

Решение уравнений с одной переменной, степень которых больше двух.



Уравнения, решаемые методом разложения на множители.



Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Алгоритм

1. *Разложить левую часть уравнения на множители.*

+



- вынесение за скобки общего множителя;
- формулы сокращенного умножения;
- способ группировки;
- деление многочлена на многочлен.

2. *Приравнять каждый множитель к нулю.*

- произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом имеют смысл.

3. *Решить каждое уравнение отдельно.*

4. *Записать ответ.*



Уравнения, решаемые методом разложения на множители.

Пример 1

$$x^3 - 9x = 0$$

$$x(x^2 - 9) = 0$$

$$x(x - 3)(x + 3) = 0$$

$$x = 0$$

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x + 3 = 0$$

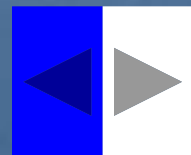
$$x = -3$$

Ответ: -3; 0; 3.

Вынести за скобки
общий множитель

Формула сокращенного
умножения

Произведение равно нулю,
когда один из множителей
равен нулю, а все остальные
при этом существуют



Пример 2

Применим способ группировки

$$a^3 - 2 - a + 2a^2 = 0$$

Вынесение за скобки общего множителя

$$(a^3 - a) + (2a^2 - 2) = 0$$

Вынесение за скобки общего множителя

$$a(a^2 - 1) + 2(a^2 - 1) = 0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю

$$(a^2 - 1)(a + 2) = 0$$

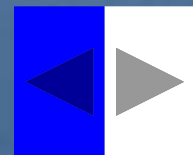
$$a^2 - 1 = 0$$

$$a + 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \pm 1$$

$$a = -2$$

Ответ: - 2; -1; 1.



Пример 3

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Применить алгоритм деления
многочлена на многочлен

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$$

Произведение равно нулю,
когда один из множителей
равен нулю

$$x - 1 = 0$$

$$x = 1$$

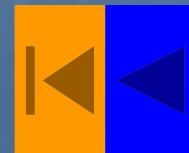
$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

$$x + 2 = 0$$

$$x = -2$$

Ответ: -2; 1; 3.



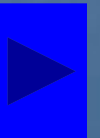
Вынесение за скобки общего множителя

Алгоритм

- найти общий множитель;
- вынести его за скобки.

Пример:

$$ab + ac - ad = a(b + c - d)$$



Формулы сокращенного умножения

1. Формула разности квадратов

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Пример:

$$4a^2 - 25b^2 = (2a - 5b)(2a + 5b)$$

2. Формула квадрата суммы

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Пример:

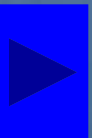
$$a^2 + 6ab + 9b^2 = (a + 3b)^2 = (a + 3b)(a + 3b)$$

3. Формула квадрата разности

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Пример:

$$4a^2 - 4ab + b^2 = (2a - b)^2 = (2a - b)(2a - b)$$



Способ группировки

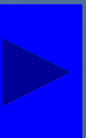
применяется к многочленам, которые не имеют общего множителя для всех членов многочлена.

Алгоритм

1. Объединить члены многочлена в группы, имеющие общий множитель.
2. Вынести общий множитель за скобки.

Пример:

$$\begin{aligned}av - 2c - bc + 2a &= (av - bc) + (2a - 2c) = \\ &= v(a - c) + 2(a - c) = (a - c)(v + 2)\end{aligned}$$



Алгоритм

1. Найти целый корень многочлена $P_n(x)$, если такой есть.

- выписать все делители свободного члена;

- подставляя поочередно каждый делитель в многочлен $P_n(x)$ вместо переменной x , выяснить, при каком значении x $P_n(x) = 0$, это значение x и будет корнем многочлена $P_n(x)$.

2. Понизить степень этого многочлена.

- разделить многочлен $P_n(x)$ на $(x - x_1)$, где x_1 - корень многочлена

$$P_n(x) : (x - x_1) = P_{n-1}(x)$$

3. Найти целый корень многочлена $P_{n-1}(x)$, если такой есть. (аналогично п.1)

4. Понизить степень многочлена $P_{n-1}(x)$

- разделить многочлен $P_{n-1}(x)$ на $(x - x_2)$, где x_2 - корень многочлена

$$P_{n-1}(x) : (x - x_2) = P_{n-2}(x)$$

5. Повторять п.1 и п.2, пока не получим многочлен первой степени.

Пример: $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Найти делители числа 6. 6 делится на -1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6.

- Найти целый корень многочлена $P_3(x) = 0$

если $x = -1$, то $P_3(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 \neq 0$

$x = -1$ не является корнем уравнения

если $x = 1$, то $P_3(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$

- Понизить степень многочлена $x = 1$ является корнем уравнения (разделить $P_3(x)$ на $(x - 1)$)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\ \underline{x^3 - x^2} & x^2 - x - 6 \\ -x^2 - 5x & \\ \underline{-x^2 + x} & \\ -6x + 6 & \\ \underline{-6x + 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$P_2(x) = x^2 - x - 6$$

$$P_3(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$$

- Найти делители числа 6. 6 делится на 6; 3; 2; 1; -1; -2; -3; -6.

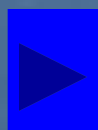
- Найти целый корень многочлена $P_2(x) = 0$

если $x = 3$, то $P_2(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$. Тогда $x = 3$ является корнем

- Понизить степень многочлена (разделить $P_2(x)$ на $(x - 3)$) уравнения

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 6 & x - 3 \\ \underline{x^2 - 3x} & x + 2 \\ 2x - 6 & \\ \underline{2x - 6} & \\ 0 & \end{array}$$

$$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$$



Уравнения, сводящиеся к квадратным

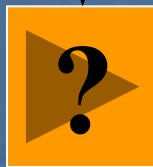
сводящиеся к квадратным
посредством
введения новой переменной

биквадратные
уравнения

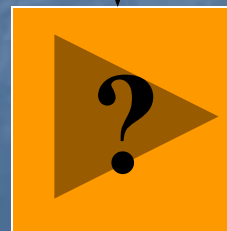
?



возвратные *
уравнения



дробно-рациональные
уравнения



Биквадратными уравнениями
называют уравнения вида

$$ax^4 + bx^2 + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Алгоритм

1. Заменить $x^2 = t$.
2. Решить квадратное уравнение
 $at^2 + bt + c = 0$ относительно t .
3. Решить уравнения $x^2 = t$.
4. Записать ответ.

Пример.

Заменяем x^2 на t

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

Пусть $x^2 = t$, тогда

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$$a = 4 \quad b = -5 \quad c = 1$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$$

$D = 9 > 0$ два
корня

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}; \quad t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4}; \quad t = \frac{1}{4}; \quad t = 1$$

Решим уравнение $x^2 = t$

1. Если $t = \frac{1}{4}$, то $x^2 = \frac{1}{4}$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

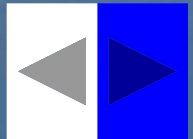
$$x_{1,2} = \pm \frac{1}{2}$$

2. Если $t = 1$, то $x^2 = 1$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{1}$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; -1; \frac{1}{2}; 1.$



Уравнения, сводящиеся к квадратным
посредством введения новой
переменной

$$(ax^2 + bx)^2 - c(ax^2 + bx) + d = 0$$

Алгоритм

1. Найти в левой части уравнения дважды встречающиеся выражения (один раз в квадрате, другой раз в первой степени).
2. Ввести новую переменную, подставив ее в уравнение вместо повторяющегося выражения.
 $ax^2 + bx$
 $ax^2 + bx = t$
3. Решить квадратное уравнение относительно новой переменной. Найти t .
 $t^2 - ct + d = 0$
4. Решить уравнения $ax^2 + bx = t$.
5. Записать ответ.

Пример

Найдем дважды встречающееся выражение
Введем новую переменную

$$(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$$

Пусть $x^2 + 2x + 4 = t$, тогда

Решим квадратное уравнение

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

Применим теорему обратную теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ t_1 \cdot t_2 = 12 \end{cases} \quad t_1 = 3; \quad t_2 = 4$$

Решим уравнение

$$x^2 + 2x + 4 = t$$

1. Если $t = 3$, то

$$x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = -1$$

2. Если $t = 4$, то

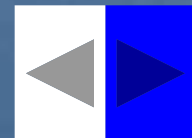
$$x^2 + 2x + 4 = 4$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad x = -2$$

Ответ: $-2; -1; 0$.



Возвратные уравнения

уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m = 0$$

от произвольного уравнения четвертой степени его отличает то, что крайние коэффициенты

a и **m** связаны с коэффициентами **b** и **d** следующим соотношением

$$\frac{m}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$$

Алгоритм

1. Так как $\frac{m}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$, обозначим $\frac{d}{b} = e$, тогда $d = be$, $m = ae^2$
2. Уравнение примет вид. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bex + ae^2 = 0$
3. Объединить I и V, II и IV слагаемые. Разделить обе части уравнения на x^2 ($x^2 \neq 0$, т.к. $m \neq 0$). Вынести общие множители за скобки.
$$a\left(x^2 + \frac{e^2}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{e}{x}\right) + c = 0$$
4. Ввести новую переменную $y = x + \frac{e}{x}$
тогда
$$x^2 + \frac{e^2}{x^2} = \left(x + \frac{e}{x}\right)^2 - 2e = y^2 - 2e$$
5. Сделать подстановку в уравнение из пункта 3 и решить получившееся квадратное уравнение. Найдем y .
6. Вернуться к уравнению $y = x + \frac{e}{x}$ и решить его.
7. Записать ответ.

Пример:

Объединим I и V, II и IV слагаемые

$$x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x^4 + 25) + (2x^3 - 10x) - 18x^2 = 0$$

Разделим обе части на x^2 , вынесем общий множитель за скобки

$$\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) + 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 18 = 0$$

Введем новую переменную

Пусть $y = x - \frac{5}{x}$ тогда $y^2 = x^2 - 10 + \frac{25}{x^2}$
следовательно $x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$

Вернемся к переменной x

Уравнение примет вид

$$y^2 + 10 + 2y - 18 = 0$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \quad y = 2 \quad y = -4$$

1. Если $y = 2$, то

$$x - \frac{5}{x} = 2$$

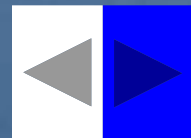
$$x = 1 + \sqrt{6} \quad x = 1 - \sqrt{6}$$

2. Если $y = -4$, то

$$x - \frac{5}{x} = -4$$

$$x = 1 \quad x = -5$$

Ответ: $-5; 1 - \sqrt{6}; 1; 1 + \sqrt{6}$



Дробно – рациональные уравнения уравнения вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \dots + \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = 0$$

где $P_1(x); P_2(x); P_3(x); \dots; P_m(x); \dots; Q_1(x);$
 $Q_2(x); Q_3(x); \dots; Q_m(x); \dots$ – многочлены
от неизвестного X

Алгоритм

1. *Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.*
2. *Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.*
3. *Решить получившееся целое уравнение.*
4. *Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.*
5. *Записать ответ.*

Пример: $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$

Найдем общий знаменатель дробей

Общий знаменатель дробей $x(x-5)$

$$x(x-3) + (x-5) = x+5$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель

Упростим уравнение

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

Найдем корни квадратного уравнения

$$x = -2; \quad x = 5.$$

Проверим, являются ли эти числа корнями исходного уравнения

Пусть $x = -2$, тогда $-2(-2-5) \neq 0$

общий знаменатель $x(x-5)$ не обращается в ноль, значит число -2 является корнем уравнения

Пусть $x = 5$, тогда $5(5-5) = 0$

общий знаменатель $x(x-5)$ обращается в ноль,

выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл.

5 не является корнем уравнения.

Ответ: -2 .

