

# Решение уравнений с одной переменной, степень которых больше двух.



*Уравнения, решаемые методом разложения на множители.*



*Уравнения, сводящиеся к квадратным.*

# Алгоритм

1. *Разложить левую часть уравнения на множители.*

+



- вынесение за скобки общего множителя;
- формулы сокращенного умножения;
- способ группировки;
- деление многочлена на многочлен.

2. *Приравнять каждый множитель к нулю.*

- произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом имеют смысл.

3. *Решить каждое уравнение отдельно.*

4. *Записать ответ.*



# Уравнения, решаемые методом разложения на множители.

## Пример 1

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x + 3 = 0$$

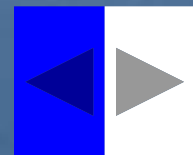
$$x = -3$$

Ответ: -3; 0; 3.

Вынести за скобки  
общий множитель

Формула сокращенного  
умножения

Произведение равно нулю,  
когда один из множителей  
равен нулю, а все остальные  
при этом существуют



## Пример 2

Применим способ группировки

$$a^3 - 2 - a + 2a^2 = 0$$

Вынесение за скобки общего множителя

$$(a^3 - a) + (2a^2 - 2) = 0$$

Вынесение за скобки общего множителя

$$a(a^2 - 1) + 2(a^2 - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю

$$(a^2 - 1)(a + 2) = 0$$

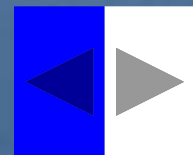
$$a^2 - 1 = 0$$

$$a + 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \pm 1$$

$$a = -2$$

Ответ: - 2; -1; 1.



## Пример 3

Применить алгоритм деления  
многочлена на многочлен

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Произведение равно нулю,  
когда один из множителей  
равен нулю

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

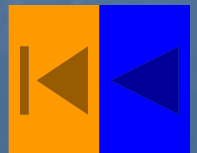
$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Ответ: -2; 1; 3.



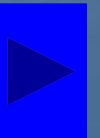
# Вынесение за скобки общего множителя

## Алгоритм

- найти общий множитель;
- вынести его за скобки.

Пример:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$



# Формулы сокращенного умножения

1. Формула разности квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Пример:

$$4a^2 - 25b^2 = (2a - 5b)(2a + 5b)$$

2. Формула квадрата суммы

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Пример:

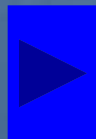
$$a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)^2 = (a + 3b)(a + 3b)$$

3. Формула квадрата разности

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Пример:

$$4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 = (2a - b)(2a - b)$$



## Способ группировки

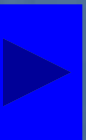
применяется к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена.

### Алгоритм

1. Объединить члены многочлена в группы, имеющие общий множитель.
2. Вынести общий множитель за скобки.

Пример:

$$\begin{aligned}av - 2c - bc + 2a &= (av - bc) + (2a - 2c) = \\ &= v(a - c) + 2(a - c) = (a - c)(v + 2)\end{aligned}$$





# Алгоритм

1. Найти целый корень многочлена  $P_n(x)$ , если такой есть.

- выписать все делители свободного члена;

- подставляя поочередно каждый делитель в многочлен  $P_n(x)$  вместо переменной  $x$ , выяснить, при каком значении  $x$   $P_n(x) = 0$ , это значение  $x$  и будет корнем многочлена  $P_n(x)$ .

2. Понизить степень этого многочлена.

- разделить многочлен  $P_n(x)$  на  $(x - x_1)$ , где  $x_1$  - корень многочлена

$$P_n(x) : (x - x_1) = P_{n-1}(x)$$

3. Найти целый корень многочлена  $P_{n-1}(x)$ , если такой есть. (аналогично п.1)

4. Понизить степень многочлена  $P_{n-1}(x)$

- разделить многочлен  $P_{n-1}(x)$  на  $(x - x_2)$ , где  $x_2$  - корень многочлена

$$P_{n-1}(x) : (x - x_2) = P_{n-2}(x)$$

5. Повторять п.1 и п.2, пока не получим многочлен первой степени.

Пример:  $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Найти делители числа 6. 6 делится на -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6.

- Найти целый корень многочлена  $P_3(x) = 0$

если  $x = -1$ , то  $P_3(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 \neq 0$

$x = -1$  не является корнем уравнения

если  $x = 1$ , то  $P_3(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$

- Понизить степень многочлена  $x = 1$  является корнем уравнения (разделить  $P_3(x)$  на  $(x - 1)$ )

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 - x - 6 \\ -x^2 - 5x & \\ \underline{-x^2 + x} & \\ -6x + 6 & \\ \underline{-6x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$P_2(x) = x^2 - x - 6$$

$$P_3(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

- Найти делители числа 6. 6 делится на 6; 3; 2; 1; -1; -2; -3; -6.

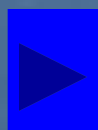
- Найти целый корень многочлена  $P_2(x) = 0$

если  $x = 3$ , то  $P_2(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$ . Тогда  $x = 3$  является корнем

- Понизить степень многочлена (разделить  $P_2(x)$  на  $(x - 3)$ ) уравнения

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 6 & x - 3 \\ \underline{x^2 - 3x} & x + 2 \\ 2x - 6 & \\ \underline{2x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$

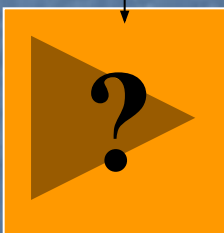


# Уравнения, сводящиеся к квадратным

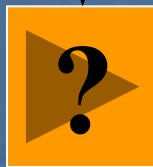
сводящиеся к квадратным  
посредством  
введения новой переменной

биквадратные  
уравнения

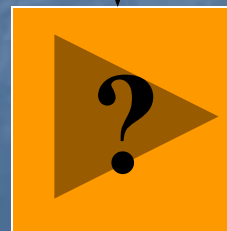
?



возвратные \*  
уравнения



дробно-рациональные  
уравнения



Биквадратными уравнениями  
называют уравнения вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

### Алгоритм

1. Заменить  $x^2 = t$ .
2. Решить квадратное уравнение  
 $at^2 + bt + c = 0$  относительно  $t$ .
3. Решить уравнения  $x^2 = t$ .
4. Записать ответ.

# Пример.

Заменяем  $x^2$  на  $t$

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

Пусть  $x^2 = t$ , тогда

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -5 \quad c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$D = 9 > 0$  два  
корня

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4}; \quad t = \frac{1}{4}; \quad t = 1$$

Решим уравнение  $x^2 = t$

1. Если  $t = \frac{1}{4}$ , то  $x^2 = \frac{1}{4}$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

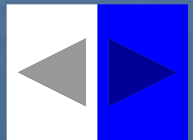
$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

2. Если  $t = 1$ , то  $x^2 = 1$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{1}$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Ответ:  $-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}; 1.$



Уравнения, сводящиеся к квадратным  
посредством введения новой  
переменной

$$(ax^2 + bx)^2 - c(ax^2 + bx) + d = 0$$

Алгоритм

1. Найти в левой части уравнения дважды встречающиеся выражения (один раз в квадрате, другой раз в первой степени).
2. Ввести новую переменную, подставив ее в уравнение вместо повторяющегося выражения.  
 $ax^2 + bx$   
 $ax^2 + bx = t$
3. Решить квадратное уравнение относительно новой переменной. Найти  $t$ .  
 $t^2 - ct + d = 0$
4. Решить уравнения  $ax^2 + bx = t$ .
5. Записать ответ.

## Пример

Найдем дважды встречающееся выражение  
Введем новую переменную

$$(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$$

Пусть  $x^2 + 2x + 4 = t$ , тогда

Решим квадратное уравнение

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

Применим теорему обратную теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ t_1 \cdot t_2 = 12 \end{cases} \quad t_1 = 3; t_2 = 4$$

Решим уравнение

$$x^2 + 2x + 4 = t$$

1. Если  $t = 3$ , то

$$x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

2. Если  $t = 4$ , то

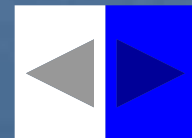
$$x^2 + 2x + 4 = 4$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -2$$

Ответ:  $-2; -1; 0$ .



# Возвратные уравнения

уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m = 0$$

от произвольного уравнения четвертой степени его отличает то, что крайние коэффициенты

***a*** и ***m*** связаны с коэффициентами ***b*** и ***d*** следующим соотношением

$$\frac{m}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$$



## Алгоритм

1. Так как  $\frac{m}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$ , обозначим  $\frac{d}{b} = e$ , тогда  $d = be$ ,  $m = ae^2$
2. Уравнение примет вид.  $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bex + ae^2 = 0$
3. Объединить I и V, II и IV слагаемые. Разделить обе части уравнения на  $x^2$  ( $x^2 \neq 0$ , т.к.  $m \neq 0$ ). Вынести общие множители за скобки.  
$$a\left(x^2 + \frac{e^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{e}{x}\right) + c = 0$$
4. Ввести новую переменную  $y = x + \frac{e}{x}$   
тогда 
$$x^2 + \frac{e^2}{x^2} = \left(x + \frac{e}{x}\right)^2 - 2e = y^2 - 2e$$
5. Сделать подстановку в уравнение из пункта 3 и решить получившееся квадратное уравнение. Найдем  $y$ .
6. Вернуться к уравнению  $y = x + \frac{e}{x}$  и решить его.
7. Записать ответ.

## Пример:

Объединим I и V, II и IV слагаемые

$$x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x^4 + 25) + (2x^3 - 10x) - 18x^2 = 0$$

Разделим обе части на  $x^2$ , вынесем общий множитель за скобки

$$\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) + 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 18 = 0$$

Введем новую переменную

Пусть  $y = x - \frac{5}{x}$  тогда  $y^2 = x^2 - 10 + \frac{25}{x^2}$   
следовательно  $x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$

Вернемся к переменной  $x$

Уравнение примет вид

$$y^2 + 10 + 2y - 18 = 0$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \quad y = 2 \quad y = -4$$

1. Если  $y = 2$ , то

$$x - \frac{5}{x} = 2$$

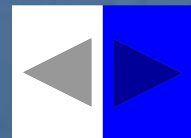
$$x = 1 + \sqrt{6} \quad x = 1 - \sqrt{6}$$

2. Если  $y = -4$ , то

$$x - \frac{5}{x} = -4$$

$$x = 1 \quad x = -5$$

Ответ:  $-5; 1 - \sqrt{6}; 1; 1 + \sqrt{6}$



# Дробно – рациональные уравнения уравнения вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \dots + \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = 0$$

где  $P_1(x); P_2(x); P_3(x); \dots; P_m(x); \dots; Q_1(x);$   
 $Q_2(x); Q_3(x); \dots; Q_m(x); \dots$  – многочлены  
от неизвестного  $X$

## Алгоритм

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить получившееся целое уравнение.
4. Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.
5. Записать ответ.

Пример:  $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$

Найдем общий знаменатель дробей

Общий знаменатель дробей  $x(x-5)$

$$x(x-3) + (x-5) = x+5$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель

Упростим уравнение

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Найдем корни квадратного уравнения

$$x = -2; \quad x = 5.$$

Проверим, являются ли эти числа корнями исходного уравнения

Пусть  $x = -2$ , тогда  $-2(-2-5) \neq 0$

общий знаменатель  $x(x-5)$  не обращается в ноль, значит число  $-2$  является корнем уравнения

Пусть  $x = 5$ , тогда  $5(5-5) = 0$

общий знаменатель  $x(x-5)$  обращается в ноль,

выражения  $\frac{x-3}{x-5}$  и  $\frac{x+5}{x(x-5)}$  теряют смысл.

$5$  не является корнем уравнения.

Ответ:  $-2$ .

