Решение уравнений в целых числах. Диофантовы уравнения.

ЖАНАТАЕВА АЛИНА
9 «С»

Диофантовы уравнения

- Алгебраические уравнения с целыми коэффициентами, решаемые во множестве целых чисел, вошли в историю математики как ***диофантовы.***
- Диофантовы уравнения названы по имени последнего древнегреческого математика античности Диофанта Александрийского (III в.)

Биография Диофанта.

- Нам неизвестно, кем был Диофант, точные года его жизни. На могиле Диофанта есть стихотворение-загадка, решая которую нетрудно подсчитать, что Диофант прожил 84 года. О времени жизни Диофанта мы можем судить по работам французского исследователя науки Поля Таннри, и это, вероятно, середина III в.н.э.
- До нас дошло 7 книг из 13, которые были объединены в «Арифметику». Стиль и содержание этих книг резко отличаются от классических античных сочинений по теории чисел и алгебре. «Арифметика», несомненно, явилась результатом многочисленных исследований, многие из которых остались нам неизвестны. Мы можем только гадать о её корнях и изумляться богатству и красоте её методов и результатов.

«Арифметика»

«Арифметика» Диофанта – это сборник задач (их всего 189), каждая из которых снабжена решением и необходимым пояснением. Типично для Диофанта, что его интересуют только положительные целые и рациональные решения. Иррациональные решения он называет «невозможными» и тщательно подбирает коэффициенты так, чтобы получились искомые положительные, рациональные решения. Поэтому, обычно, произвольное неопределенное уравнение (но, как правило, все-таки с целыми коэффициентами) получает титул "диофантово", если хотят подчеркнуть, что его требуется решить в целых числах.

1.Общий вид диафантовых уравнений: $ax+by=c$

Решить уравнение в целых числах

$x-3y=15$

2.Определим частное решение, выразив переменную x из данного уравнения, а переменную y находим, используя метод перебора $(x_0; y_0)$-частное решение.

Используя метод перебора находим значения $y=0$, тогда $x+0=15$, $x=15$. Следовательно, (15;0) - частное решение

3.Все остальные решения находим по формулам:

$x=-bk+x_0$, $k \in Z$

$y=ak+y_0$, $k \in Z$

$x=3k+15$, $k \in Z$

$y=k+0=k$, $k \in Z$

ОТВЕТ:

$(3k+15; k)$, $k \in Z$

Уравнения, решаемые с помощью разложения на множители

- **<u>Суть метода</u>**: сначала первоначальное уравнение путём группировки слагаемых и вынесения общих множителей приводится к виду, когда в левой части уравнения стоит произведение сомножителей, содержащих неизвестные, а справа стоит некоторое число.
- Рассматриваются все делители числа, стоящего в правой части уравнения, затем решается система и выводится ответ.

Решить уравнение в целых числах с помощью разложения на множители.

1. Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению: $x^2 - y^2 = 69$
2. Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение вида: $(x-y)(x+y) = 69$
3. Т.к. делителями числа 69 являются числа 1, 3, 23 и 69, то 69 можно получить двумя способами: 69=1·69 и 69=3·23. Учитывая, что $x - y > 0$
4. Получим две системы:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 69 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 23 \end{cases}$$

5. При решении данных систем получим: 1) $x = 35; y = 34$ 2) $x = 13, y = 10$
6. Ответ: $(35;34),(13;10)$

Использование свойств простых чисел

Решить в натуральных целых числах :19x+89y=1989

1. 19x+89y=1989
   19x-1900=89-89y
   19(x-100)=89(1-y)

2. (19;89) взаимно-простые, то равенство
   19(x-100)=89(1-y) возможно в 3 случаях

3. a) $\begin{cases} x-100=89 \\ 1-y=19 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x-100=-89 \\ 1-y=-19 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x-100=0 \\ 1-y=0 \end{cases}$

   a) x = нет решений

   b) x=11
   y=20

   c) x=100
   y=1

ОТВЕТ: (11;20), (100;1)

Уравнения, решаемые выражением одной переменной через другую с последующим выделением целой части

Решить уравнение в целых числах: $x^2-xy+5x-9=0$.

1) $y=\dfrac{x^2+5x-9}{x}=x+5-\dfrac{9}{x}$, $y \in Z$.

2) $\dfrac{9}{x} \in Z$, если $x=\pm1, \pm3, \pm9$.

3) Следовательно:

а) $x=-1$, $y=13$

б) $x=1$, $y=-3$,

в) $x=-3$, $y=5$

г) $x=3$, $y=5$

д) $x=-9$, $y=-3$

е) $x=9$, $y=13$

Ответ$(-1;13);(1;-3);(-3;5);(3;5);(-9;-3);(9;13)$.

Учет четности, нечетности чисел.

Решить в целых числах уравнение: $x^3+y^3-3xy=2$

1)Если x, y нечетны => x^3-нечетное число

y^3-нечетное число

$3xy$-нечетное число

=> Получаем: нечет+нечет-нечет ≠ чет

2)Если x-четное, y-нечетное => x^3-четное число

y^3-нечетное число

$3xy$-четное число

=> Получаем: чет+нечет-чет ≠ чет

(аналогично, если x-нечетное, y-четное)

3)Если x-четное, y-четное, тогда пусть $x=2m$, $y=2n$

$8m^3+8n^3-12mn=2$

$4(2m^3+2n^3-3mn)=2/:2$

$2(2m^3+2n^3-3mn)=1/:2$

$2m^3+2n^3-3mn= 0,5$

=> невозможно ни при каких целых m и n

ОТВЕТ: решений нет

Учет четности, нечетности чисел.

- Доказать, что уравнение не имеет решений в целых числах: $x!+y!=10z+9$ ($x! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (x-1) \cdot x$)
- *Решение:*

1. Так как правая часть уравнения – нечетное число, то и левая часть должна быть нечетным числом. Поэтому или x , или y меньше 2, т.е.=1
2. Пусть $x!=1 \Rightarrow y!=10z+8$
3. Правая часть последнего равенства не делится на 5 $\Rightarrow y \le 4$, но ни одно из целых чисел, которые удовлетворяют этому неравенству, не служат решением данного уравнения.
4. $\Rightarrow$данное уравнение не имеет решений в целых числах.

Учёт ограниченности выражений

Решить уравнение в целых числах:

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7$$

$$(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7/2$$

РЕШЕНИЕ:

1.Заметим что:

1) $x^4-2x^2+3=x^4-2x^2+1+2=(x^2-1)^2+2\geq 2$

2) $$y^4-3y^2+4=(y^2-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$$

2. => Значит левая часть ≥ 7.
3. => уравнение равносильно системе :

$$\begin{cases}\left(x^2-1\right)^2+2=2\\ \left(y^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}\end{cases} \qquad \begin{cases}x^2-1=0\\ y^2-\frac{3}{2}=0\end{cases}$$

Откуда x =±1,y = $\sqrt{\frac{3}{2}}\notin Z$ Є

ОТВЕТ: уравнение не имеет решений в целых числах.

Уравнения, решаемые с помощью представления левой части уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых

- Решить в целых числах уравнение:

$$90x^2 - 72xy + 20y^2 + 13 = 12(x + y)$$

Решение:

1. Представим левую часть уравнения в виде суммы неотрицательных слагаемых.

$$(9x^2 - 12x + 4) + (4y^2 - 12y + 9) + (81x^2 - 72xy + 16y^2) = 0$$

$$(3x - 2)^2 + (2y - 3)^2 + (9x - 4y)^2 = 0$$

2. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2 = 0, \\ 2y - 3 = 0, \\ 9x - 4y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

3. Т.к. x и y не принадлежат Z => уравнение не имеет решений в целых числах.
4. Ответ: нет решений

Учет свойств делимости.

Решить в целых числах уравнение $x^3-100=225y$

РЕШЕНИЕ:

1. Очевидно, что x^3 должен быть кратен 5
2. Пусть $x= 5z$, z Є Z, тогда $125z^3-100=225y$ => $5z^3-4=9y$
3. Очевидно,что левая часть уравнения должна быть кратна 9,т.е

a) $z=3t$

$5(3t)^3-4=9y$

$135t^3-4=9y$

b) $z=3t+1$

$5(3t+1)^3-4=9y$

$5(27t^3+27t^2+9t+1)-4=9$

$135t^3+135t^2+45t+1=9y$

c) $z=3t-1, x=5z$ =>

$5(3t-1)^3-4=9y$

$5(27t^3-27t^2+9t-1)-4=9y$

$135t^3-135t^2+45t-9=9y$

а) Не кратно 9

б)не кратно 9

с)кратно 9 => $x=15t-5$, $y=15t^3-15t^2+5t-1$

ОТВЕТ: $(15t-5;\ 15t^3-15t^2+5t-1)$, t Є Z

Решить уравнение в целых числах: $7(x+y)=3(x^2-xy+y^2)$

РЕШЕНИЕ:

1. Пусть x+y=p, x-y=q. =>, $x=\frac{p+q}{2}$, $y=\frac{p-q}{2}$
2. Подставим в исходное уравнение: $7p=3\frac{(p+q)^2}{4}-\frac{(p+q)(p-q)}{4}-\frac{(p-q)^2}{4}$ 7p= $\frac{3(p^2+2pq+q^2-p^2+q^2+p^2-2pq+q^2)}{4}$ 28p=3(p²+3q)
3. Т.к. $28p=3(p^2+3q)$, то p – неотрицательное и p кратно 3, т.е p=3k, k Є Z
4. Пусть p=3k, тогда получим $28*3k=3((3k)^2+3q^2)$; $28k=3(3k^2+q^2)$.
5. Отсюда следует, что k кратно 3 => k=3m, m Є Z;
6. Пусть k=3m, получим $28*3m=3(3(3m)^2+q^2$;

$28m=27m^2+q^2$;

$m(28-27m)=q^2$;

так как $q^2\geq0$, то m=0, или m=1 (решаем неравенство $m(28-27m)\geq0$ с помощью метода интервалов)

7. a) При m=0, k=0 (т.к. k=3m), p=0 (т.к. p=3k), q=0(т.к. $28p=3(p^2+3q)$), => x=0, y=0 (т.к. $x=\frac{p+q}{2}$, $y=\frac{p-q}{2}$)

b)При m=1, k=3, p=9, $q^2=1$(т.к. $m(28-27m)=q^2$) =>

1)При q= 1, получаем x=5; y=4; b) при q= -1, получаем x=4; y=5;

ОТВЕТ:(5:4);(4:5);(0:0)

Спасибо за внимание!