



УРОК-ПРАКТИКУМ  
В 10 КЛАССЕ

**Пирамида. Решение  
задач по теме  
«Пирамида».**

УЧИТЕЛЬ МАТЕМАТИКИ  
ОГУРЦОВА АЛЛА ЮРЬЕВНА

# Цели урока

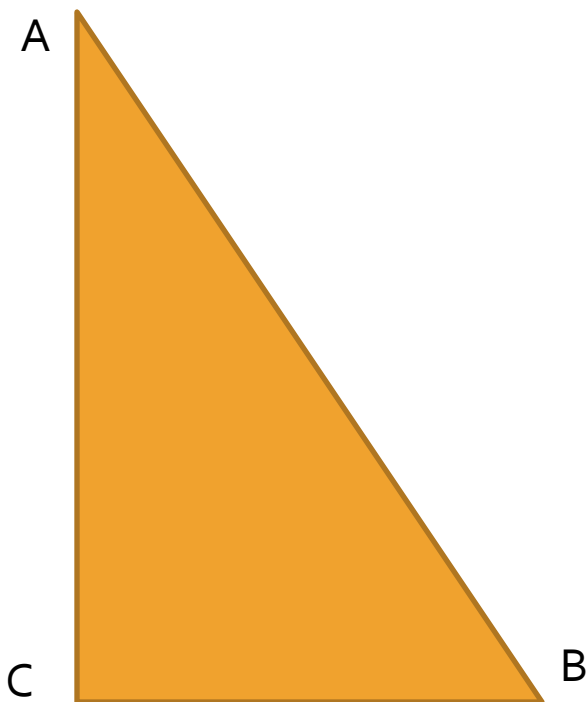
- Изучить мнемонический прием.
- Вывести формулы перехода основных углов в правильных пирамидах.
- Научиться применять мнемонический прием для доказательства зависимостей между углами в правильной пирамиде и решения задач.



# Устная работа

Дан прямоугольный треугольник ABC.

Найдите:

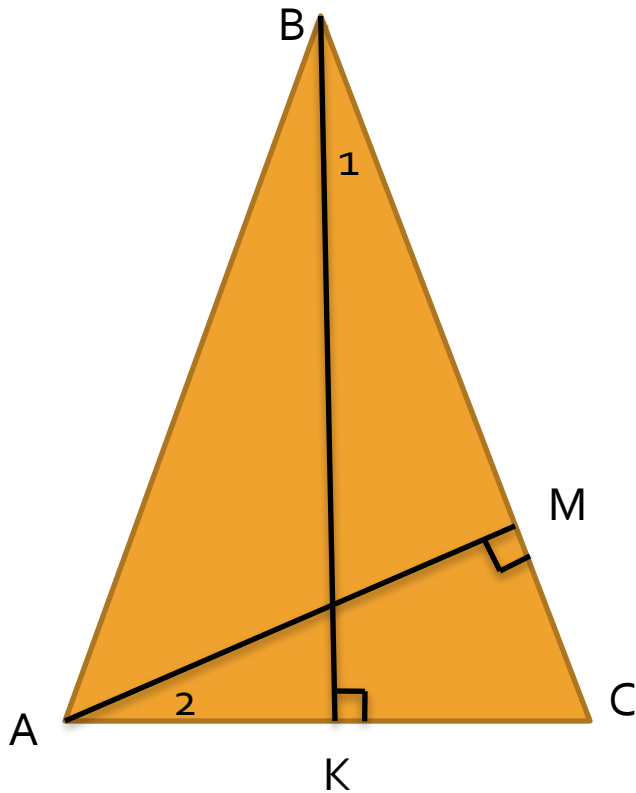


$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{BC}{AC}$$

2) Треугольник ABC равнобедренный. Проведены высоты к основанию и боковой стороне. Докажите, что  $\angle 1 = \angle 2$ .

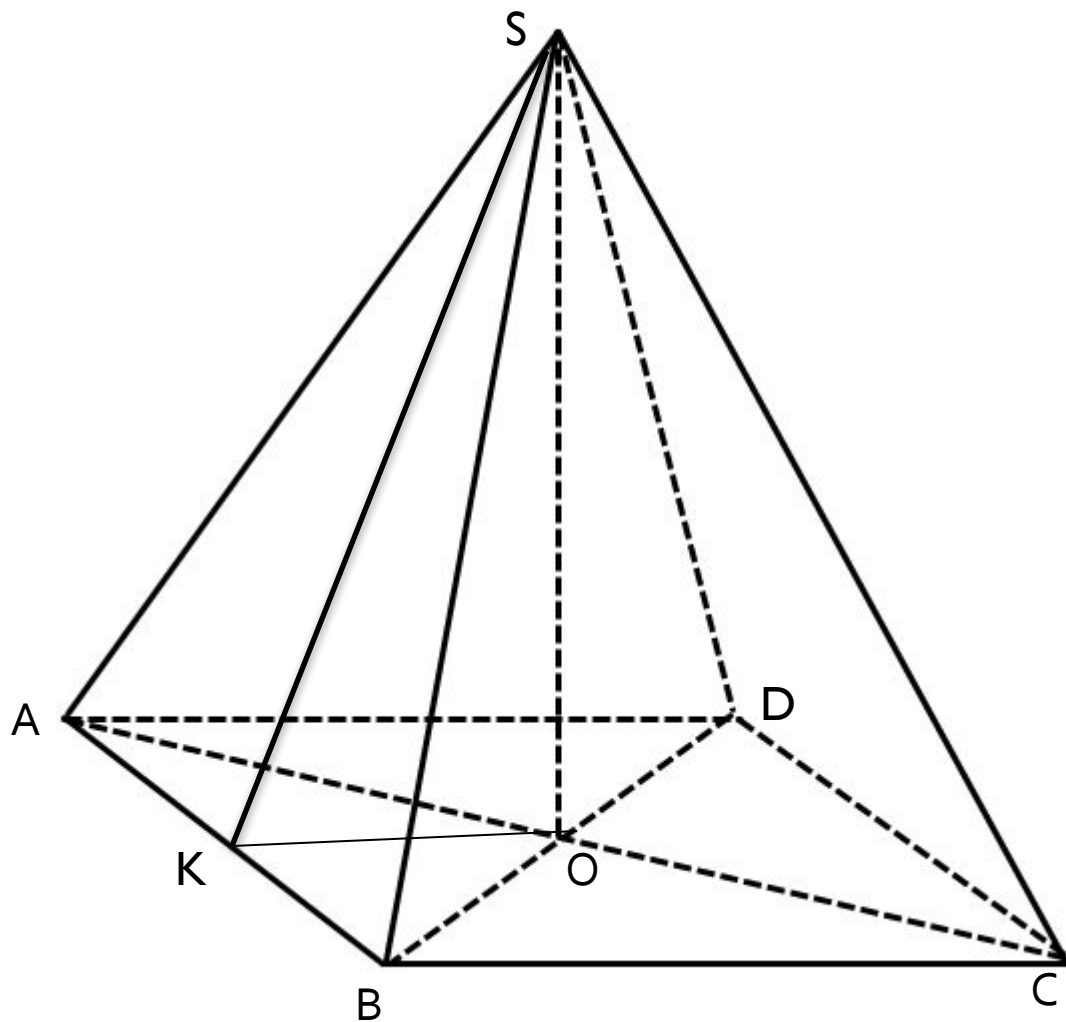


$\triangle AMC \sim \triangle BKC$  (по двум углам)

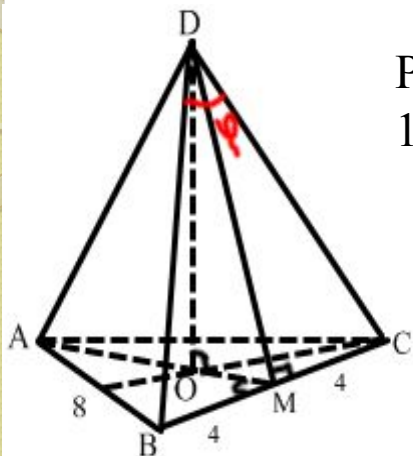


$$\angle 1 = \angle 2$$

# Основные элементы пирамиды



**№ 255** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен  $\varphi$  найдите высоту пирамиды.



Решение:

1. Из  $\triangle BCD$  найдем боковое ребро  $DC$  по теореме косинусов:  
получим

$$BC^2 = BD^2 + CD^2 - 2BD \cdot CD \cdot \cos \varphi$$

$$64 = 2 \cdot BD^2 - 2 \cdot BD^2 \cos \varphi$$

$$64 = 4 \cdot BD^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$BD = \frac{4}{\sin \frac{\varphi}{2}}$$

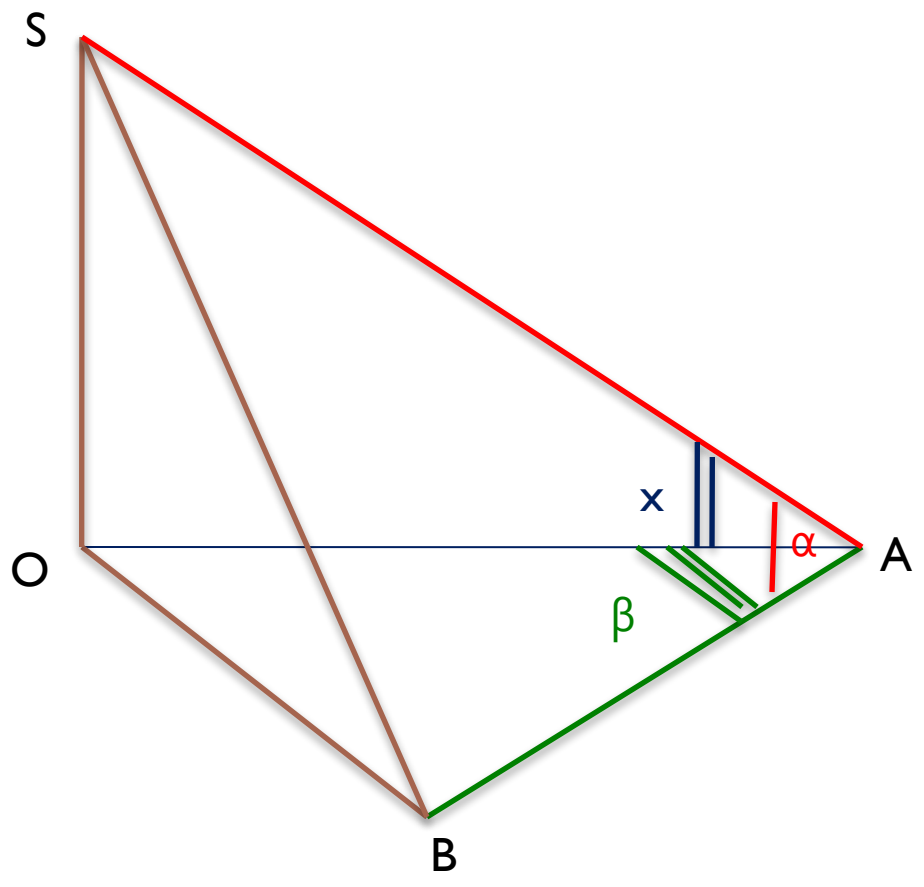
2. Из  $\triangle CDO$  определим высоту пирамиды  $DO = H = \sqrt{DC^2 - OC^2}$ , где  $OC$  – радиус окружности, описанной около основания  $\triangle ABC$ .

3. По теореме синусов  $\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2OC$ ,  $OC = \frac{8}{\sqrt{3}}$

$$4. H = \sqrt{\frac{16}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{64}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{4}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 - 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3 \cdot \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} =$$

$$= 4 \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$$

Ответ:  $\frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}$



# МНЕМОНИКА



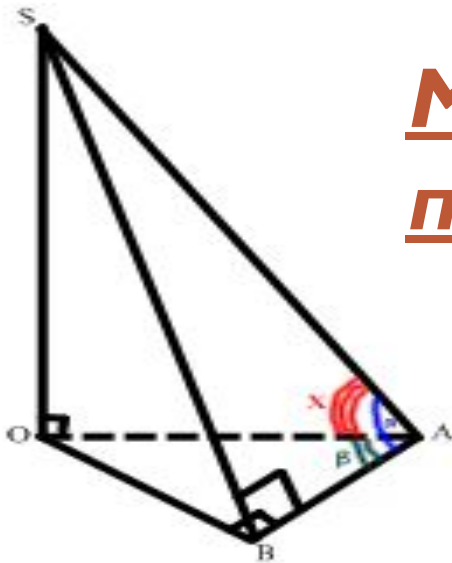
**Биссектриса — это крыса (бегает по углам и делит их пополам)**

**Медиана — это обезьяна (лазает по сторонам, делит их пополам)**

**Три закона Ньютона:**

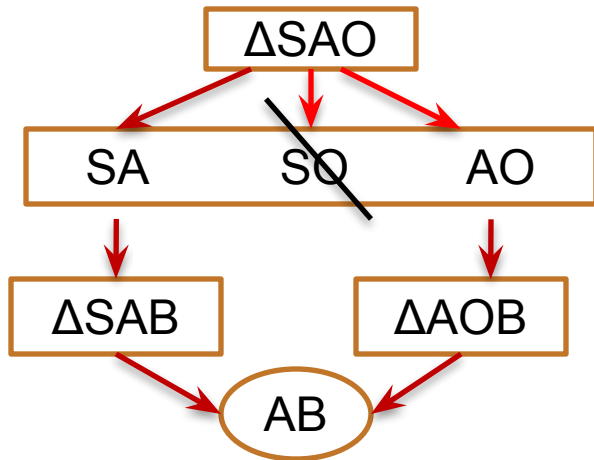
- 1) не пнёшь — не полетит**
- 2) как пнёшь, так и полетит**
- 3) как пнёшь, так и получишь**





# Мнемонический прием:

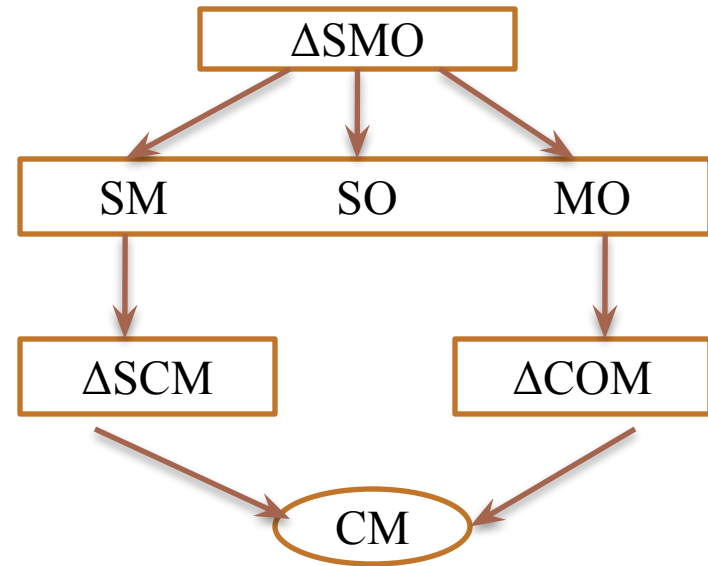
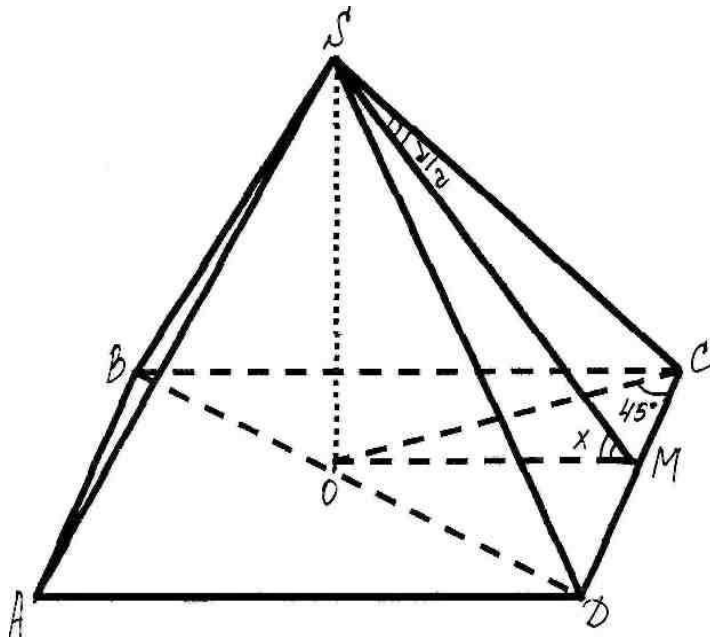
$$\cos x = \frac{AO}{SA}$$



$$\cos x = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{AO}{AB}}{\frac{SA}{AB}} = \frac{\frac{1}{\cos \beta}}{\frac{1}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta}$$

1. Запишем наименования треугольника, в котором находится искомый угол.
2. Из трех букв S, A, O составим различные пары. Получили три отрезка.
3. Зачеркнем тот, который не является общим для треугольников, имеющих данные углы.
4. Добавим по букве, чтобы получить наименование треугольника, включающего один из данных углов:  $\alpha$  или  $\beta$ .
5. Найдем отрезок, состоящий из общих букв.
6. Для нахождения искомой зависимости разделим числитель и знаменатель на найденный отрезок.

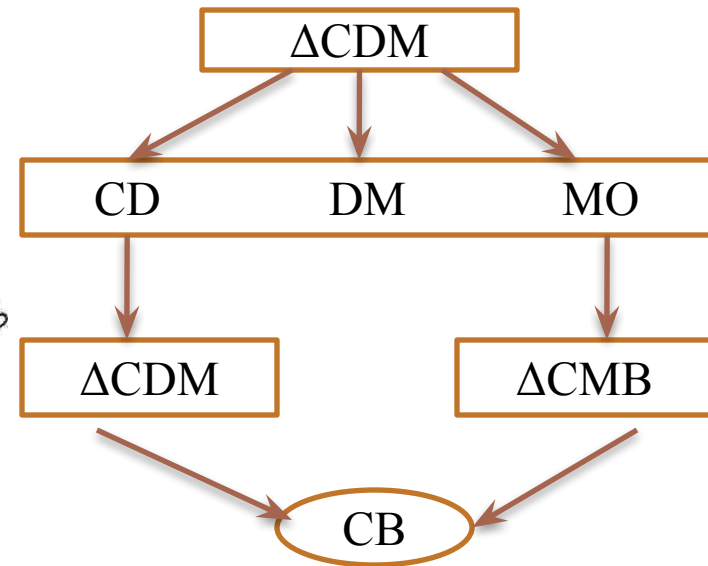
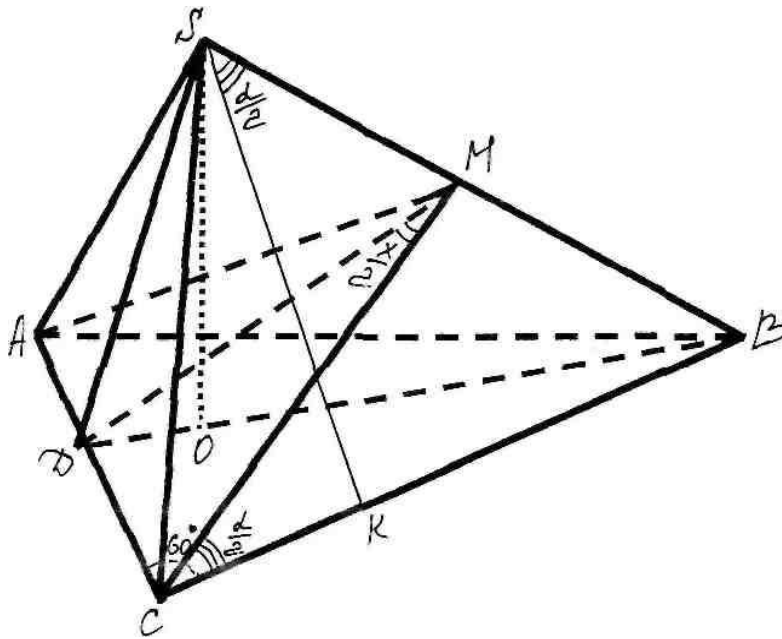
# Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания (четырёхугольная пирамида)



$$\cos x = \frac{MO}{SM} = \frac{\frac{MO}{CM}}{\frac{SM}{CM}} = \frac{tg 45^\circ}{ctg \frac{\alpha}{2}} = tg \frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos x = tg \frac{\alpha}{2}.$$

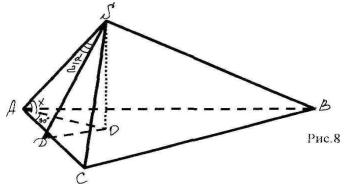
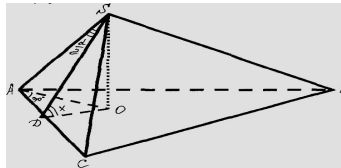
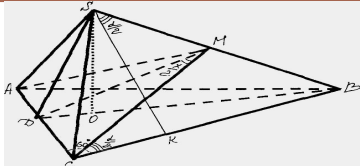
# Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре



$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{DC}{CM} = \frac{\frac{DC}{CB}}{\frac{CM}{CB}} = \frac{\cos 60^\circ}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$$

# РАБОТА В ГРУППАХ

Переходы	N=3	N=4
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания		
 <p style="text-align: right;">Рис. 8</p>		
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания		
		$\cos x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$
Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре		
	$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$	

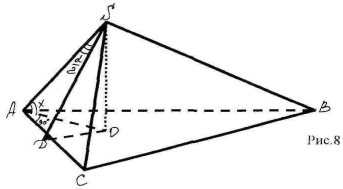
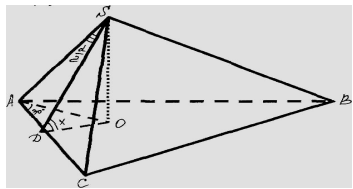
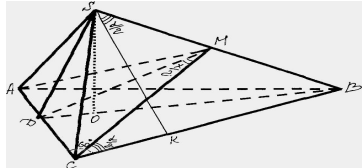
$$\cos x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos x = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$$

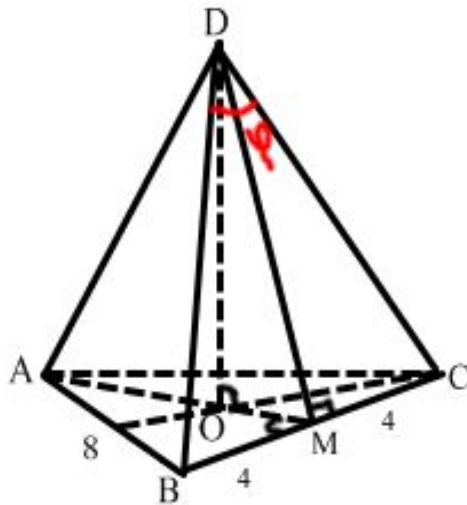
$$\cos x = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$$

# РАБОТА В ГРУППАХ

Переходы	N=3	N=4
<p>Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания</p>		
 <p>Рис. 8</p>	$\cos x = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$
<p>Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания</p>		
	$\cos x = \frac{tg \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = tg \frac{\alpha}{2}$
<p>Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре</p>		
	$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$	$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$

# Вернемся к задаче 255

В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 8 см, а плоский угол при вершине равен  $\varphi$  найдите высоту пирамиды.



1. Из  $\triangle ABC$  найдем  $OM = \frac{1}{2} \cdot CO = \frac{4}{\sqrt{3}}$ .

2. Применим формулу перехода для  $\angle DMO = x$ :

$$\cos x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{MO}{DM}, \text{ отсюда } DM = \frac{OM}{\cos x} = \frac{4}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}.$$

3. По теореме Пифагора  $DO = \sqrt{\frac{16}{\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{16}{3}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{3}} =$

$$= \frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan^2 \frac{\varphi}{2}}}{\tan \frac{\varphi}{2}}.$$

Ответ:  $\frac{4 \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{3} \cdot \tan^2 \frac{\varphi}{2}}}{\tan \frac{\varphi}{2}}$



Переходы	3	4	6	n
----------	---	---	---	---

Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом между боковым ребром и плоскостью основания

<p>Рис. 8</p>	$\cos x = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}$	$\cos x = 2 \sin \frac{\alpha}{2}$	$\cos x = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\pi}{n}}$
---------------	---	---	------------------------------------	---

Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при ребре основания

	$\cos x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}$	$\cos x = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$\cos x = \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$	$\cos x = \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{n}}$
--	--	---	--	---

Зависимость между плоским углом при вершине правильной пирамиды и углом при боковом ребре

	$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$	$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}$	$\sin \frac{x}{2} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$
--	--	---	---	---

Зависимость между углом при боковом ребре и плоскостью основания правильной пирамиды

<p>Рис. 17</p>	$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$\sin x = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$\sin x = \sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$	$\sin x = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$
----------------	---	--	---	---

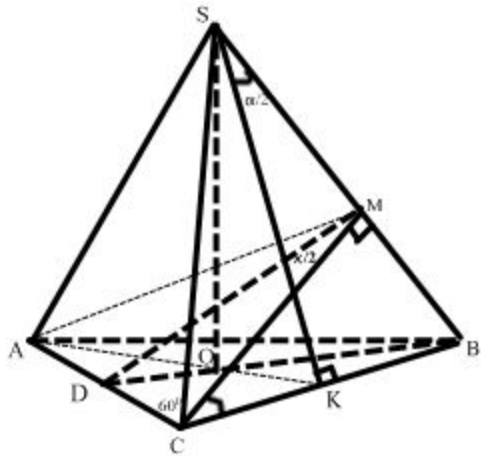
Зависимость между углом при ребре основания и углом между боковым ребром и плоскостью основания

	$\operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha}{2}$	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \alpha \cos \frac{\pi}{n}$
--	--	---	---	---

№ 256 г) В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна  $m$ , а плоский угол при вершине равен  $\alpha$ . Найти двугранный угол при боковом ребре пирамиды.

Решение:

Пусть линейный угол двугранного угла будет равен  $X$ .



$\triangle AMC$  равнобедренный, значит  $\sphericalangle DMC = \frac{1}{2}X$ .  
Применим формулу перехода:

$$\sin \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}$$

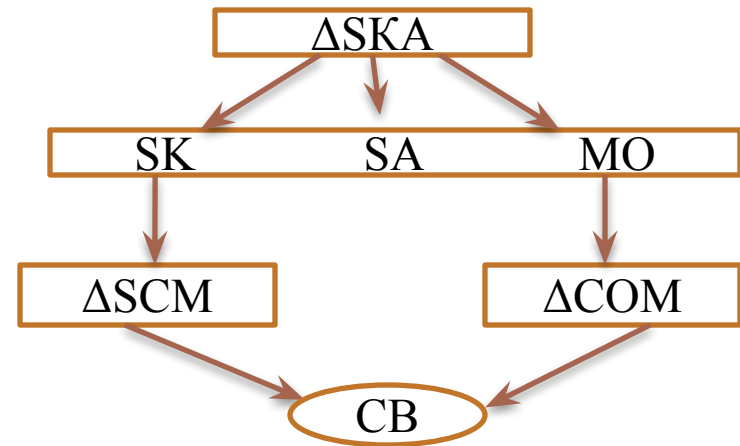
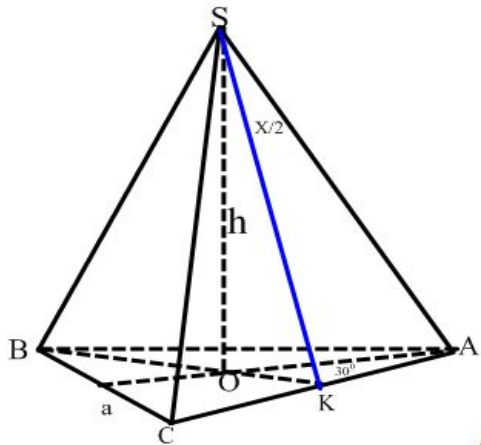
Отсюда:  $\frac{x}{2} = \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$  или

$$X = 2 \arcsin \left( \frac{1}{\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \right) = 2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$$

Ответ:  $2 \arcsin \left( \frac{\sqrt{2}}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} \right)$



№ 254 (б) В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна  $a$ , а высота равна  $h$ . Найти плоский угол при вершине пирамиды.



Из  $\triangle SKA$ :  $\sin \frac{x}{2} = \frac{AK}{SA} = \frac{\frac{AK}{KO}}{\frac{SA}{KO}} = \frac{tg 60^\circ}{\frac{SA}{KO}}$ ,  $SA = \sqrt{h^2 + AO^2}$ , где  $AO = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $OK = \frac{1}{2}AO = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Тогда  $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{3}}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}$  и отсюда  $\frac{x}{2} = \arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}\right)$

Значит  $x = 2\arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}\right)$

Ответ:  $x = 2\arcsin\left(\frac{3a}{2\sqrt{9h^2 + 3a^2}}\right)$

# Рефлексия

- Изучили мнемонический прием.
- Вывели формулы перепада основных углов в правильных пирамидах.
- Научились применять мнемонический прием для доказательства зависимостей между углами в правильной пирамиде и решения задач.

# ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

- ✓ Задача № 254 (б,г,д) – решить двумя способами – традиционно и с помощью мнемонического приема или формул перехода;
- ✓ Изучить теоретический материал урока (см. опорные схемы урока) и мнемонический прием, а так же ознакомиться с презентацией к уроку (см. электронную папку учителя);
- ✓ Дополнительная информация по теме урока содержится в презентации «Это интересно» (см. электронную папку учителя).

**СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ**