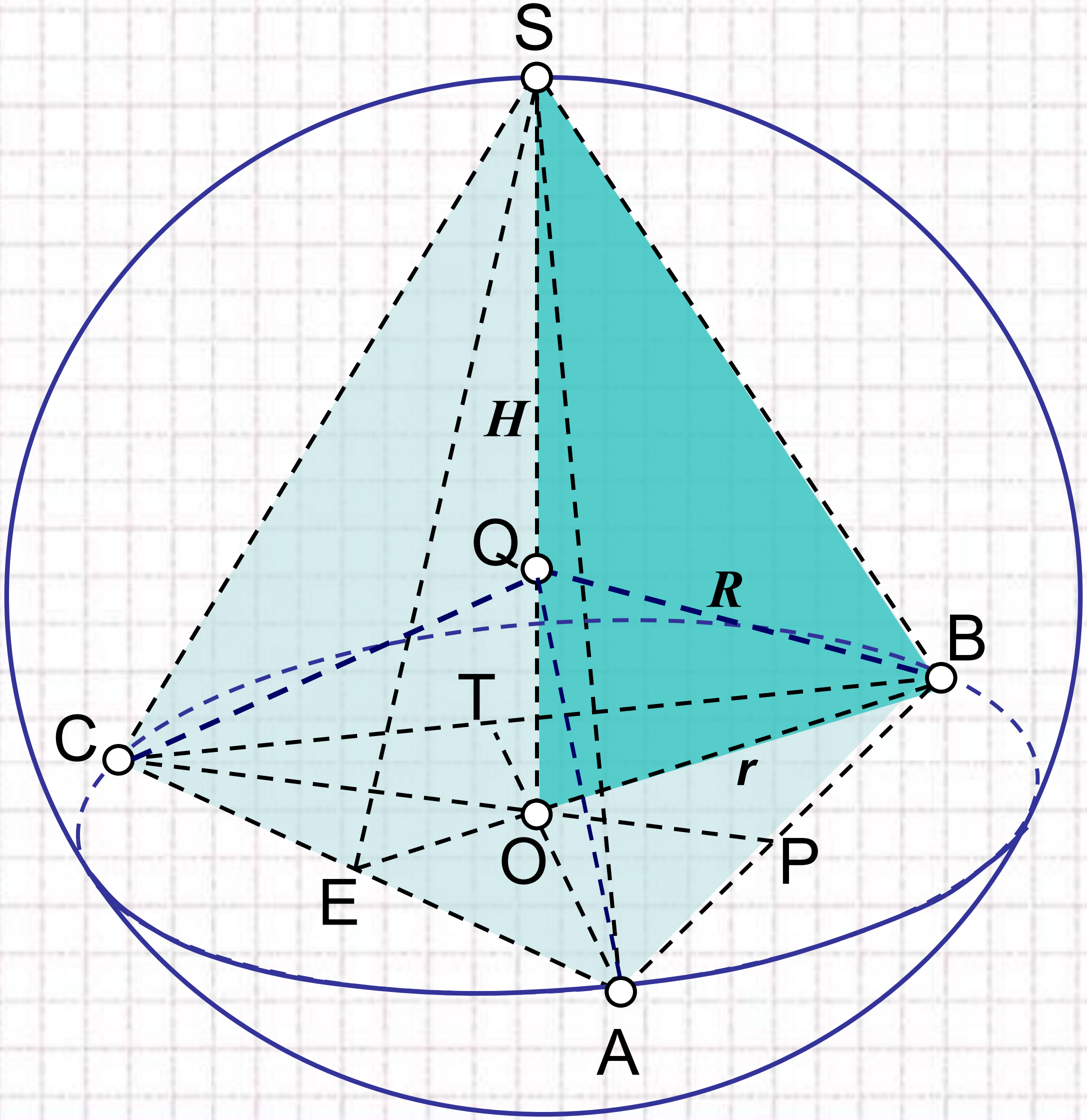
МОУ «Инсарская средняя общеобразовательная школа №1»

Решение задач на комбинации многогранников и тел вращения

Урок геометрии, 11 класс

Чудаева Елена Владимировна,
Республика Мордовия, г. Инсар

Правильная треугольная пирамида, вписанная в шар



AQ = BQ = CQ = SQ= R – радиус шара.

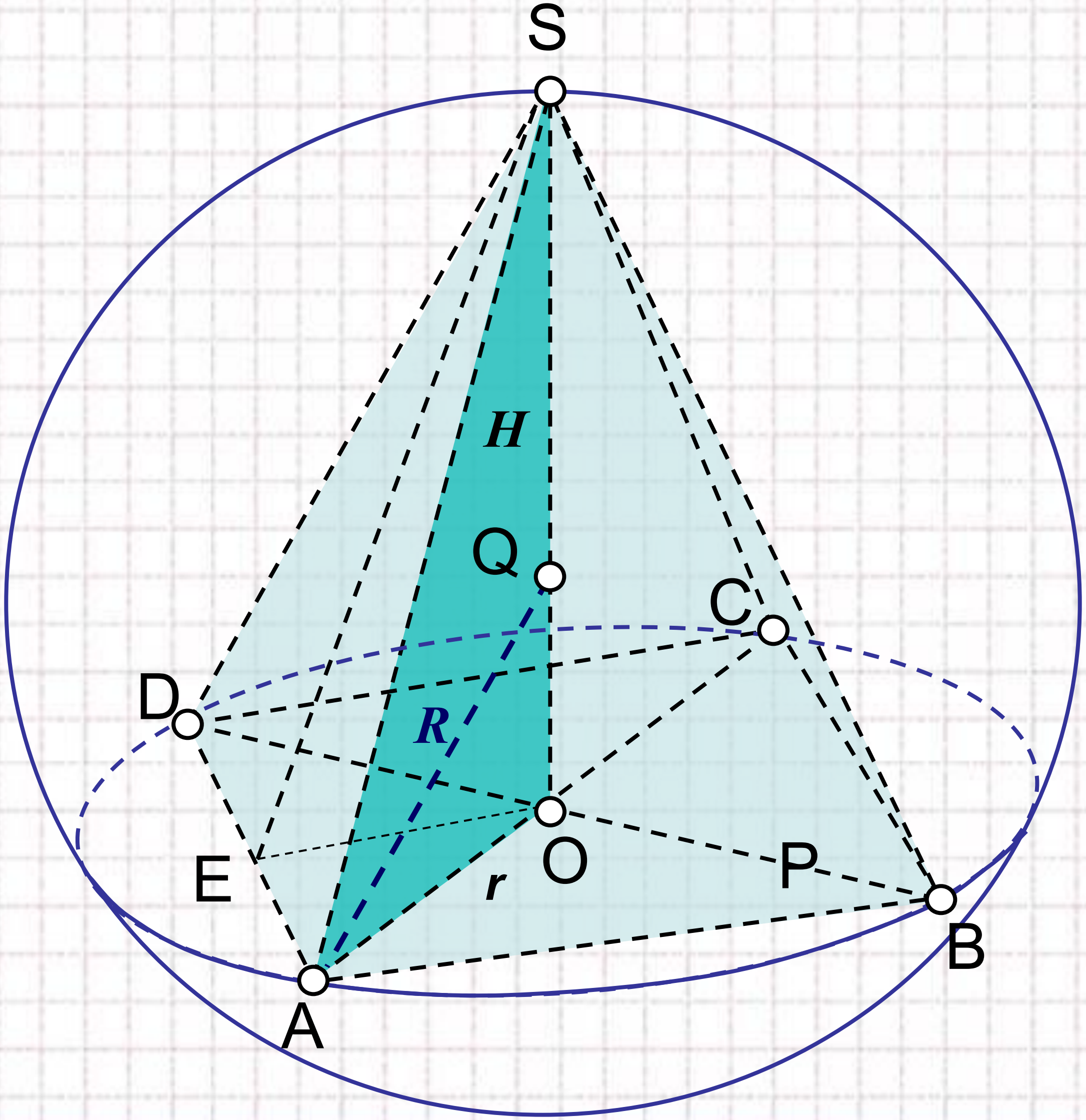
AO = BO = CO = r – радиус круга, описанного около основания пирамиды.

SO = H – высота пирамиды.

SE = h – апофема пирамиды.

$$R^2 = r^2 + \left(H - R\right)^2$$

Правильная четырехугольная пирамида, вписанная в шар



AQ = BQ = CQ = DQ =

= SQ = R – радиус шара.

AO = BO = CO = DO = r радиус круга, описанного около основания пирамиды.

SO = H – высота пирамиды.

SE = h – апофема пирамиды.

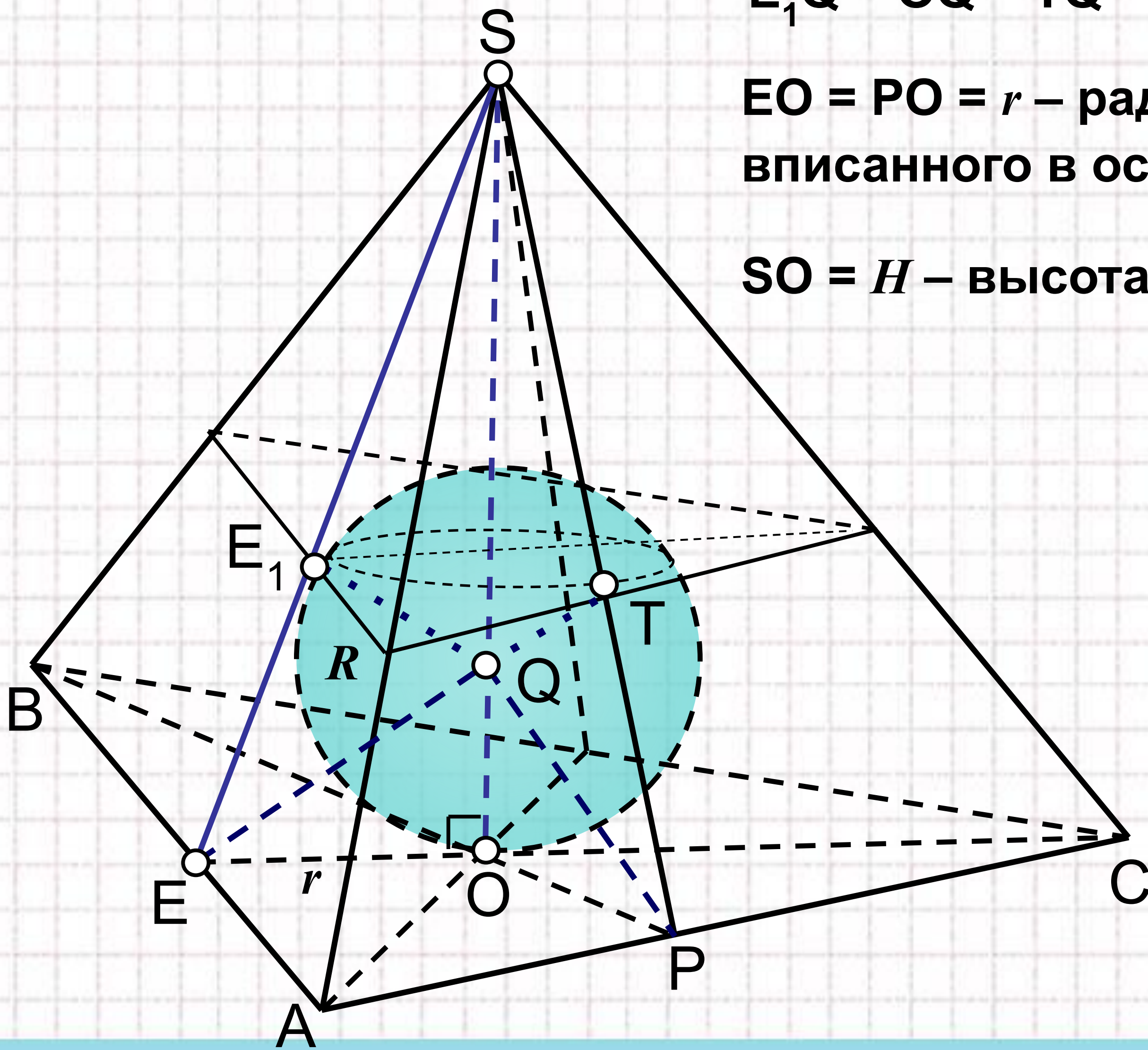
$$R^2 = r^2 + \left(H - R\right)^2$$

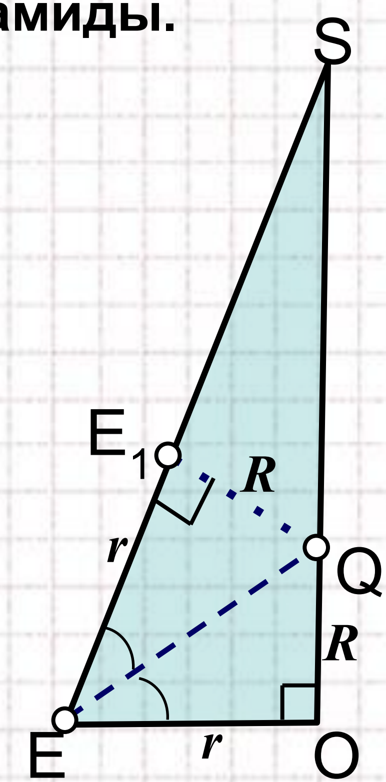
Треугольная пирамида описана около шара

$E_1Q = OQ = TQ = R$ – радиус шара.

$EO = PO = r$ – радиус круга, вписанного в основание пирамиды.

$SO = H$ – высота пирамиды.



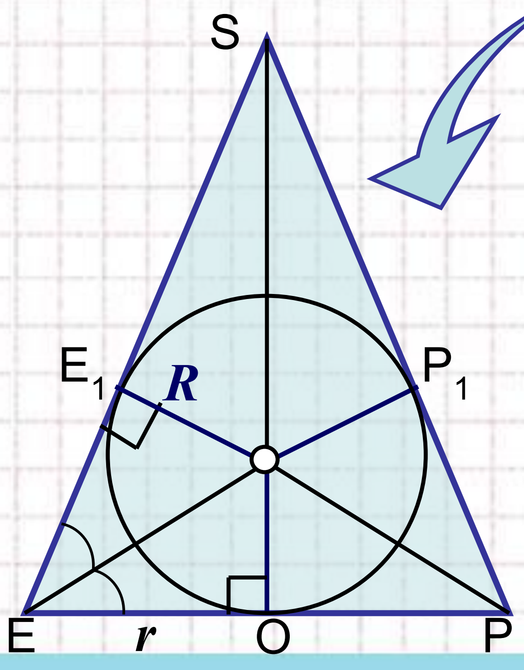


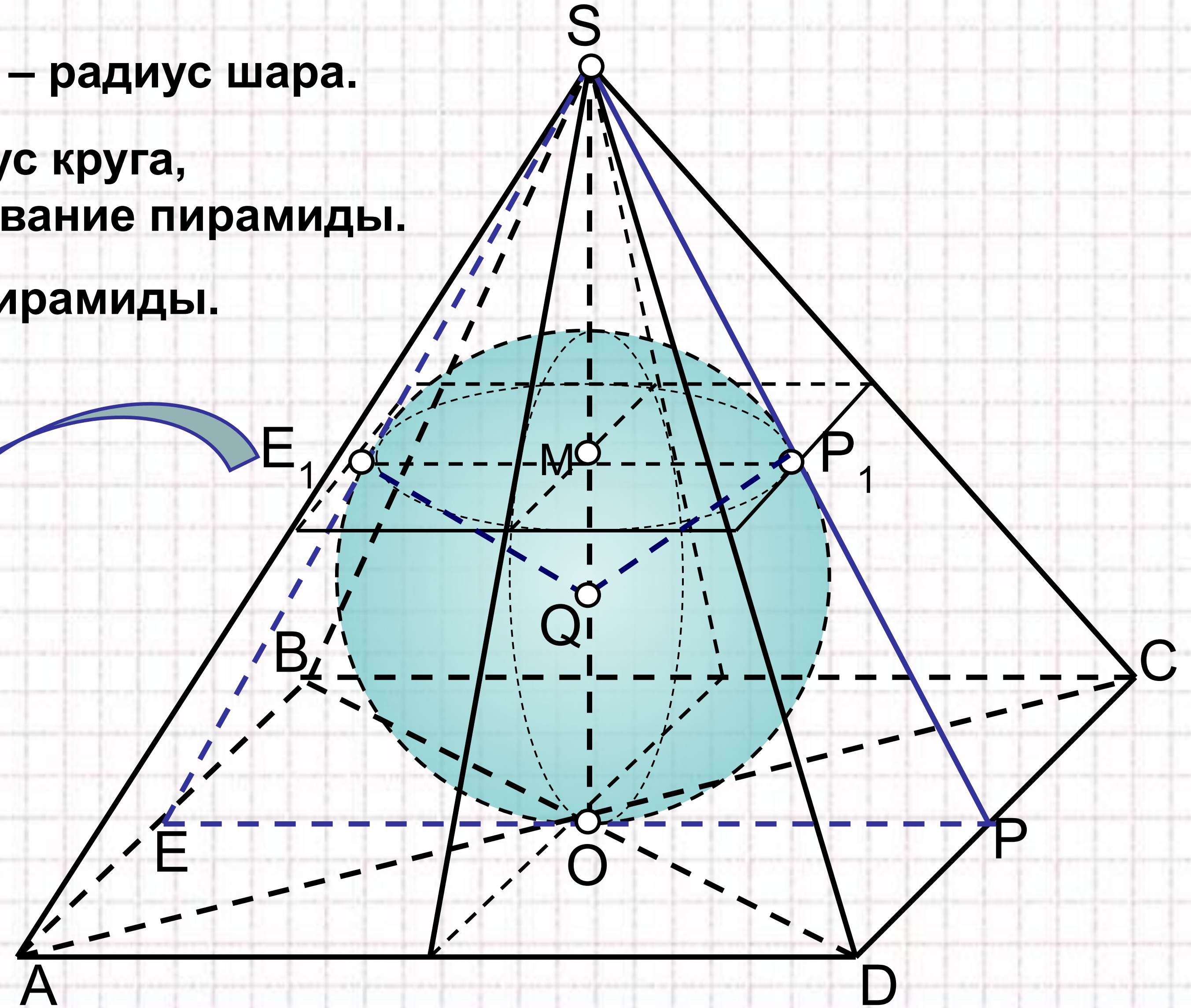
Четырехугольная пирамида описана около шара

$E_1Q = P_1Q = OQ = R$ – радиус шара.

$EO = PO = r$ – радиус круга, вписанного в основание пирамиды.

$SO = H$ – высота пирамиды.



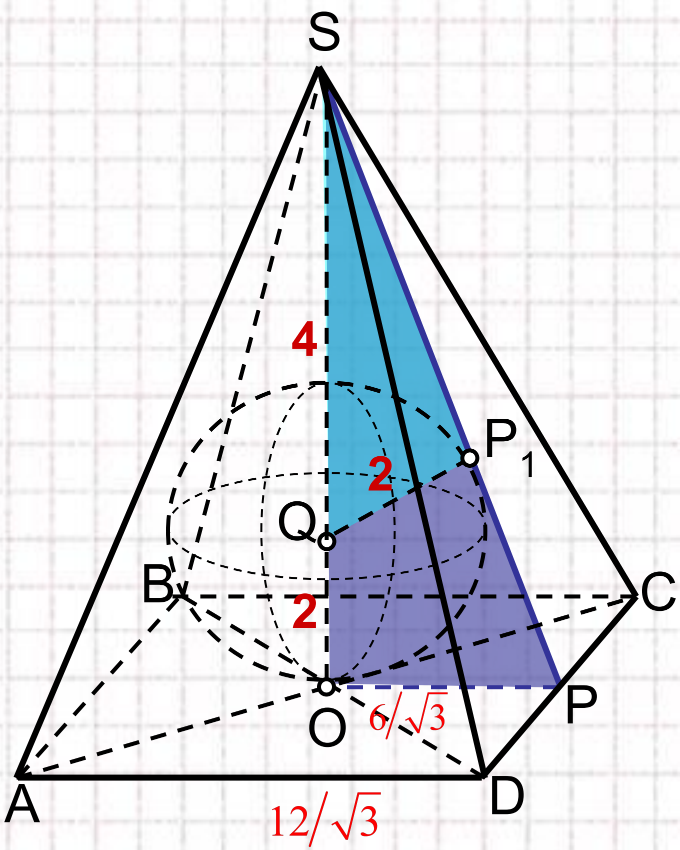


Задачи

1. Шар вписан в пирамиду.
2. Пирамида вписана в шар.
3. Сфера вписана в конус.
4. Куб вписан в конус.
5. Шар вписан в конус.

1

В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар, объем которого 32π/3. Найдите объем пирамиды, если её высота равна 6.



Решение. $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H$

1) $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{32}{3}\pi$, тогда $R^3 = 8$, $R_ш = 2$.

2) $SQ = SO - OQ$, $SQ = 6 - 2 = 4$.

3) ΔSP_1Q – прямоугольный, $SP_1 = \sqrt{16-4} = 2\sqrt{3}$.

4) $\Delta SP_1Q \infty \Delta SOP$ ($\angle P_1 = \angle O = 90°$, $\angle S$ – общий),

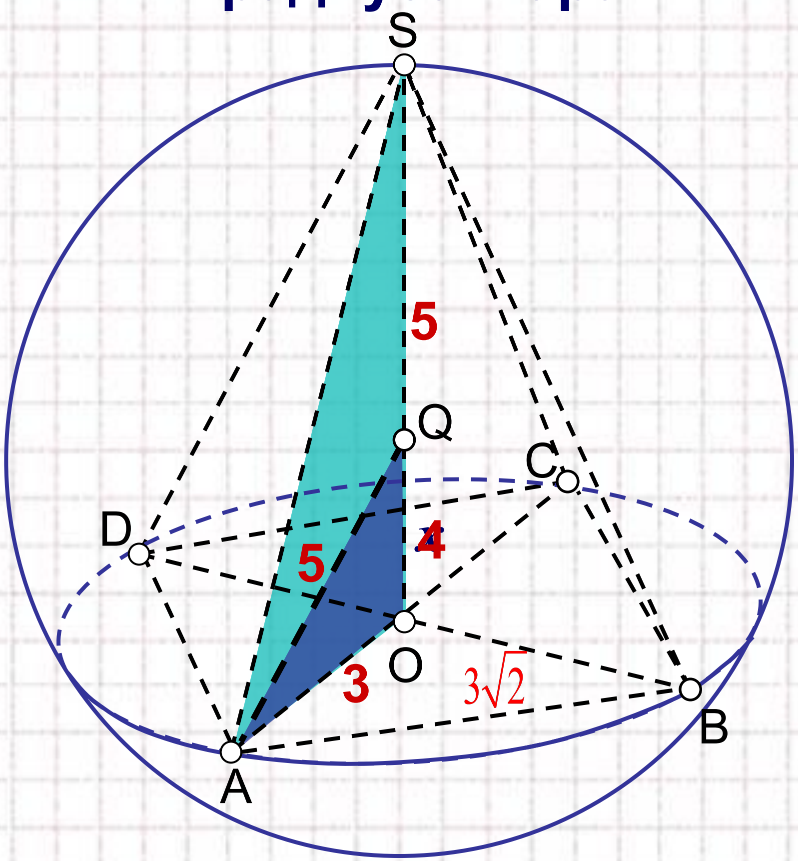
$\frac{QP_1}{OP} = \frac{SP_1}{SO}$, откуда $OP = \frac{QP_1 \cdot SO}{SP_1} = \frac{2 \cdot 6}{2\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}}$.

5) Тогда сторона основания пирамиды вдвое больше, и равна $\frac{12}{\sqrt{3}}$.

6) $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{12}{\sqrt{3}}\right)^2 \cdot 6 = 96.$

Ответ: 96.

2 В шар, объём которого $\frac{500}{3}\pi$, вписана правильная четырехугольная пирамида. Найдите объём пирамиды, если её боковое ребро равно $3\sqrt{10}$, а высота больше радиуса шара.



Решение. $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H$

1) $V_ш = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{500}{3}\pi,$ тогда $R^3 = 125,\ R_ш = 5.$

2) Пусть OQ = x, тогда из ΔAOQ выразим сторону AO: $AO = \sqrt{25 - x^2}.$

3) Составим теорему Пифагора для ΔASO:
$$AS^2 = AO^2 + SO^2,\ \left(3\sqrt{10}\right)^2 = \left(25 - x^2\right) + \left(5 + x\right)^2.$$
Откуда находим OQ = 4.

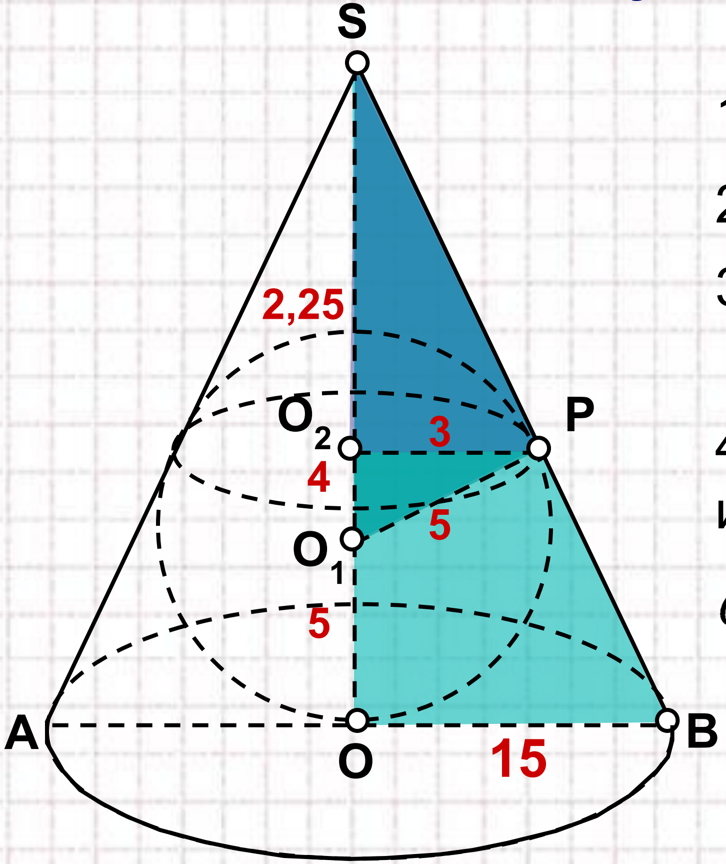
4) Тогда SO = 5+4=9, и AO = 3.

5) В основании пирамиды квадрат, со стороной a, равной $AO\sqrt{2}$, т.е. $a = 3\sqrt{2}$

6) $V = \frac{1}{3} S_o \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot 9 = 54.$

Ответ: 54.

3 **Площадь поверхности сферы, вписанной в конус, равна 100π. Длина окружности, по которой сфера касается поверхности конуса, равна 6π. Найдите радиус основания конуса.**



Решение.

1) C = $2\pi r = 6\pi$, тогда $r = O_2P = 3$.

2) $S_{сферы} = 4\pi R^2 = 100\pi$, тогда $R = O_1P = 5$.

3) Из ΔO_1O_2P по теореме Пифагора находим:

$$O_1O_2 = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{25 - 9} = 4.$$

4) В ΔO_1PS отрезок PO_2 высота, проведенная из вершины прямого угла, значит

$$O_2P = \sqrt{SO_2 \cdot O_1O_2}, \text{ т.е. } 3 = \sqrt{SO_2 4}, \quad SO_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25.$$

5) Найдем высоту конуса

$SO = SO_2 + O_2O_1 + O_1O = 2{,}25 + 4 + 5 = 11{,}25$.

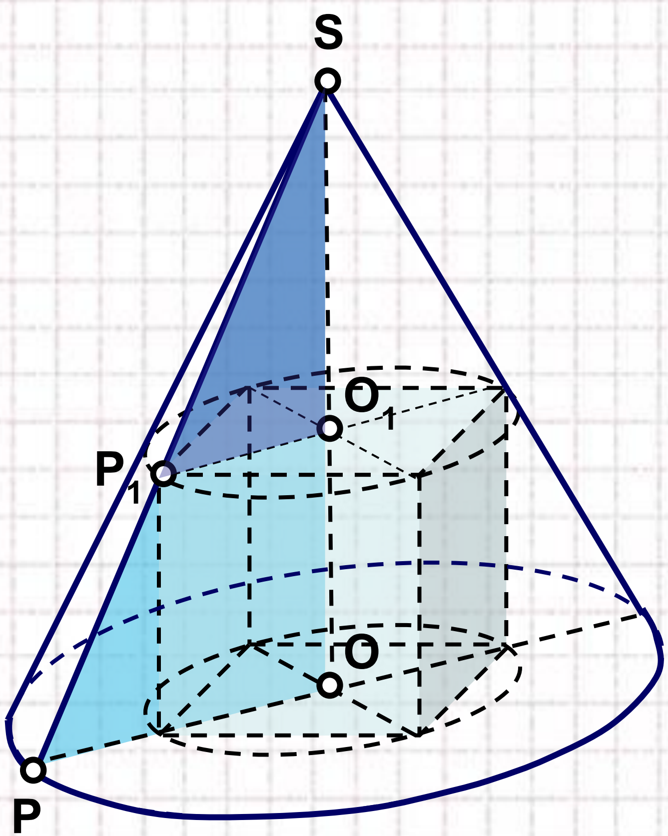
6) $\Delta SO_2P \sim \Delta SOB$ ($\angle O_2 = \angle O = 90°$, $\angle S$ – общий),

$$\frac{SO_2}{SO} = \frac{O_2P}{OB}, \text{ откуда } OB = \frac{O_2P \cdot SO}{SO_2} = \frac{11{,}25 \cdot 3}{2{,}25} = 15.$$

Ответ: 15.

4

В конус с образующей $6\sqrt{6}$ и высотой 12 вписан куб. Найдите объём куба.



Решение.

1) Из прямоугольного ΔSOP находим:

$$OP = \sqrt{SP^2 - SO^2} = \sqrt{216 - 144} = 6\sqrt{2}.$$

2) a – сторона куба, тогда $a = R\sqrt{2}.$

3) Выразим через a: $O_1P_1 = \dfrac{a}{\sqrt{2}},$

$$OO_1 = a,\ \ SO_1 = SO - SO_1 = 12 - a.$$

4) $\Delta\, SO_1P_1 \sim \Delta SOP$ ($\angle O_1 = \angle O = 90°$, $\angle S$ – общий)

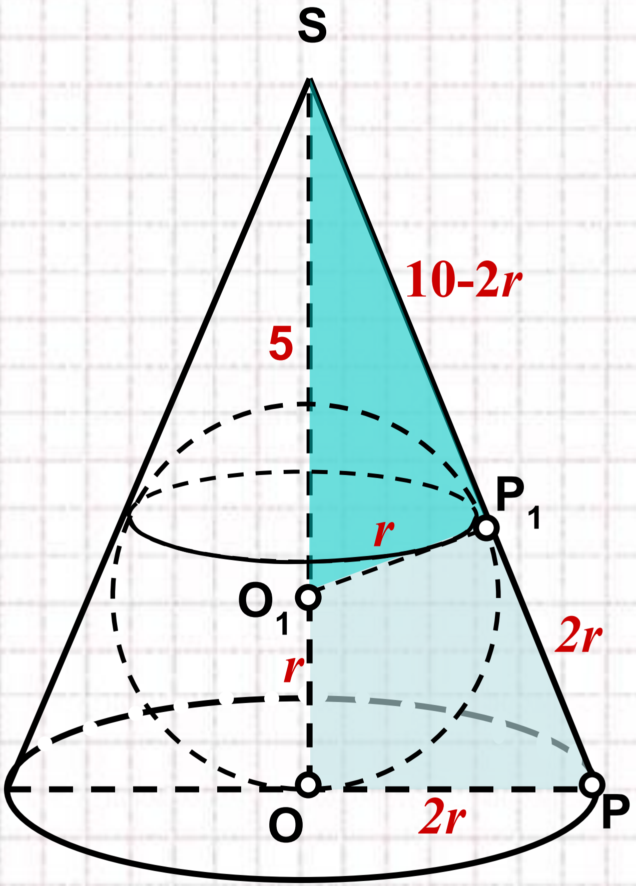
$$\frac{SO_1}{SO} = \frac{PO_1}{PO},\quad \frac{12-a}{12} = \frac{a/\sqrt{2}}{6\sqrt{2}},$$ откуда $a = 6$.

5) $V_{куба} = a^3 = 6^3 = 216.$

Ответ: 216.

5

Площадь основания конуса равна площади поверхности вписанного в него шара. Найдите радиус шара, если образующая конуса равна 10.



Решение.

1) Обозначим радиус шара r, а радиус основания конуса R.

2) По условию $S_{осн.конуса} = S_{шара}$, т.е.

$\pi R^2 = 4\pi r^2, \quad R = 2r.$

3) Δ SP_1O_1∞ΔSOP (∠P_1=∠O=90°, ∠S – общий).

$\frac{O_1P_1}{OP} = \frac{SO_1}{SP}, \quad \frac{r}{2r} = \frac{SO_1}{10}$, откуда $SO_1 = 5$,

коэффициент подобия треугольников k = ½.

4) Заметим, что $PP_1 = 2r$, $SP_1 = 10 - 2r$, $SO = 5 + r$.

5) Тогда $\frac{SP_1}{SO} = \frac{1}{2}, \quad \frac{10-2r}{5+r} = \frac{1}{2}$, откуда $r = 3$.

Ответ: 3.

Реши самостоятельно

1. Высота конуса равна 6, а объём равен 144π. Найдите площадь полной поверхности куба, вписанного в конус.

Ответ: 96

2. Шар объём которого равен $32\pi/3$, вписан в конус. Найдите высоту конуса, если радиус его основания равен $2\sqrt{3}$.

Ответ: 6

Желаю удачи!

Домашнее задание

Реши задачу и оформи решение либо на альбомном листе, либо в виде электронного документа (PowerPoint, Paint, Word и т.д.)

Рефлексия

Что нового вы узнали на уроке?

Чему вы научились?

Какое у вас настроение в конце урока?

Можете ли вы объяснить решение данных задач однокласснику, пропустившему урок сегодня?

Использованные ресурсы

1. Готман Э.Г. Стереометрические задачи и методы их решения. М.: МЦНМО, 2006.— 160 с.
2. Гусев В. А., Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Геометрия. М.: Просвещение, 1992.
3. Комплект таблиц по стереометрии: http://www.varson.ru/geometr_9.html
4. Единый государственный экзамен 2001: Тестовые задания: Математика/С.В. Климин, Т.В. Стрункина, Е.И. Пантелеева и др.; М-во образования РФ. – М.: Просвещение, 2001
5. Для создания шаблона презентации использовалась картинка http://www.box-m.info/uploads/posts/2009-04/1238954029_1.jpg и шаблон с сайта http://aida.ucoz.ru
6. Рисунки на слайдах №6, №12, №13 взяты с сайта: http://office.microsoft.com/ru-ru/images/results.aspx?qu=%D1%81%D0%BC%D0%B0%D0%B9%D0%BB%D1%8B