cases}1-2x=43,\\ 1-2x=-43;\end{cases}$$
$$\begin{cases}-2x=42,\\ -2x=-44;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=-21,\\ x=22.\end{cases}$$
Îòâåò $:-21; 22.$

$$|11+10x|=1$$
$$\begin{cases}11+10x=1,\\ 11+10x=-1;\end{cases}$$
$$\begin{cases}10x=-10,\\ 10x=-12;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=-1,\\ x=-1{,}2.\end{cases}$$
Îòâåò $:-1{,}2; -1.$

$$|7-3x|=11$$
$$\begin{cases}7-3x=11,\\ 7-3x=-11;\end{cases}$$
$$\begin{cases}-3x=4,\\ -3x=-18;\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=-\frac{4}{3},\\ x=6.\end{cases}$$
Îòâåò $:-\frac{4}{3}; 6.$

# МОДУЛЬ - ЭТО РАССТОЯНИЕ

$$|x|=7$$



# Затем, предлагаем уравнения посложнее:

$$||x|-6|=5,$$

$$\begin{cases}|x|-6=5,\\ |x|-6=-5;\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x|=11,\\ |x|=1;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pm 11,\\ x=\pm 1.\end{cases}$$

Îòâåò $:-11;-1;1;11.$

$$|||x-1|+2|-1|+1|=2,$$

$$\begin{cases}|||x-1|+2|-1|+1=2,\\ |||x-1|+2|-1|+1=-2;\end{cases}\begin{cases}|||x-1|+2|-1|=1,\\ |||x-1|+2|-1|=-3;\end{cases}$$

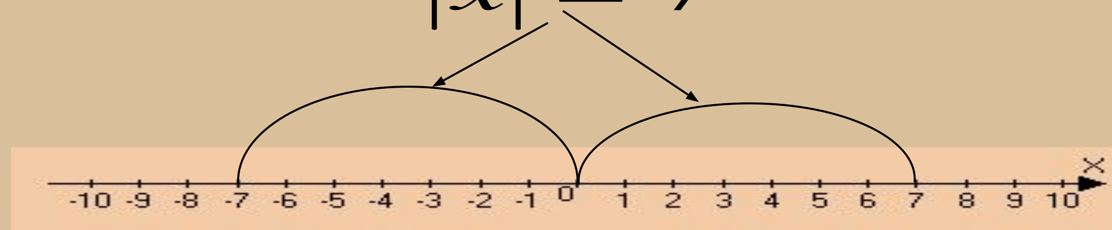
$$\begin{cases}||x-1|+2|-1=1,\\ ||x-1|+2|-1=-1;\end{cases}\quad\begin{cases}||x-1|+2|=2,\\ ||x-1|+2|=0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}|x-1|+2=2,\\ |x-1|+2=-2,\\ |x-1|+2=0;\end{cases}\begin{cases}|x-1|=0,\\ |x-1|=-4,\\ |x-1|=-2;\end{cases}x-1=0,\ x=1.$$

Îòâåò $:1.$

## МОДУЛЬ - ЭТО РАССТОЯНИЕ

$$|x|=7$$

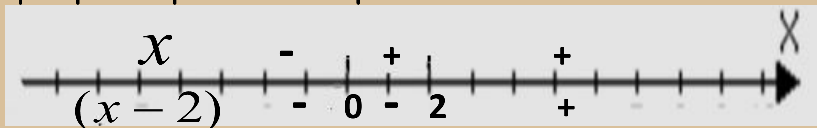


Следующий шаг в освоении этой темы – решение уравнений, содержащих несколько выражений, стоящих под знаками модуля. Для их решения воспользуемся методом последовательного раскрытия модулей.

1. Находим точки в которых каждое выражение, стоящее под знаком модуля, может менять свой знак.
2. Отмечаем найденные точки на числовой оси. (Мы получили интервалы знакопостоянства выражений, стоящих под знаками модуля.)
3. На каждом интервале модули выражений раскрываем в соответствии с их знаками.

# Решим уравнения:

$$|x| + |x-2| = 2$$




$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<0, \\ -x-(x-2)=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\le x\le 2, \\ x-(x-2)=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x+x-2=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<0, \\ -2x+2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\le x\le 2, \\ 2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ 2x-2=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<0, \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0\le x\le 2, \\ 2=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2, \\ x=2 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow 0\le x\le 2.$$

Îòâåò $:[0;2].$

$$|x+2| + |x-3| = 5$$


$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ -(x+2)-(x-3)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 3, \\ (x+2)-(x-3)=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ (x+2)+(x-3)=5 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ -2x+1=5 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 3, \\ 5=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ 2x-1=5 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x<-2, \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} -2\le x\le 3, \\ 5=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ x=3 \end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow -2\le x\le 3.$$

Îòâåò $:[-2;3].$

**Следующий шаг - решение уравнений вида $|f(x)| = g(x)$. Из определения и свойств модуля непосредственно следует,**

$$|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

**Поэтому,**

$$x^2 + 4|x-3| - 7x + 11 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 + 4(x-3) - 7x + 11 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 4(x-3) - 7x + 11 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ x^2 - 3x - 1 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x^2 - 11x + 23 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{3-\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{11-\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{11+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{11-\sqrt{29}}{2} \end{array}\right..$$

Îòâåò $: \frac{11-\sqrt{29}}{2}; \frac{3+\sqrt{13}}{2}.$

**Но чаще бывает выгодно использовать область значений функции** $y=|f(x)|$ **и записать другую систему, равносильную этому уравнению:**

$$|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ f^2(x)=g^2(x)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x).\end{array}\right.\end{cases}$$

$$|x+2|=2(3-x)\Leftrightarrow\begin{cases}3-x\geq 0,\\ \left[\begin{array}{l}x+2=6-2x\\ x+2=2x-6\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 3,\\ \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{4}{3}\\ x=8\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=1\frac{1}{3}.$$

Îòâåò $:1\dfrac{1}{3}.$

**Решим уравнения:**

$$|2\lg x-3|=3\lg x-2$$

$$|2^{x+1}-7|=5-2^{x}$$

$$|2\lg x-3|=3\lg x-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ 3\lg x-2\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2\lg x-3=3\lg x-2 \\ 2\lg x-3=2-3\lg x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \lg x\ge \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} -\lg x=1 \\ 5\lg x=5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \lg x\ge \frac{2}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x=0{,}1 \\ x=10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=10.$$

*Îòâåò* $:10.$

$$|2^{x+1}-7|=5-2^{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5-2^{x}\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 2^{x+1}-7=5-2^{x} \\ 2l^{x+1}-7=2^{x}-5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x}\le 5, \\ \left[\begin{array}{l} 3\cdot 2^{x}=12 \Leftrightarrow \\ 2^{x}=2 \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{x}\le 5, \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=1. \end{array}\right.$$

*Îòâåò* $:1;\ 2.$

Уважаемые коллеги, спасибо за внимание!

Надеюсь, этот материал будет вам полезен!