Решение уравнений с одной переменной, степень которых больше двух.

- *Уравнения, решаемые методом разложения на множители.*
- *Уравнения, сводящиеся к квадратным.*

Разработка учителя математики Потёмкиной Натальи Борисовны
Структурное подразделение ГОУ СОШ № 409 при ФГУ НИДОИ им. Г.И. Турнера,

Алгоритм

1. Разложить левую часть уравнения на множители.
   - вынесение за скобки общего множителя;
   - формулы сокращенного умножения;
   - способ группировки;
   - деление многочлена на многочлен.
2. Приравнять каждый множитель к нулю.
   - произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом имеют смысл.
3. Решить каждое уравнение отдельно.
4. Записать ответ.

Уравнения, решаемые методом разложения на множители.

Пример 1

Вынести за скобки общий множитель

$$x^3 - 9x = 0$$

Формула сокращенного умножения

$$x\,(x^2 - 9) = 0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю, а все остальные при этом существуют

$$x\,(x - 3)(x + 3) = 0$$

$x = 0$ $\quad$ $x - 3 = 0$ $\quad$ $x + 3 = 0$

$x = 3$ $\quad$ $x = -3$

Ответ: -3; 0; 3.

Пример 2

Применим способ группировки

$a^3 - 2 - a + 2a^2 = 0$

Вынесение за скобки общего множителя

$(a^3 - a) + (2a^2 - 2) = 0$

Вынесение за скобки общего множителя

$a(a^2 - 1) + 2(a^2 - 1) = 0$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю

$(a^2 - 1)(a + 2) = 0$

$a^2 - 1 = 0$ $\quad$ $a + 2 = 0$

$a_{1,2} = \pm 1$ $\quad$ $a = -2$

Ответ: - 2; -1; 1.

Пример 3

Применить алгоритм деления многочлена на многочлен

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Произведение равно нулю, когда один из множителей равен нулю

$$(x - 1)(x - 3)(x + 2) = 0$$

$x - 1 = 0$ $x - 3 = 0$ $x + 2 = 0$

$x = 1$ $x = 3$ $x = -2$

Ответ: -2; 1; 3.

Вынесение за скобки общего множителя

Алгоритм

- найти общий множитель;
- вынести его за скобки.

Пример:

$$ab + ac - ad = a\,(b + c - d)$$

Формулы сокращенного умножения

1. Формула разности квадратов

$$a^2 - в^2 = (a - в)(a + в)$$

Пример:

$$4a^2 - 25в^2 = (2a - 5в)(2a + 5в)$$

2. Формула квадрата суммы

$$a^2 + 2aв + в^2 = (a + в)^2 = (a + в)(a + в)$$

Пример:

$$a^2 + 6aв + 9в^2 = (a + 3в)^2 = (a + 3в)(a + 3в)$$

3. Формула квадрата разности

$$a^2 - 2aв + в^2 = (a - в)^2 = (a - в)(a - в)$$

Пример:

$$4a^2 - 4aв + в^2 = (2a - в)^2 = (2a - в)(2a - в)$$

Способ группировки

применяется к многочленам, которые не имеют <u>общего множителя</u> для всех членов многочлена.

Алгоритм

1. *Объединить члены многочлена в группы, имеющие общий множитель.*
2. *Вынести общий множитель за скобки.*

Пример:

ав – 2с – вс + 2а = (ав – вс) + (2а – 2с) =
= в (а – с) + 2 (а – с) = (а – с) (в + 2)

Алгоритм

1. Найти целый корень многочлена $P_n(x)$, если такой есть.

   - выписать все делители свободного члена;

   - подставляя поочередно каждый делитель в многочлен $P_n(x)$ вместо переменной x, выяснить, при каком значении x $P_n(x) = 0$, это значение x и будет корнем многочлена $P_n(x)$.

2. Понизить степень этого многочлена.

   - разделить многочлен $P_n(x)$ на $(x - x_1)$, где x_1 - корень многочлена

   $$P_n(x) : (x - x_1) = P_{n-1}(x)$$

3. Найти целый корень многочлена $P_{n-1}(x)$, если такой есть. (аналогично п.1)

4. Понизить степень многочлена $P_{n-1}(x)$

   - разделить многочлен $P_{n-1}(x)$ на $(x - x_2)$, где x_2 - корень многочлена

   $$P_{n-1}(x) : (x - x_2) = P_{n-2}(x)$$

5. Повторять п.1 и п.2, пока не получим многочлен первой степени.

Пример: $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

- Найти делители числа 6. 6 делится на $-1; 1; -2; 2; -3; 3; -6; 6.$
- Найти целый корень многочлена $P_3(x) = 0$

если $x = -1$, то $P_3(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 - 5(-1) + 6 \neq 0$

$x = -1$ не является корнем уравнения

если $x = 1$, то $P_3(1) = 1^3 - 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 6 = 0$

$x = 1$ является корнем уравнения

- Понизить степень многочлена (разделить $P_3(x)$ на $(x - 1)$)

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 - 5x + 6 & x - 1 \\
\underline{x^3 - x^2} & \overline{x^2 - x - 6} \\
- x^2 - 5x & \\
\underline{- x^2 + x} & \\
- 6x + 6 & \\
\underline{- 6x + 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

$P_2(x) = x^2 - x - 6$

$P_3(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$

- Найти делители числа 6. 6 делится на $6; 3; 2; 1; -1; -2; -3; -6.$
- Найти целый корень многочлена $P_2(x) = 0$

если $x = 3$, то $P_2(3) = 3^2 - 3 - 6 = 0$. Тогда $x = 3$ является корнем уравнения

- Понизить степень многочлена (разделить $P_2(x)$ на $(x - 3)$)

$$
\begin{array}{r|l}
x^2 - x - 6 & x - 3 \\
\underline{x^2 - 3x} & \overline{x + 2} \\
2x - 6 & \\
\underline{2x - 6} & \\
0 &
\end{array}
$$

$P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

Уравнения, сводящиеся к квадратным

сводящиеся к квадратным посредством введения новой переменной

?

возвратные уравнения *

?

биквадратные уравнения

?

дробно-рациональные уравнения

?

Биквадратными уравнениями

называют уравнения вида

$$ax^4 + вx^2 + c = 0, \text{ где } a \neq 0.$$

Алгоритм

1. Заменить $x^2 = t$.
2. Решить квадратное уравнение $at^2 + bt + c = 0$ относительно t.
3. Решить уравнения $x^2 = t$.
4. Записать ответ.

Пример.

Заменим x^2 на t

$$4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$$

Пусть $x^2 = t$, тогда

Решим квадратное уравнение

$$4t^2 - 5t + 1 = 0$$

$a = 4$ $в = -5$ $c = 1$

$Д = в^2 - 4ac$

$Д = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1$

$Д = 9 > 0$ два корня

$t = \dfrac{-в \pm \sqrt{Д}}{2a}$; $t = \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4}$; $t = \dfrac{1}{4}$; $t = 1$

Решим уравнение $x^2 = t$

1. Если $t = \dfrac{1}{4}$, то $x^2 = \dfrac{1}{4}$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

2. Если $t = 1$, то $x^2 = 1$

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{1}$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$; -1; $\dfrac{1}{2}$; 1.

Уравнения, сводящиеся к квадратным посредством введения новой переменной

$$(ax^2 + bx)^2 – c\,(ax^2 + bx) + d = 0$$

Алгоритм

1. Найти в левой части уравнения дважды встречающиеся выражения (один раз в квадрате, другой раз в первой степени). $ax^2 + bx$
2. Ввести новую переменную, подставив ее в уравнение вместо повторяющегося выражения. $ax^2 + bx = t$

   $t^2 - ct + d = 0$
3. Решить квадратное уравнение относительно новой переменной. Найти t.
4. Решить уравнения $ax^2 + bx = t$.
5. Записать ответ.

Найдем дважды встречающееся выражение
Введем новую переменную

Пример

$$(x^2 + 2x + 4)^2 - 7(x^2 + 2x + 4) + 12 = 0$$

Пусть $x^2 + 2x + 4 = t$, тогда

Решим квадратное уравнение

$$t^2 - 7t + 12 = 0$$

Применим теорему обратную теореме Виета:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ t_1 \cdot t_2 = 12 \end{cases} \qquad t_1 = 3;\ t_2 = 4$$

Решим уравнение
$x^2 + 2x + 4 = t$

1. Если $t = 3$, то

$$x^2 + 2x + 4 = 3$$

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 \end{cases} \qquad x_1 = -1\ \ x_2 = -1$$

2. Если $t = 4$, то

$$x^2 + 2x + 4 = 4$$

$$x^2 + 2x = 0$$

$$x(x + 2) = 0$$

$$x = 0 \qquad x = -2$$

Ответ: $-2;\ -1;\ 0.$

Возвратные уравнения

уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + m = 0$$

от произвольного уравнения четвертой степени его отличает то, что крайние коэффициенты **a** и **m** связаны с коэффициентами **b** и **d** следующим соотношением

$$\frac{m}{a} = \left(\frac{d}{b}\right)^2$$

Алгоритм

1. Так как $\frac{m}{a} = (\frac{d}{b})^2$, обозначим $\frac{d}{b} = e$, тогда $d = be$, $m = ae^2$
2. Уравнение примет вид. $ax^4 + bx^3 + cx^2 + bex + ae^2 = 0$
3. Объединить I и V , II и IV слагаемые. Разделить обе части уравнения на x^2 ($x^2 \neq 0$, т.к. $m \neq 0$). Вынести общие множители за скобки. $$a(x^2 + \frac{e^2}{x^2}) + b(x + \frac{e}{x}) + c = 0$$
4. Ввести новую переменную $$y = x + \frac{e}{x}$$ тогда $$x^2 + \frac{e^2}{x^2} = (x + \frac{e}{x})^2 - 2e = y^2 - 2e$$
5. Сделать подстановку в уравнение из пункта 3 и решить получившееся квадратное уравнение. Найдем y.
6. Вернуться к уравнению $y = x + \frac{e}{x}$ и решить его.
7. Записать ответ.

Пример:

Объединим I и V, II и IV слагаемые

$$x^4 + 2x^3 - 18x^2 - 10x + 25 = 0$$

$$(x^4 + 25) + (2x^3 - 10x) - 18x^2 = 0$$

Разделим обе части на x^2, вынесем общий множитель за скобки

$$\left(x^2 + \frac{25}{x^2}\right) + 2\left(x - \frac{5}{x}\right) - 18 = 0$$

Введем новую переменную

Пусть $y = x - \frac{5}{x}$, тогда $y^2 = x^2 - 10 + \frac{25}{x^2}$

следовательно $x^2 + \frac{25}{x^2} = y^2 - 10$

Вернемся к переменной x

Уравнение примет вид

$$y^2 + 10 + 2y - 18 = 0$$

$$y^2 + 2y - 8 = 0 \qquad y = 2 \qquad y = -4$$

1. Если $y = 2$, то

$$x - \frac{5}{x} = 2$$

$x = 1 + \sqrt{6}$ $x = 1 - \sqrt{6}$

2. Если $y = -4$, то

$$x - \frac{5}{x} = -4$$

$x = 1$ $x = -5$

Ответ: $-5;\ 1 - \sqrt{6};\ 1;\ 1 + \sqrt{6}$

Дробно – рациональные уравнения

уравнения вида

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} + \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \ldots + \frac{P_m(x)}{Q_m(x)} = 0$$

где $P_1(x);\ P_2(x);\ P_3(x);\ \ldots;\ P_m(x);\ \ldots;\ Q_1(x);\ Q_2(x);\ Q_3(x);\ \ldots;\ Q_m(x);\ \ldots$ – многочлены от неизвестного x

Алгоритм

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить получившееся целое уравнение.
4. Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.
5. Записать ответ.

Пример: $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$

Найдем общий знаменатель дробей

Общий знаменатель дробей $x(x-5)$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель

$x(x-3) + (x-5) = x + 5$

Упростим уравнение

$x^2 - 3x - 10 = 0$

Найдем корни квадратного уравнения

$x = -2; \quad x = 5.$

Проверим, являются ли эти числа корнями исходного уравнения

Пусть $x = -2$, тогда $-2(-2-5) \neq 0$

общий знаменатель $x(x-5)$ не обращается в ноль, значит число -2 является корнем уравнения

Пусть $x = 5$, тогда $5(5-5) \neq 0$

общий знаменатель $x(x-5)$ обращается в ноль,

выражения $\frac{x-3}{x-5}$ и $\frac{x+5}{x(x-5)}$ теряют смысл.

5 не является корнем уравнения.

Ответ: -2.