

---

# Решение задач на нахождение расстояний и углов в пространстве координатным методом

*Учитель математики*

*МБОУ-СОШ №7 г.Клинцы  
Брянской области*

*Коваленко С.Ф.*

[pptcloud.ru](http://pptcloud.ru)

# Ответы для самопроверки Математический диктант математического диктанта

Дано:  $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b}(b_1, b_2, b_3)$

---

Записать в координатах

:

1. Условие коллинеарности двух векторов.

$$1. \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \lambda$$

2. Условие перпендикулярности двух векторов.

$$2. a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0$$

3. Формулу для нахождения косинуса угла между векторами.

$$3. \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

4. Формулу для нахождения длины вектора.

$$4. |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

5. Уравнение плоскости.

$$5. Ax + By + Cz + D = 0$$

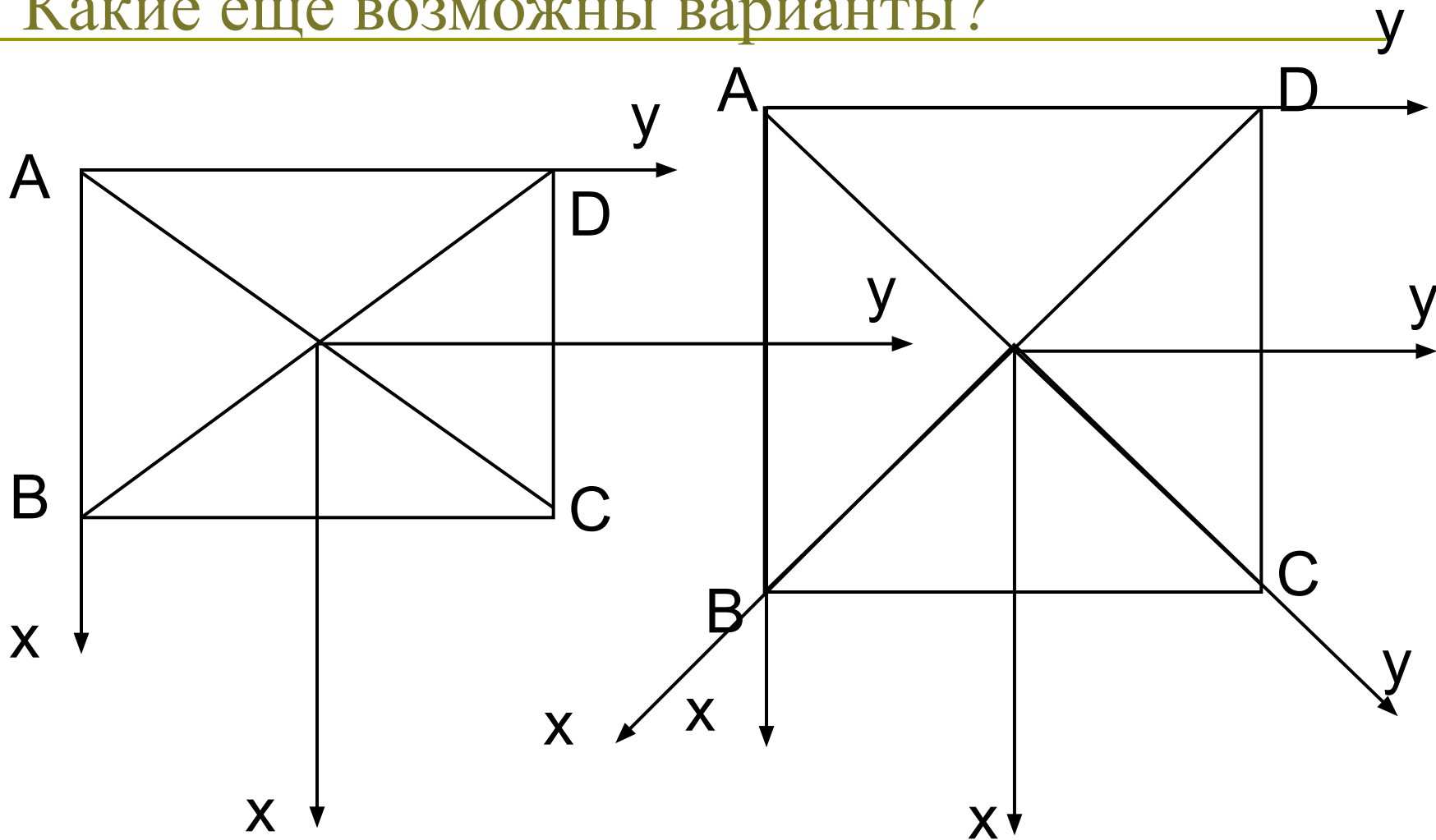
# Алгоритм решения задач

---

1. Ввести прямоугольную систему координат  $Ox_1Ox_2Ox_3$  - на плоскости основания многогранника;  $Ox_1, Ox_2, Ox_3$  - в пространстве.
2. Найти координаты точек, о которых идет речь в условии задачи.
3. Найти координаты направляющих векторов прямых;  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  - векторов, перпендикулярных плоскостям (нормалей).
4. Воспользоваться соответствующей формулой для нахождения расстояний в пространстве;  $d$  - углов в пространстве.

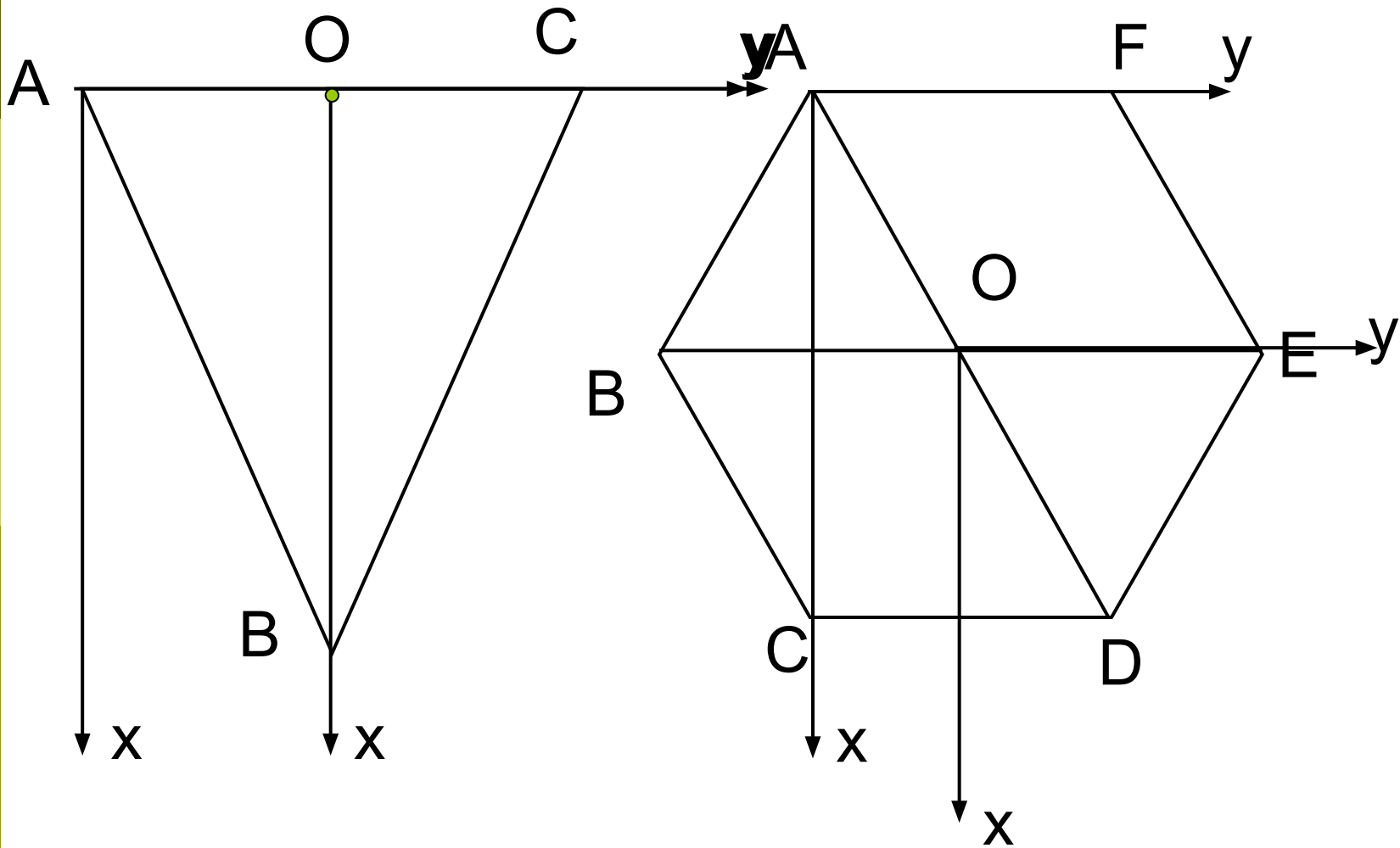
Введите прямоугольную систему координат, если  
основании многогранника лежит...

Какие еще возможны варианты?



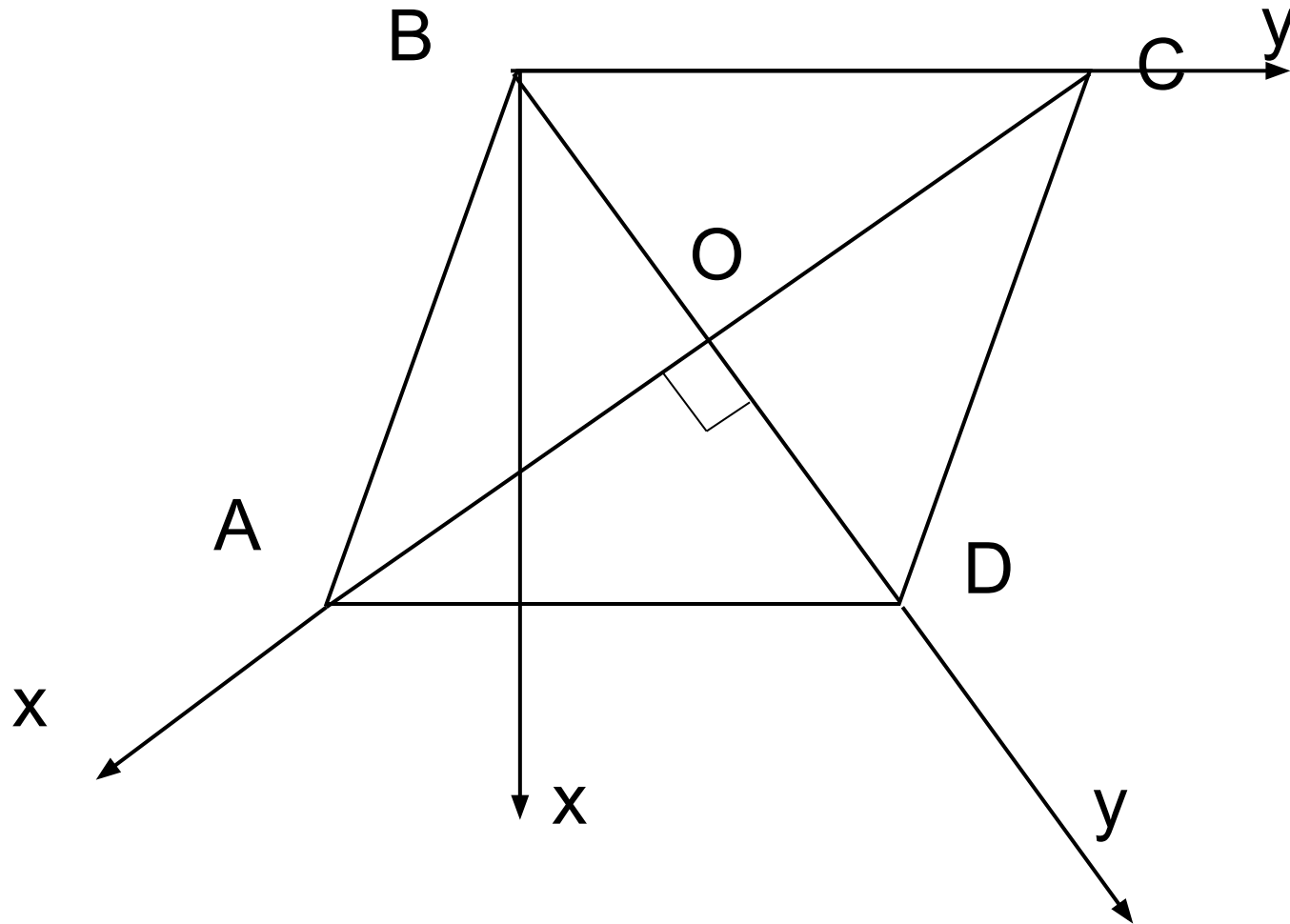
Введите прямоугольную систему координат, если в основании многогранника лежит...

---

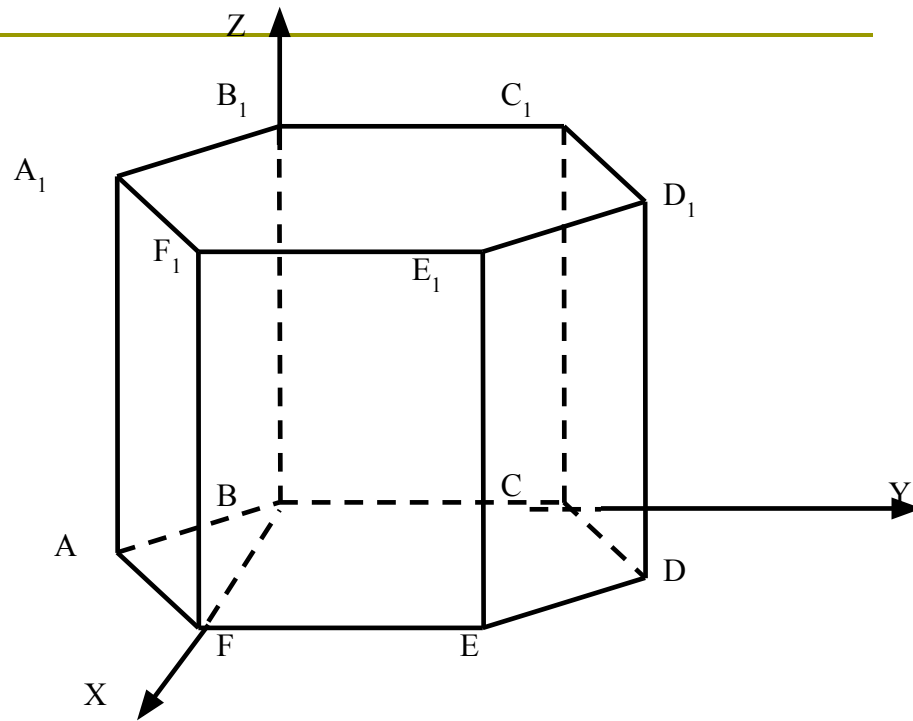
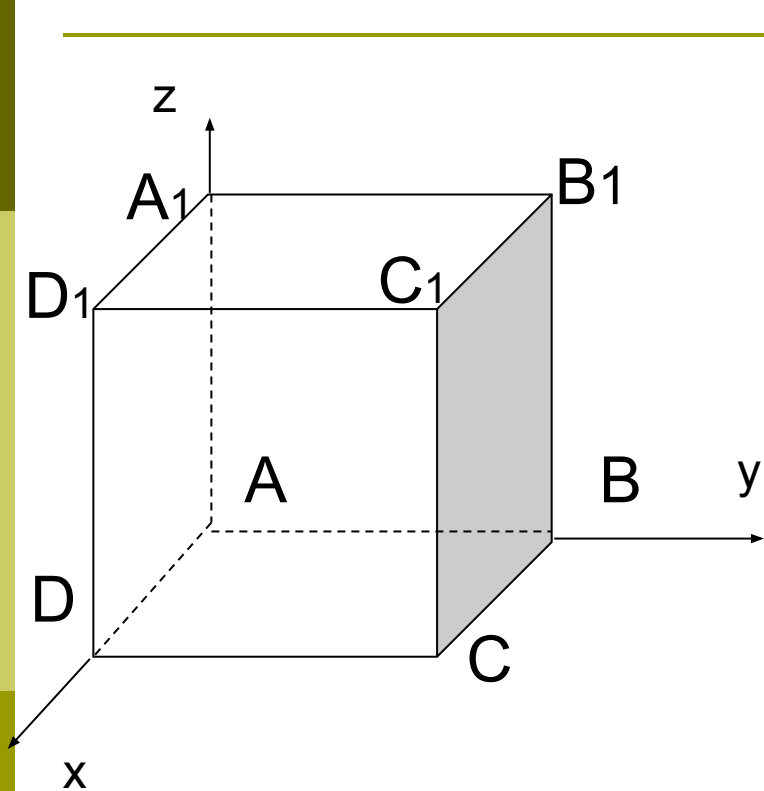


Введите прямоугольную систему координат, если в основании многогранника лежит...

---

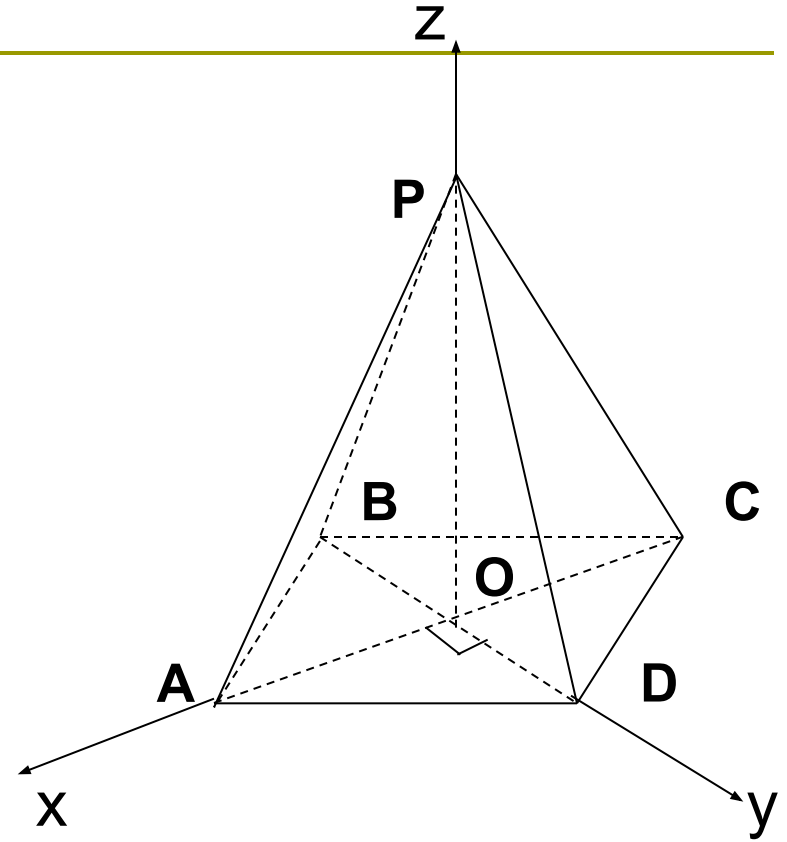
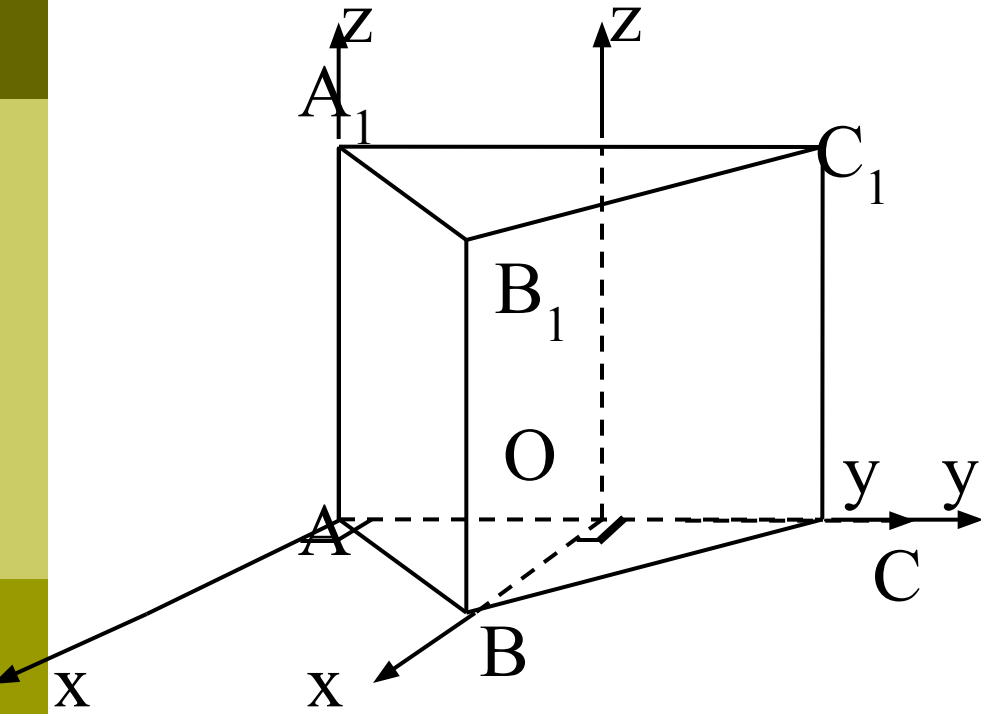


Введите прямоугольную систему координат.



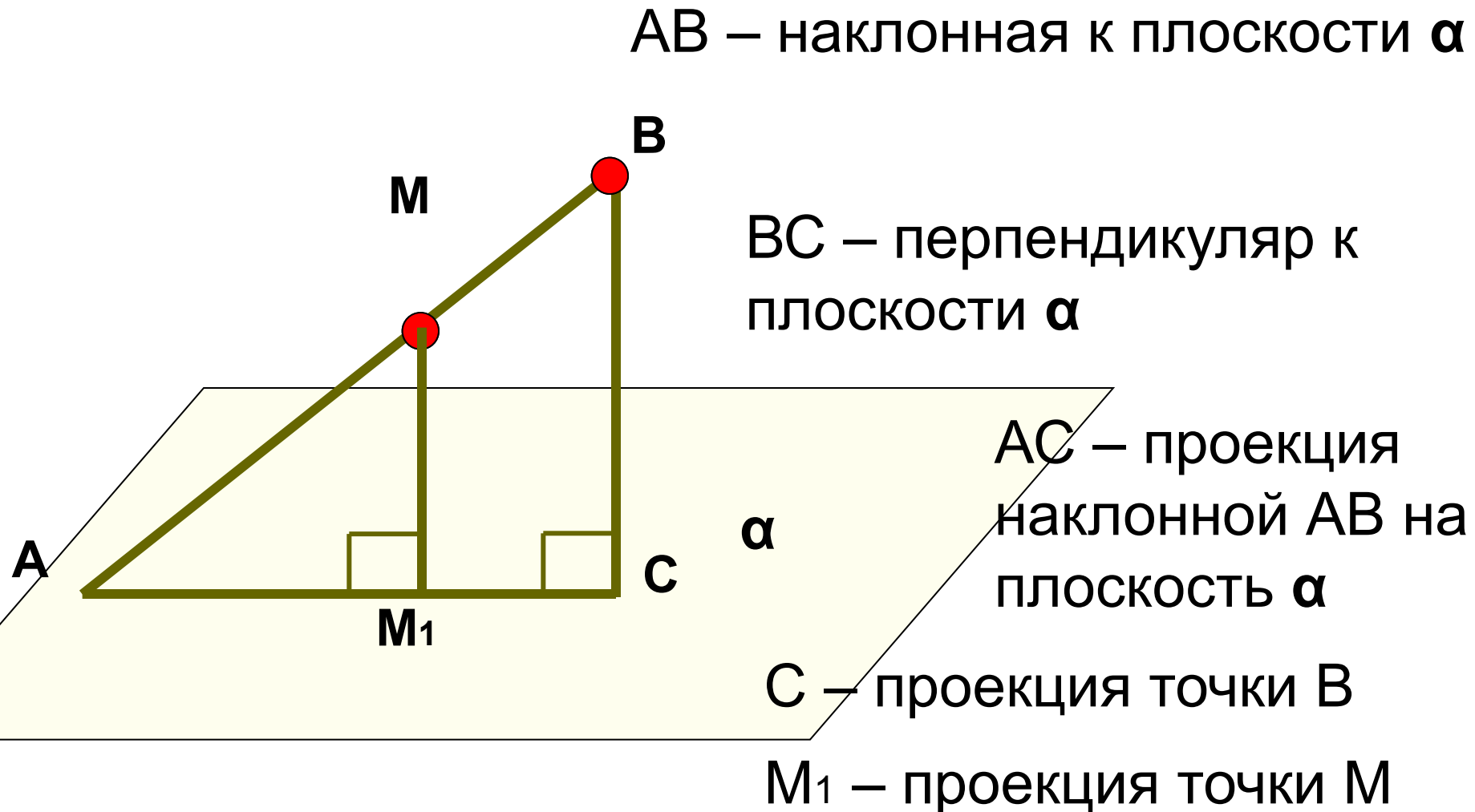
Введите прямоугольную систему координат.

---



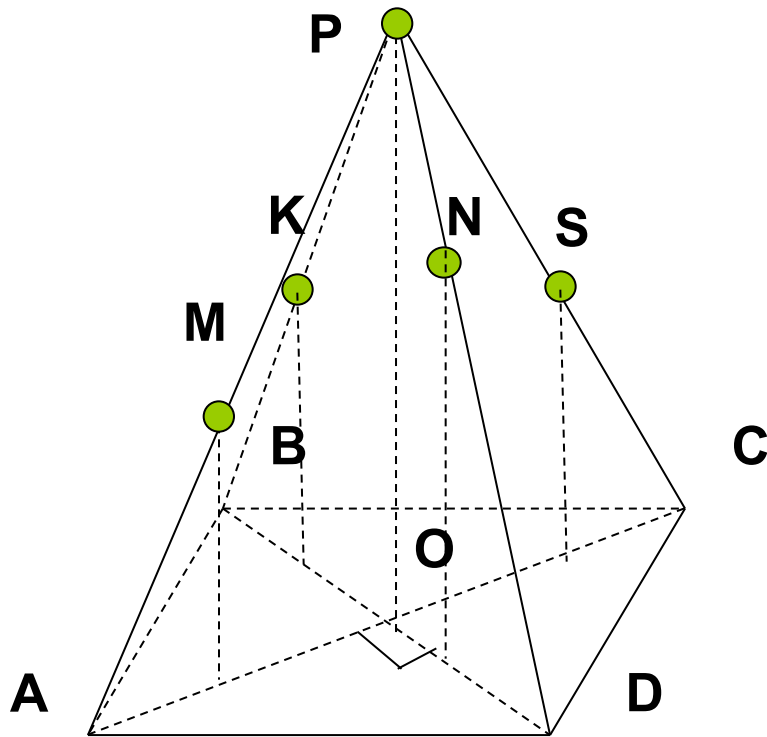


Назовите наклонную к плоскости  $\alpha$ , ее проекцию на плоскость, проекции точек В и М.



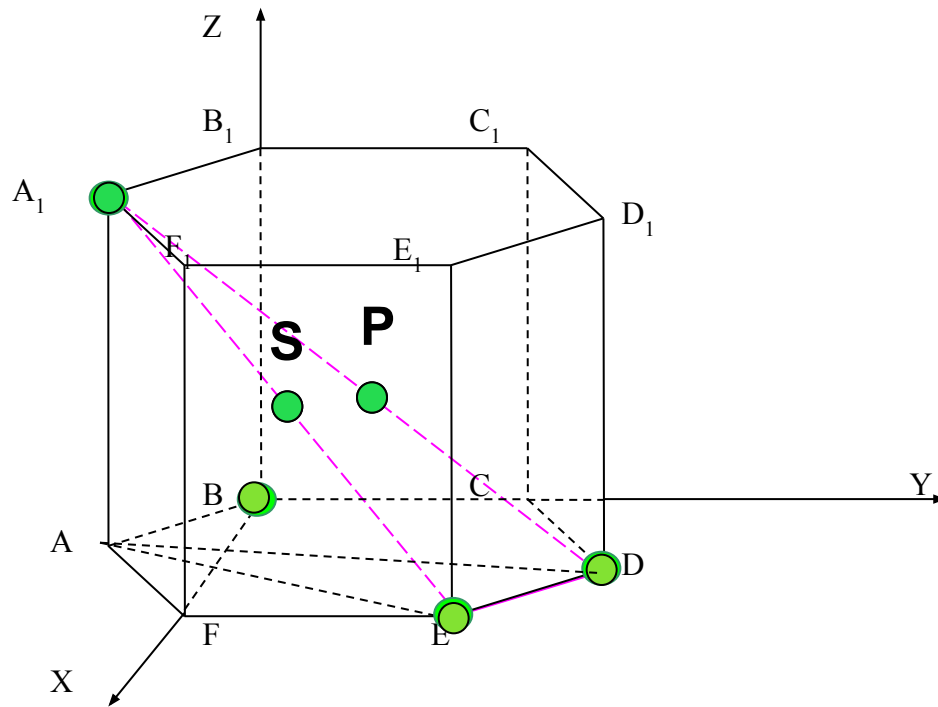
На какие отрезки в плоскости основания  
попадают проекции точек P, M, S, K, N?

---



На какие отрезки в плоскости основания попадают проекции точек  $A_1$ ,  $S$ ,  $P$ ? Почему?

---



Проекциями каких точек являются точки  $B$ ,  $E$ ,  $D$  в плоскости основания призмы?

# Составьте уравнение плоскости по 3 точкам:

1.  $A(0, -\frac{1}{2}, 0), D(0, \frac{1}{2}, 1), B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 2).$

---

$Ax + By + Cz + D = 0$  – общий вид уравнения плоскости.

$$(ADB_1) : \begin{cases} A \cdot 0 - B \cdot \frac{1}{2} + C \cdot 0 + D = 0, \\ A \cdot 0 + B \cdot \frac{1}{2} + C \cdot 1 + D = 0, \\ A \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + B \cdot 0 + C \cdot 2 + D = 0, \end{cases} \begin{cases} B = 2D, \\ C = -2D, \\ A = 2\sqrt{3}D. \end{cases}$$

$$2\sqrt{3}xD + 2yD - 2zD = 0,$$

$$2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$$

Ответ.  $2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0.$

# Составьте самостоятельно уравнения координатных плоскостей

---

2. Уравнение плоскости  $yOz$ :  $x = 0$ .

Уравнение плоскости  $xOz$ :  $y = 0$ .

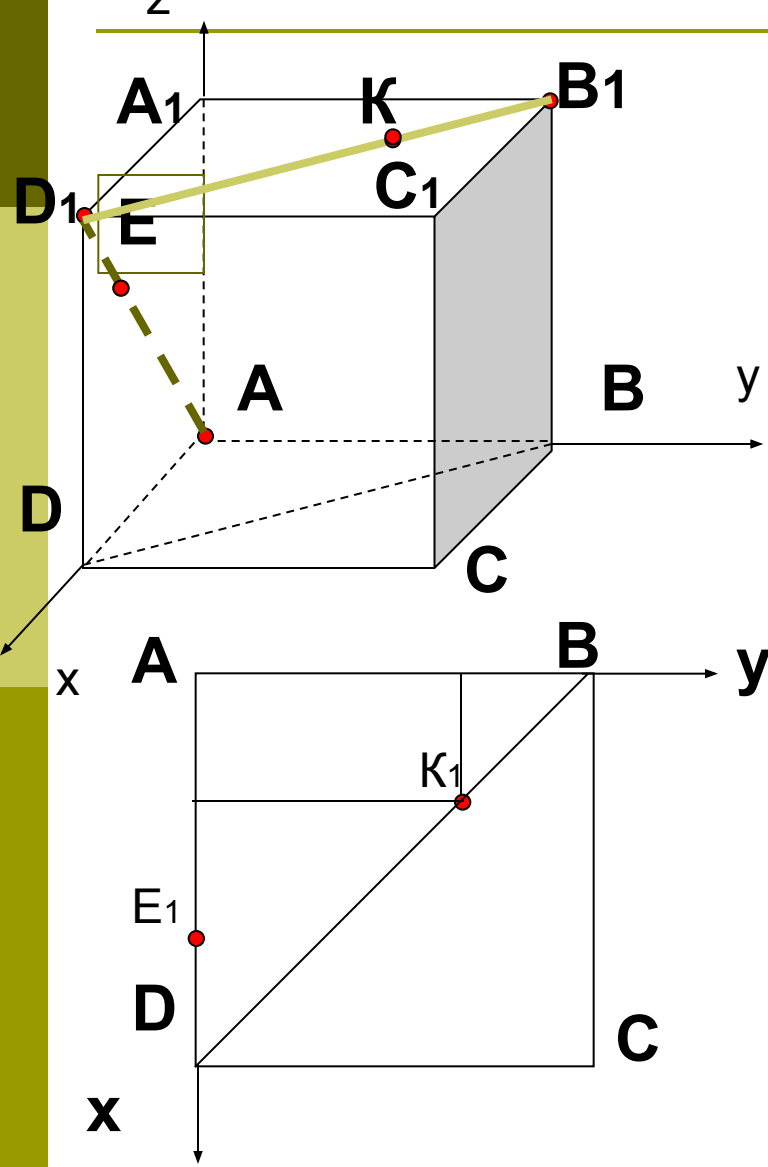
Уравнение плоскости  $xOy$ :  $z = 0$ .

3. Вектор нормали к плоскости  $Ax + By + Cz + D = 0$  имеет координаты  $\{A; B; C\}$  и обозначается  $\vec{n}\{A; B; C\}$ .

Найдите координаты векторов нормалей к координатным плоскостям и плоскости  $ADB_1$ .

$$\vec{n}_1\{1; 0; 0\}, \quad \vec{n}_2\{0; 1; 0\}, \quad \vec{n}_3\{0; 0; 1\}, \quad \vec{n}\{2\sqrt{3}; 2; -2\}$$

Решите задачу. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , сторона которого равна 3, на диагоналях граней  $AD_1$  и  $D_1 B_1$  взяты точки  $E$  и  $K$  так, что  $D_1 E : AD_1 = 1 : 3$ ,  $D_1 K : D_1 B_1 = 2 : 3$ . Найдите длину отрезка  $DK$ .



Решение.

1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ , как показано на рисунке.
2. Найдём координаты точек  $E$  и  $K$  с помощью их проекций на плоскость основания.

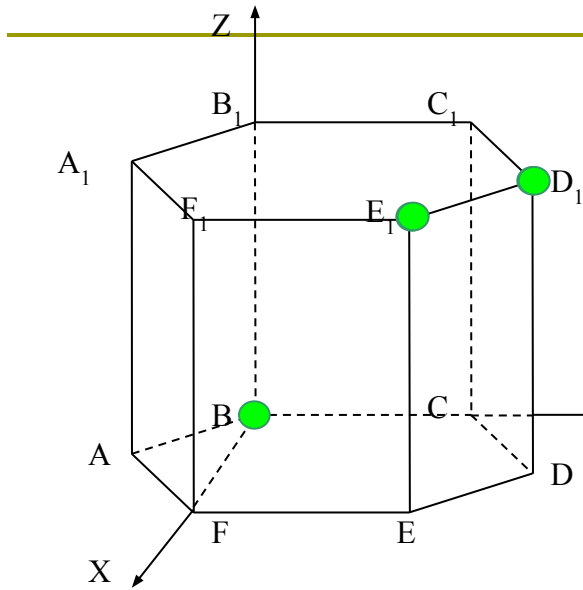
$$A(0,0,0), E_1(2,0,0), E(2,0,2), K_1(1,2,0), K(1,2,3)$$

$$3. EK = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$EK = \sqrt{(1 - 2)^2 + (2 - 0)^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{6}.$$

Ответ.  $EK = \sqrt{6}$ .

Решите задачу. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки  $B$  до точек  $E_1, D_1$ .



1. Введем систему координат с началом в точке  $B$ , как показано на рисунке.

2. Найдем координаты точек  $E_1$  и  $D_1$  с помощью их проекций на плоскость основания.

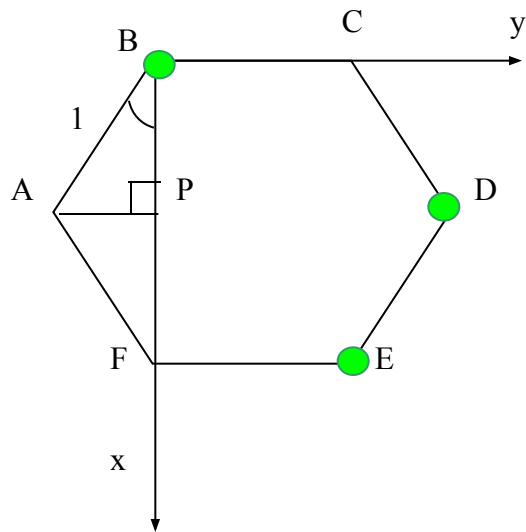
Из  $\triangle ABP$ :  $\angle P = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $AP = \frac{1}{2}$ .

$B(0;0;0)$ ,  $E(\sqrt{3};1;0)$ ,  $E_1(\sqrt{3};1;1)$ ,  $D(\frac{\sqrt{3}}{2};1,5;0)$ ,  $D_1(\frac{\sqrt{3}}{2};1,5;1)$ .

3.  $BE_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ,

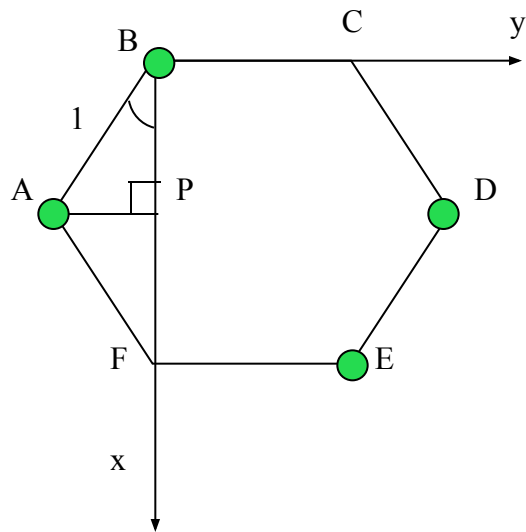
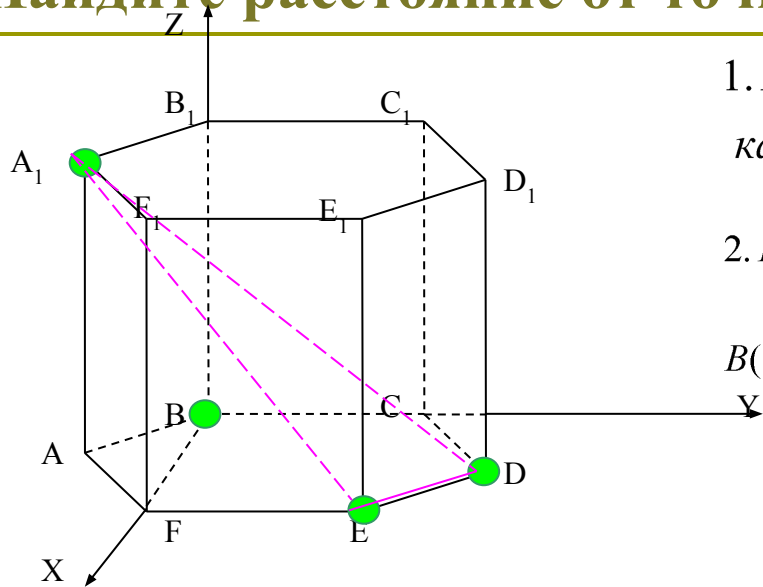
$BE_1 = \sqrt{(\sqrt{3} - 0)^2 + (1 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = \sqrt{5}$ .

$BD_1 = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2} - 0)^2 + (1,5 - 0)^2 + (1 - 0)^2} = 2$ .



Ответ.  $\sqrt{5}$ , 2.

**500013. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки  $B$  до плоскости  $DEA_1$ .**



1. Введем систему координат с началом в точке  $B$  как показано на рисунке.

2. Из  $\triangle ABP$ :  $\angle P = 90^\circ$ ,  $\angle B = 30^\circ$ ,  $AB = 1$ ,  $BP = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $AP = \frac{1}{2}$ .

$B(0;0;0)$ ,  $A_1(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$ ,  $D(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1; 0)$ ,  $E(\sqrt{3}; 1; 0)$

3. Составим уравнение плоскости  $DEA_1$ :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}x + y + 2z - 2 = 0,$$

$\vec{n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}}; 1; 2 \right\}$  – вектор нормали к плоскости

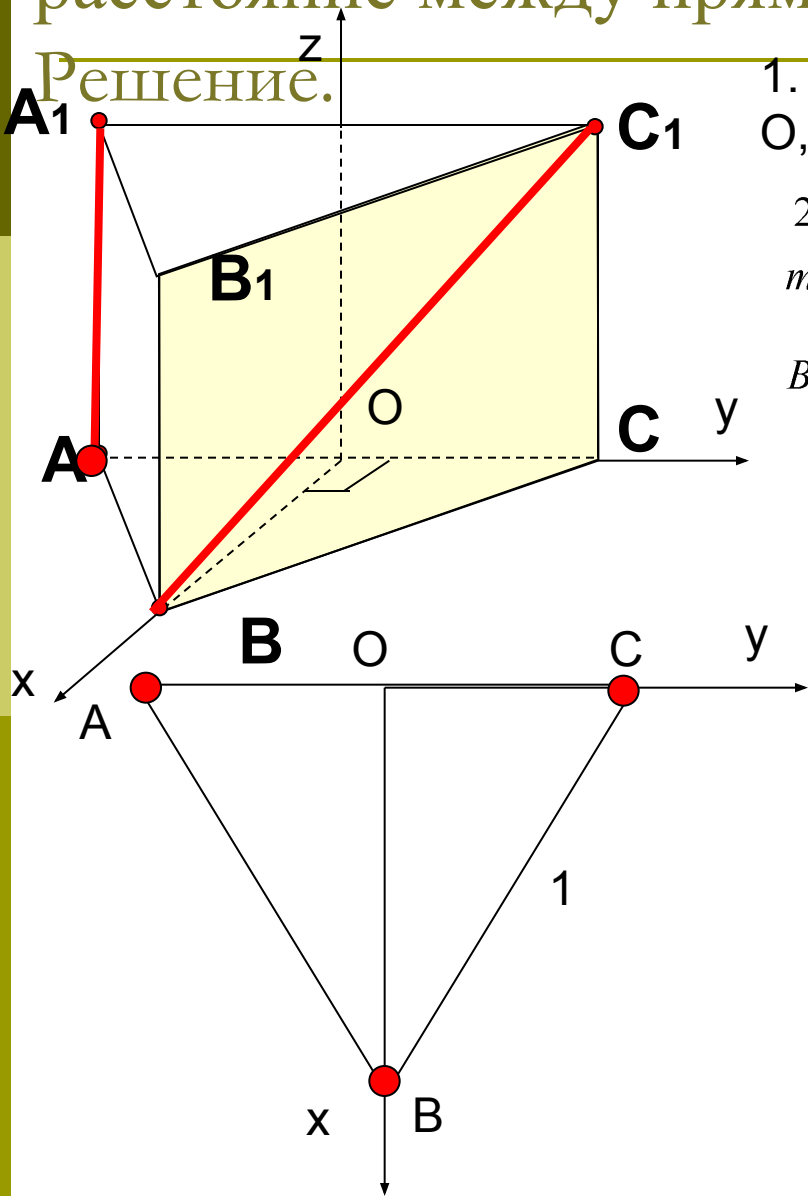
$$4. \rho(B, DEA_1) = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\rho(B, DEA_1) = \frac{|-2|}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1 + 4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$



484577. В правильной треугольной призме сравного ребра  $a$  найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BCC_1$ .  
 Найдите расстояние от точки  $A$  до плоскости  $BCC_1$ .  
 Пусть  $AA_1$  и  $BC$  — все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .  
 содержащей вторую прямую и параллельной первой прямой.



Решение.

1. Введем систему координат с началом в точке  $O$ , как показано на рисунке.

2. Из равностороннего треугольника  $ABC$  имеем: т.к.  $BO$  — медиана и высота, то

$$BO = \sqrt{BC^2 - OC^2}, \quad BO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(0, -\frac{1}{2}, 0), \quad B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), \quad C(0, \frac{1}{2}, 0), \quad C_1(0, \frac{1}{2}, 1).$$

3. Составим уравнение плоскости ( $BCC_1$ ):

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}x - 2y + 1 = 0.$$

$$\vec{n} \left\{ -\frac{2}{\sqrt{3}}; -2; 0 \right\}$$

$$4. \quad \rho(A; BCC_1) = \frac{|Ax_0 + By_0 + cZ_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\rho(A; BCC_1) = \frac{|0 + 1 + 1|}{\sqrt{\frac{4}{3} + 4 + 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Решите задачу. Найдите расстояние между плоскостями сечений куба (PRS) и (NKM), ребро которого 12, где  $DN:NC=A_1P:PB_1=1:2$ ,  $B_1S:SB=D_1M:MD_1=1:3$ ,

$B_1R:RC_1=DK:KA=1:4$ . Введем прямоугольную систему координат с началом в точке В, как показано на рисунке.

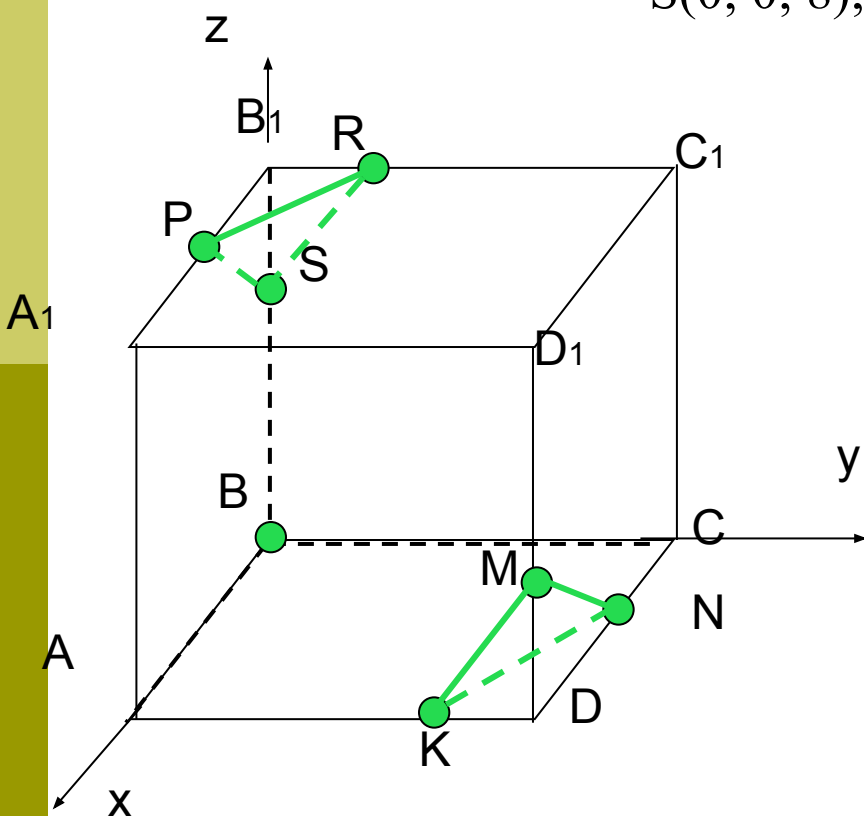
2.  $B(0; 0; 0)$ ;  $P(6; 0; 12)$ ;  $R(0; 3; 12)$ ;  
 $S(0; 0; 8)$ ;  $N(6; 12; 0)$ ;  $K(12; 9; 0)$ ;  $M(12; 12; 4)$

3. Уравнение плоскости (PRS) имеет вид  $2x+4y-3z+24=0$ , а уравнение плоскости (NKM)  $2x+4y-3z-60=0$ , значит, плоскости параллельны.

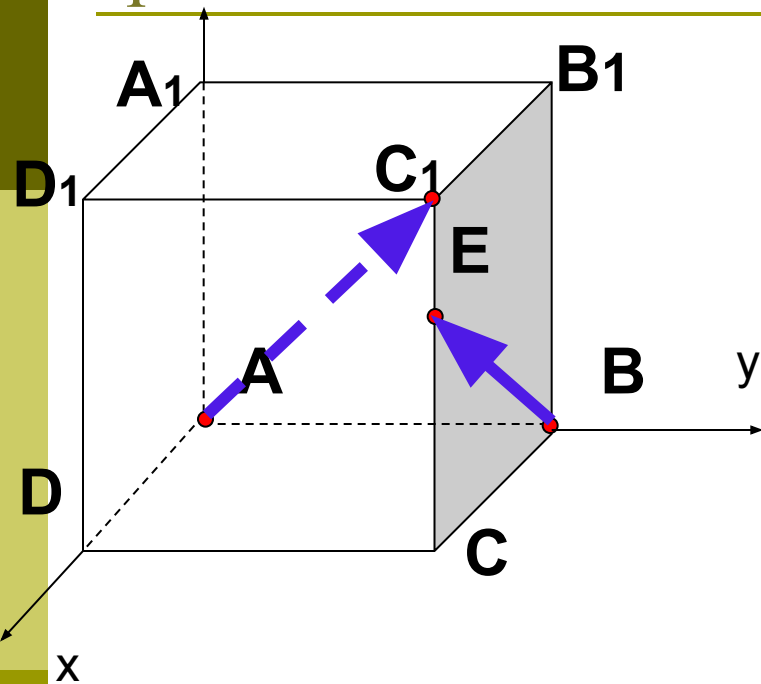
$$4. \rho(PRS; NKM) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\rho(PRS; NKM) = \frac{|24 + 60|}{\sqrt{4 + 16 + 9}} = \frac{84}{\sqrt{29}}.$$

Ответ :  $\frac{84}{\sqrt{29}}$ .



**500387.** На ребре  $CC_1$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $CE:EC_1=2:1$ . Найдите угол между прямыми  $BE$  и  $AC_1$ .



1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке  $A$ , как показано на рисунке.

Пусть сторона куба равна 3.

2.  $A(0,0,0)$ ,  $B(0,3,0)$ ,  $E(3,3,2)$ ,  $C_1(3,3,3)$

3. Направляющие векторы прямых

$\overrightarrow{AC_1} \{3,3,3\}$ ,  $\overrightarrow{BE} \{3,0,2\}$ .

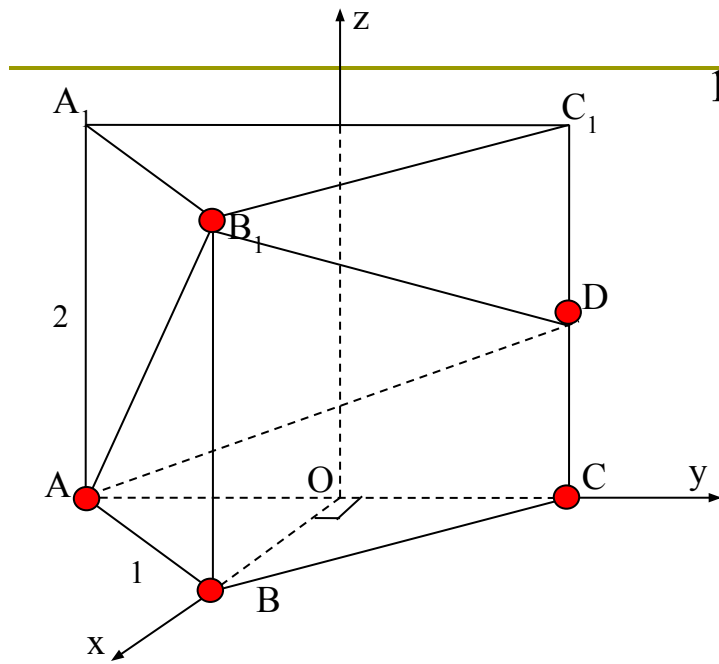
4. 
$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{|a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

$$\cos(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{BE}) = \frac{|3 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + 3 \cdot 2|}{\sqrt{9 + 9 + 9} \cdot \sqrt{9 + 0 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{39}}$$

Искомый угол равен  $\arccos \frac{5}{\sqrt{39}}$ .

Ответ.  $\arccos \frac{5}{\sqrt{39}}$ .

500347. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка  $D$  — середина ребра  $CC_1$ . Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $ADB_1$ .



1. Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке.

2. Из равностороннего треугольника  $ABC$  имеем: т.к.  $BO$  — медиана и высота, то

$$BO = \sqrt{BC^2 - OC^2}, \quad BO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$A(0, -\frac{1}{2}, 0), \quad B(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 0), \quad C(0, \frac{1}{2}, 0), \quad D(0, \frac{1}{2}, 1), \quad B_1(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 2).$$

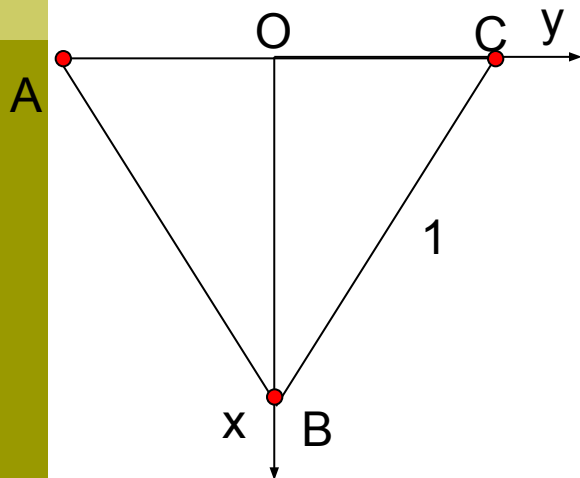
3. Нормали к плоскостям  $(ABC) \ z = 0 : \vec{n}_1 \{0; 0; 1\};$   
 $(ADB_1) \ 2\sqrt{3}x + 2y - 2z + 1 = 0 : \vec{n}_2 \{2\sqrt{3}; 2; -2\};$

$$4. \cos(\square, \square) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

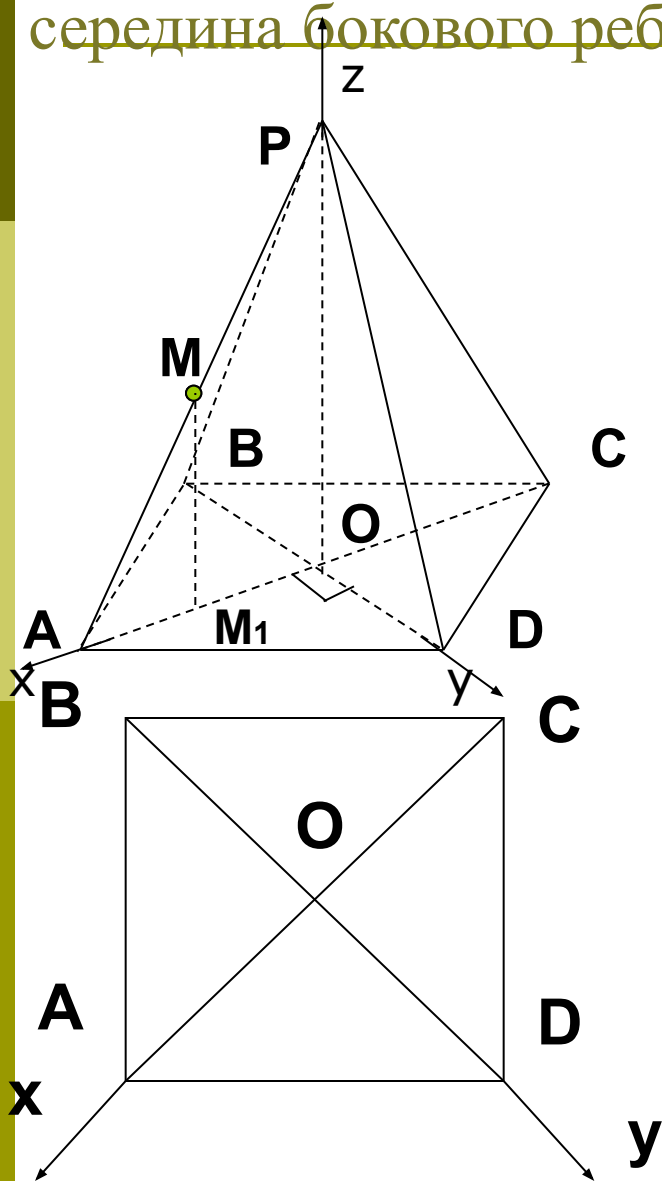
$$\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) = \frac{|0 \cdot 2\sqrt{3} + 0 \cdot 2 - 1 \cdot 2|}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

искомый угол равен  $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

Ответ :  $\arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$ .



**484568.** Длины ребер правильной четырехугольной пирамиды  $PABCD$  с вершиной  $P$  равны между собой. Найдите угол между прямой  $BM$  и плоскостью  $BDP$ , если точка  $M$  – середина бокового ребра пирамиды  $AP$ .



1. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке  $O$  – точке пересечения диагоналей квадрата, как показано на рисунке. Пусть  $AB = 1$ .

2. Из  $\triangle ABC$  имеем:  $\angle B = 90^\circ$ ,  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$ ,  $AC = \sqrt{2}$ ,  $AO = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Из  $\triangle APO$  имеем:  $\angle O = 90^\circ$ ,  $PO = \sqrt{AP^2 - AO^2}$ ,  $PO = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Из подобия треугольников  $AMM_1$  и  $APO$  имеем:  $PO = 2MM_1$ ,  $MM_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

$$B\left(0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), M\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{\sqrt{2}}{4}\right), D\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0\right), P\left(0; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

3.  $\overrightarrow{BM} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{4} \right\}$  – направляющий вектор прямой  $BM$ .

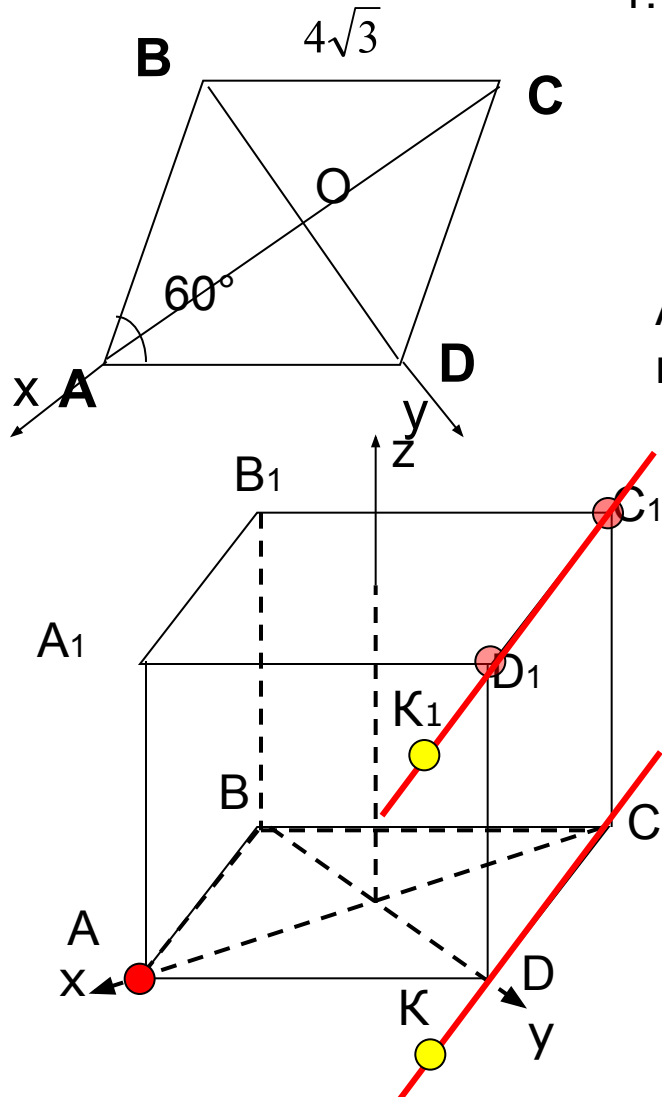
Составим уравнение плоскости  $(BDP)$ :  $x = 0$ ,  $\vec{n} \{1; 0; 0\}$ .

$$4. \sin(\overrightarrow{BM}, \vec{n}) = \frac{a_1 A + a_2 B + a_3 C}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\sin(\overrightarrow{BM}, \vec{n}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{\sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}} \cdot \sqrt{1}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Ответ:  $\arcsin \frac{\sqrt{6}}{6}$

**500001.** Основанием прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$  со стороной  $4\sqrt{3}$ , а угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ . Найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $C_1 D_1$ , если боковое ребро параллелепипеда равно 8.



1. Как введем прямоугольную систему координат?

Т.к. диагонали ромба перпендикулярны, то начало координат можно взять в точке их пересечения.

2. Координаты каких точек надо найти?

$A$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  и основания перпендикуляра, опущенного из точки  $A$  на прямую  $C_1 D_1$  – точки  $K_1$ .

Где лежит проекция точки  $K_1$ ? На прямой  $CD$ .

Пусть  $K_1(x_0, y_0, z_0)$ , ее проекция  $K(x_0, y_0, 0)$

Из  $\triangle ABD$ :  $AB = AD = BD = 4\sqrt{3}$ ,  $DO = 2\sqrt{3}$ .

Из  $\triangle AOD$ :  $AO = 6$

$A(6, 0, 0)$ ,  $C_1(-6, 0, 8)$ ,  $D_1(0, 2\sqrt{3}, 8)$

500001. Основанием прямого параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является ромб  $ABCD$ , со стороной  $4\sqrt{3}$ , а угол  $BAD$  равен  $60^\circ$ . Найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $C_1 D_1$ , если боковое ребро параллелепипеда равно 8.

~~$A(6, 0, 0), C_1(-6, 0, 8), D_1(0, 2\sqrt{3}, 8), K_1(x_0, y_0, 8)$~~

Найдем остальные координаты точки  $K_1$ .

а) Т.к.  $K_1 \in C_1 D_1$ , то  $\overrightarrow{C_1 D_1} \parallel \overrightarrow{D_1 K_1}$ .

Но координаты коллинеарных векторов

пропорциональны  $\overrightarrow{C_1 D_1} \{6, 2\sqrt{3}, 0\}, \overrightarrow{D_1 K_1} \{x_0, y_0 - 2\sqrt{3}, 0\}$

$$\frac{x_0}{6} = \lambda, \quad \frac{y_0 - 2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \lambda,$$

$$x_0 = 6\lambda, \quad y_0 = 2\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}.$$

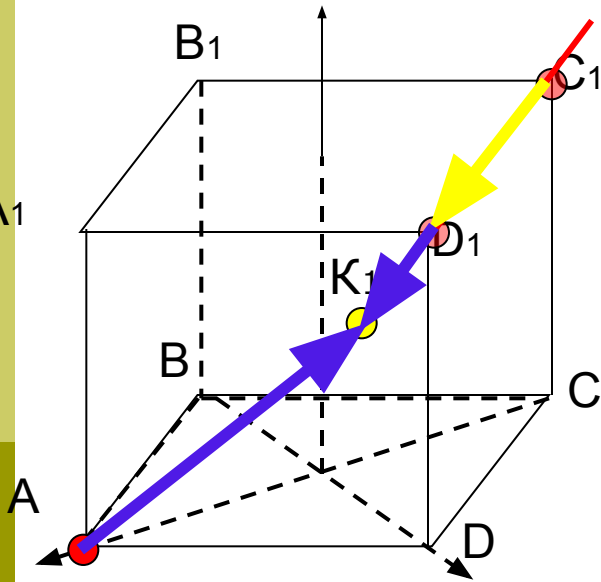
$$\overrightarrow{AK_1} \{6\lambda - 6, 2\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}, 8\}$$

б) Т.к.  $C_1 D_1 \perp AK_1$ , то  $\overrightarrow{C_1 D_1} \cdot \overrightarrow{AK_1} = 0$

$$6 \cdot (6\lambda - 6) + 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}\lambda + 2\sqrt{3}) + 8 \cdot 0 = 0, \quad \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$3. \quad |\overrightarrow{AK_1}| = \sqrt{\left(6 \cdot \frac{1}{2} - 6\right)^2 + \left(2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} + 2\sqrt{3}\right)^2 + 8^2} = 10$$

Ответ : 10



## Домашнее задание: решите задачи по выбору

---

1. Ребра правильной четырехугольной призмы равны 1, 4, 4.

Найти расстояние от вершины до центра основания призмы, не содержащего эту вершину.

2. В правильной шестиугольной призме  $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$  все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки  $B$  до точек  $E_1, D_1$ .

3. В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $E$  и  $K$  – середины ребер  $AA_1$  и  $CD$  соответственно, а точка  $M$  расположена на диагонали  $B_1 D_1$  так, что  $B_1 M = 2 M D_1$ . Найти расстояние между точками  $Q$  и  $L$ , где  $Q$  – середина отрезка  $EM$ , а  $L$  – точка отрезка  $MK$  такая, что  $ML = 2 LK$ .

№ 484559, 484569, 485992, 485997, 500007, 500193, 500367  
на сайте <http://reshuege.ru>



При разработке презентации были использованы тексты задач

---

1. <http://reshuege.ru> – образовательный портал для подготовки к экзаменам.
2. [www.alexlarin.narod.ru](http://www.alexlarin.narod.ru) – сайт по оказанию информационной поддержки студентам и абитуриентам при подготовке к ЕГЭ, поступлению в ВУЗы и изучении различных разделов высшей математики.

## Литература

Потоскуев Е.В. Геометрия 10 кл.: учеб. для общеобразоват. учреждений с углубленным и профильным изучением математики/ Е.В. Потоскуев, Л.И. Звавич. – 5-е изд., стереотип. – М.: Дрофа. 2007. – 223, [1]с.: ил.