

# Решение экзамен. Задач

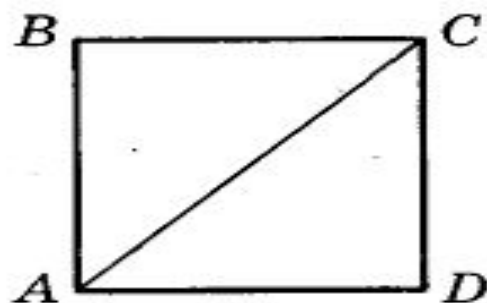
По теме призма, куб,  
параллелепипед.

11 класс.

19. Ребро куба дорівнює 2 см. Знайдіть діагональ цього куба.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$4\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{3}$ см	$2\sqrt{2}$ см

Найдите диагональ квадрата, если его площадь равна 8.



20. Знайдіть кут між ребром  $A_1D_1$  і діагоналлю  $BD$  куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$ .

А	Б	В	Г	Д
$45^\circ$	$90^\circ$	$30^\circ$	$60^\circ$	Неможливо визначити

14. Діагональ куба дорівнює 9 см. Знайдіть площу повної поверхні куба.

А	Б	В	Г	Д
$81 \text{ см}^2$	$243 \text{ см}^2$	$486 \text{ см}^2$	$118 \text{ см}^2$	$162 \text{ см}^2$

15. На рис. 9 зображено розгортку поверхні тіла, складену з шести попарно рівних прямокутників, розміри яких у сантиметрах вказано на рисунку. Знайдіть об'єм цього тіла.

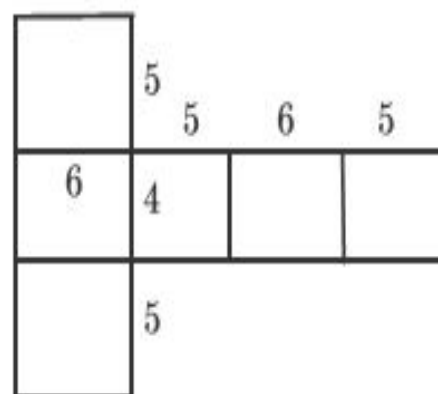


Рис. 9

А	Б	В	Г	Д
$120 \text{ см}^3$	$100 \text{ см}^3$	$150 \text{ см}^3$	$144 \text{ см}^3$	Інша відповідь

18. Обчисліть довжину висоти прямої призми, в основі якої лежить ромб із діагоналями 6 см та 8 см, якщо довжина більшої діагоналі призми дорівнює 10 см.

А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$2\sqrt{7}$ см	$4\sqrt{7}$ см	10 см

16. В основі прямої призми лежить рівнобічна трапеція з бічною стороною 5 см та основами 2 см і 8 см. Бічне ребро призми дорівнює 6 см. Обчисліть площу повної поверхні призми.

А	Б	В	Г	Д
$90 \text{ см}^2$	$100 \text{ см}^2$	$110 \text{ см}^2$	$130 \text{ см}^2$	$170 \text{ см}^2$

17. Обчисліть довжину меншої діагоналі прямої призми, в основі якої лежить ромб зі стороною 4 м та гострим кутом  $60^\circ$ . Висота призми становить 3 м.

А	Б	В	Г	Д
3 м	4 м	5 м	20 м	$\sqrt{37}$ м

24. Установіть відповідність між многогранниками (1–4) та їх об'ємами (А–Д).

1 Куб із ребром 4

А 9

2 Прямокутний паралелепіпед із вимірами 3, 4, 5

Б 10

3 Пряма трикутна призма, висота якої 10, а основою є прямокутний трикутник з катетами 3 і 4

В 20

Г 60

Д 64

4 Правильний тетраедр з ребром  $3\sqrt{2}$

	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

38. Площі граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють  $20 \text{ см}^2$ ,  $40 \text{ см}^2$  і  $50 \text{ см}^2$ . Знайдіть об'єм паралелепіпеда (у  $\text{см}^3$ ).

Відповідь: \_\_\_\_\_

39. Для опалювальної системи будинку необхідні радіатори з розрахунку: три одиниці на  $50 \text{ м}^3$ . Яку кількість одиниць радіаторів треба замовити на новий будинок, якщо він має форму прямокутного паралелепіпеда розміром  $15 \text{ м} \times 20 \text{ м} \times 30 \text{ м}$ ?

Відповідь: \_\_\_\_\_

41. Основою прямого паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  є паралелограм  $ABCD$ , у якому  $AD = 2$ ,  $CD = 2\sqrt{3}$ ,  $\angle D = 60^\circ$ . Об'єм паралелепіпеда дорівнює 30. Обчисліть висоту паралелепіпеда.

Відповідь: \_\_\_\_\_

44. Висота прямої призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  дорівнює 36. Основа призми — трикутник  $ABC$ , площа якого дорівнює 12,  $AB = 5$ . Знайдіть тангенс кута між площиною  $ABC_1$  і площиною основи призми.



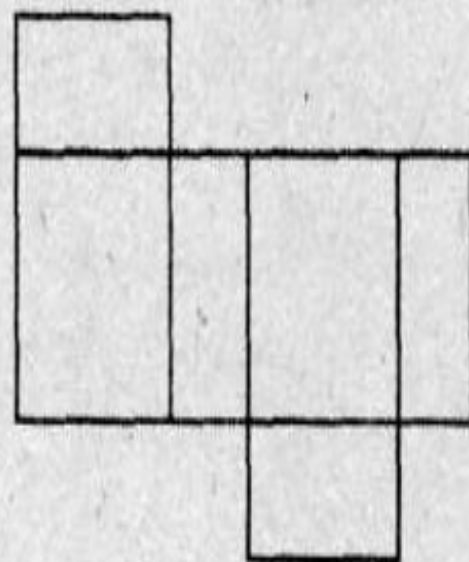
11. Знайдіть площу повної поверхні куба, діагональ якого дорівнює  $2\sqrt{3}$  см.

12. Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює 3 см, а периметр її бічної грані – 22 см. Знайдіть площу бічної поверхні цієї призми.

22. На скільки відсотків зменшиться об'єм куба, якщо його сторону зменшити на 20 %?

А	Б	В	Г	Д
на 20%	на 10%	на 40%	на 48,8%	на 49,8%

24. На рисунку зображено розгортку поверхні тіла, складеного з двох квадратів і чотирьох однакових прямокутників, довжина сторін яких дорівнює 3 см і 6 см. Визначте об'єм цього тіла.



А	Б	В	Г	Д
$108 \text{ см}^3$	$54 \text{ см}^3$	$144 \text{ см}^3$	$36 \text{ см}^3$	Інша відповідь

12. Знайдіть висоту прямокутного паралелепіпеда, якщо його діагональ дорівнює 26, а сторони основи становлять 6 і 8.

А	Б	В	Г	Д
8	10	12	20	24

46. Основа прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — паралелограм  $ABCD$ , у якому  $AD = 4\sqrt{2}$ ,  $\angle BCD = 135^\circ$ . Висота призми дорівнює 3. Знайдіть тангенс кута між площиною основи призми і площиною  $A_1 DC$ .

Відповідь: \_\_\_\_\_

47. Основа прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$  з кутом  $150^\circ$  і стороною, яка дорівнює 10. Тангенс кута між площиною основи призми і площиною  $ABC_1$  дорівнює 4,2. Знайдіть висоту призми.

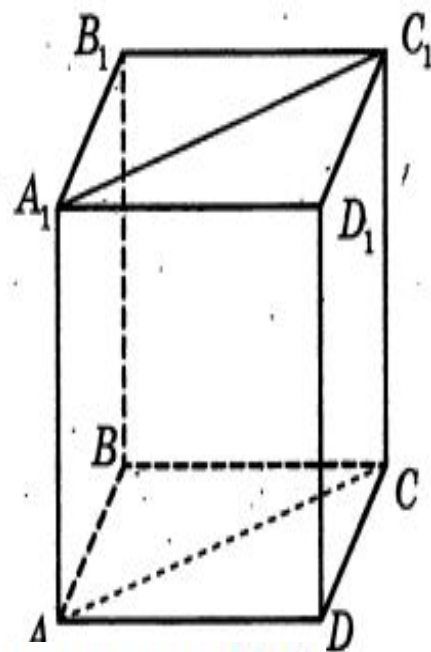
Відповідь: \_\_\_\_\_

48. Основа прямої призми  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — ромб  $ABCD$  з кутом  $150^\circ$  і стороною, яка дорівнює 2. Тангенс кута між площиною основи призми і площиною  $ABC_1$  дорівнює 4,2. Знайдіть висоту призми.



18. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  з ребром 2. Знайдіть відстань між площиною  $AA_1 C_1 C$  і прямою  $DD_1$ .

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{2}$	$2\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	2	1



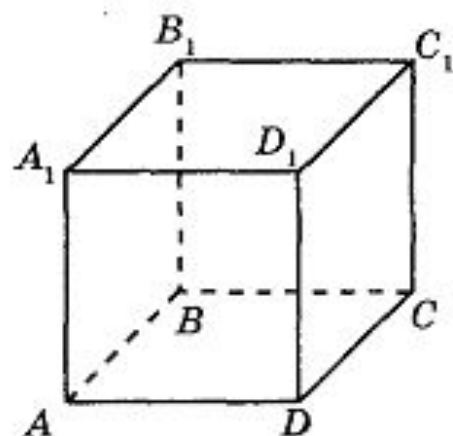
19. Знайдіть об'єм конуса, радіус якого  $6$  і утвореного в площині.

31. Основою прямої трикутної призми  $ABCA_1 B_1 C_1$  є рівнобедрений трикутник  $ABC$ , де  $AB = BC = 25$  см,  $AC = 30$  см. Через бічне ребро  $AA_1$  призми проведено площину, перпендикулярну до ребра  $BC$ . Визначте об'єм призми (у  $\text{см}^3$ ), якщо площа утвореного перерізу дорівнює  $72$   $\text{см}^2$ .

28. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Установіть відповідність між заданими кутами (1—4) і їхніми градусними мірами (А—Д).

- 1 Кут між прямими  $BC_1$  і  $AD_1$
- 2 Кут між прямими  $DC_1$  і  $BA_1$
- 3 Кут між прямими  $D_1 B_1$  і  $DC_1$
- 4 Кут між прямими  $AD$  і  $CC_1$

- А  $0^\circ$   
 Б  $60^\circ$   
 В  $30^\circ$   
 Г  $90^\circ$   
 Д  $45^\circ$



18. Прямокутний паралелепіпед має ребра завдовжки 1 см, 2 см і 3 см. Знайдіть об'єм даного паралелепіпеда.

А	Б	В	Г	Д
$9 \text{ см}^3$	$6 \text{ см}^3$	$18 \text{ см}^3$	$5 \text{ см}^3$	Інша відповідь

20. Знайдіть площу бічної поверхні правильної трикутної призми, у якої висота дорівнює стороні основи — 2 см.

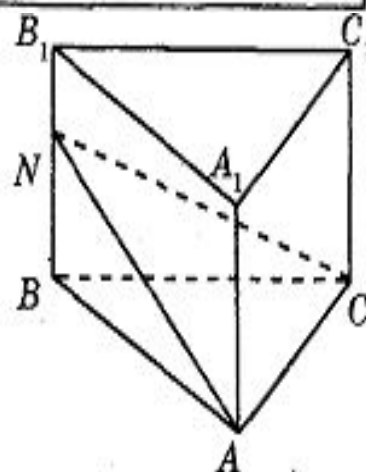
А	Б	В	Г	Д
$2 \text{ см}^2$	$12 \text{ см}^2$	$4 \text{ см}^2$	$24 \text{ см}^2$	$2\sqrt{3} + 12 \text{ см}^2$

18. Периметр основи правильної трикутної призми дорівнює 24 см. Площа бічної грані цієї призми дорівнює  $48 \text{ см}^2$ . Обчисліть діагональ бічної грані.

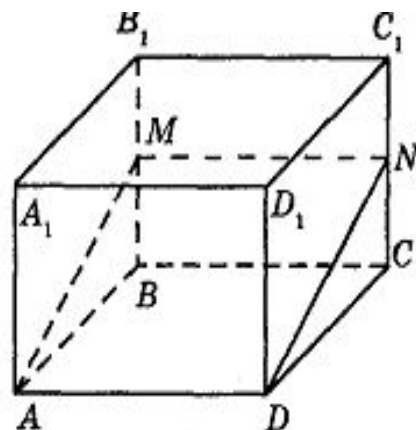
А	Б	В	Г	Д
6 см	8 см	$6\sqrt{2}$ см	10 см	12 см

25. Об'єм прямої трикутної призми  $ABCA_1B_1C_1$  дорівнює  $48 \text{ см}^3$ . Точка  $N$  ділить ребро  $BB_1$  у відношенні 5:3, рахуючи від вершини  $B$  (див. рисунок). Обчисліть об'єм піраміди  $ABCN$ .

А	Б	В	Г	Д
$16 \text{ см}^3$	$24 \text{ см}^3$	$3 \text{ см}^3$	$10 \text{ см}^3$	$24 \text{ см}^3$



25. Об'єм прямокутного паралелепіпеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  дорівнює  $56 \text{ см}^3$  (див. рисунок). У паралелепіпеді проведено переріз так, що  $CN = NC_1$ . Знайдіть об'єм призми  $ABMDCN$ .

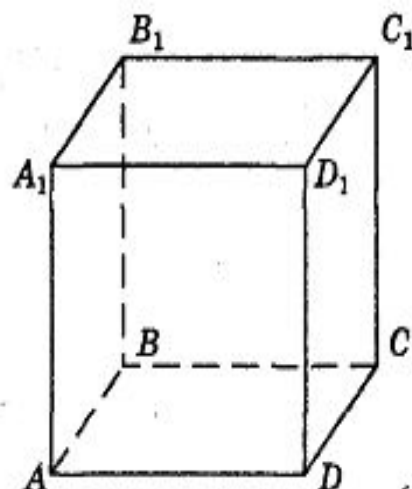


А	Б	В	Г	Д
$4 \text{ см}^3$	$7 \text{ см}^3$	$8 \text{ см}^3$	$28 \text{ см}^3$	$14 \text{ см}^3$

18. Обчисліть діагональ куба, якщо діагональ його нижньої основи дорівнює  $4 \text{ см}$ .

А	Б	В	Г	Д
$(4 + 2\sqrt{2}) \text{ см}$	$2\sqrt{6} \text{ см}$	$4\sqrt{2} \text{ см}$	$24 \text{ см}$	Інша відповідь

18. На рисунку зображено куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ . Знайдіть кут між площинами  $ACC_1 A_1$  і  $BDD_1 B_1$ .



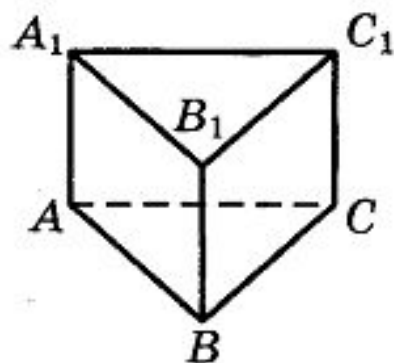
А	Б	В	Г	Д
$45^\circ$	$30^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$60^\circ$

15. Визначте відстань від вершини  $A$  куба  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  до площини  $BDD_1 B_1$ , якщо ребро куба дорівнює  $6\sqrt{2}$  см.

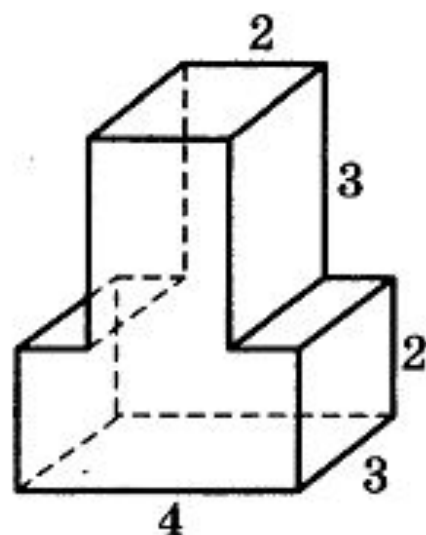
А	Б	В	Г	Д
7 см	4 см	6 см	12 см	$6\sqrt{2}$ см

Діагональ правильної чотирикульної призми наклонена к плоскости основания под углом  $30^\circ$ . Боковое ребро равно 3. Найдите диагональ призмы.

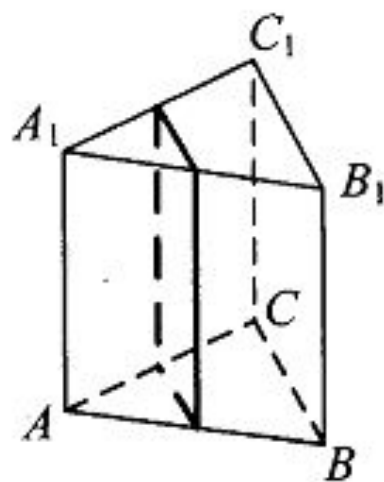
В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  со стороной  $3\sqrt{3}$  найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC$ .



Найдите объём многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  стороны оснований равны 1, боковые рёбра равны 11. Найдите площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через середины рёбер  $AB$ ,  $AC$ ,  $A_1B_1$  и  $A_1C_1$ .





24. Обчисліть об'єм правильної чотирикутної призми, діагональ основи якої дорівнює 5 см, а висота призми — 4 см.

А	Б	В	Г	Д
$20 \text{ см}^3$	$30 \text{ см}^3$	$50 \text{ см}^3$	$100 \text{ см}^3$	$120 \text{ см}^3$

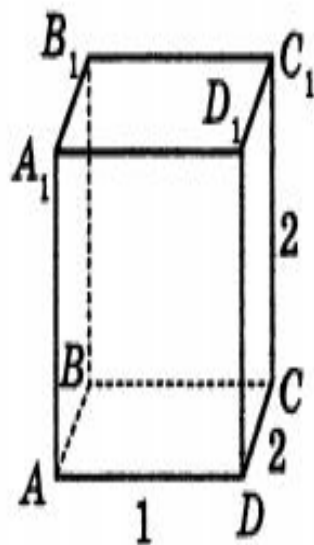
24. Бічне ребро похилої призми дорівнює  $2\sqrt{2}$  см і нахилене до площини основи під кутом  $45^\circ$ . Знайдіть проекцію бічного ребра на площину основи.

А	Б	В	Г	Д
$2\sqrt{2} \text{ см}$	$2 \text{ см}$	$1 \text{ см}$	$\sqrt{2} \text{ см}$	$\sqrt{3} \text{ см}$



28. На рисунку зображено прямокутний паралелепіпед та вказано його розміри. Установіть відповідність між геометричними величинами (1-4) та їхніми числовими значеннями (А-Д).

- |   |   |   |    |
|---|---|---|----|
| 1 | діагональ прямокутного паралелепіпеда             | А | 2  |
| 2 | площа бічної поверхні прямокутного паралелепіпеда | Б | 3  |
| 3 | площа поверхні прямокутного паралелепіпеда        | В | 4  |
| 4 | об'єм прямокутного паралелепіпеда                 | Г | 16 |
|   |   | Д | 20 |

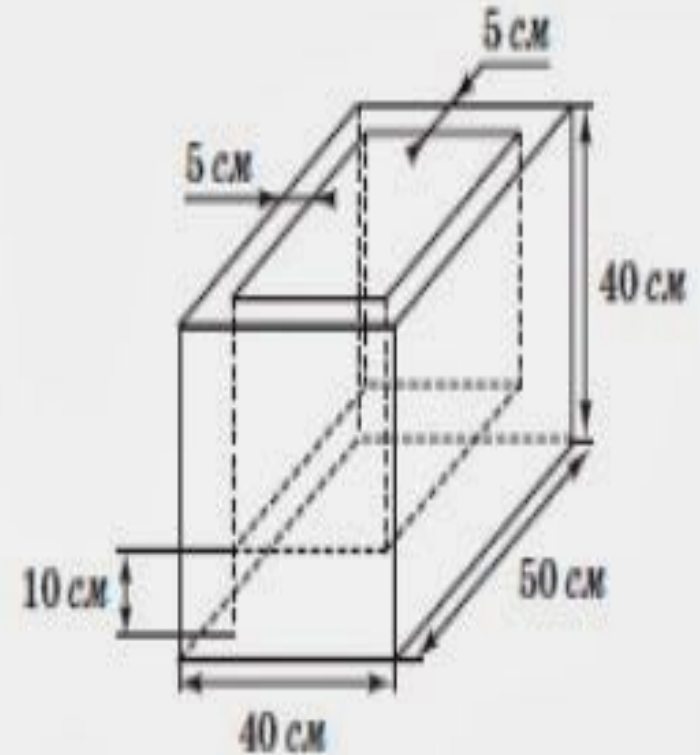


	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

24. Знайдіть об'єм прямої призми, в основі якої лежить ромб з діагоналями 10 см і 18 см, а бічне ребро призми дорівнює 5 см.

А	Б	В	Г	Д
500 см <sup>3</sup>	450 см <sup>3</sup>	800 см <sup>3</sup>	900 см <sup>3</sup>	1000 см <sup>3</sup>

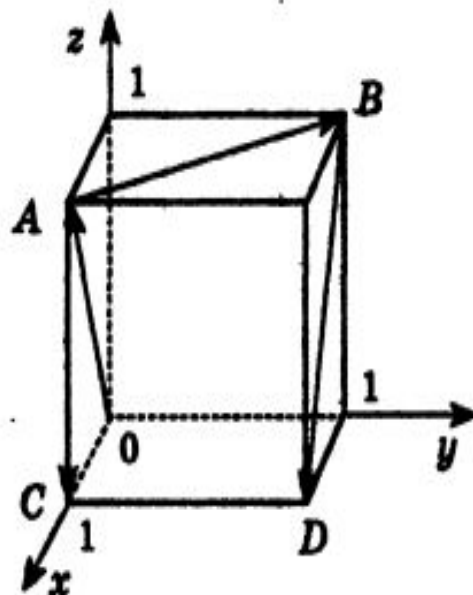
19. На площі міста встановили однакові бетонні ємності для квітів, виготовлені у формі прямокутних паралелепіпедів, виміри яких дорівнюють 40 см, 40 см і 50 см (див. рисунок). Товщина кожної з чотирьох бічних стінок становить 5 см, а товщина днища – 10 см. Який об'єм бетону (у  $\text{м}^3$ ) було використано для виготовлення 10 таких ємностей? Утра-тою бетону під час виготовлення знехтуйте.



А	Б	В	Г	Д
0,32 $\text{м}^3$	0,33 $\text{м}^3$	0,36 $\text{м}^3$	0,44 $\text{м}^3$	0,8 $\text{м}^3$

На рисунку зображено куб з ребром 1. Установіть відповідність між векторами, зображеними на рисунку (1-4), та їхніми координатами (А-Д).

- |   |                 |   |            |
|---|-----------------|---|------------|
| 1 | $\overline{AB}$ | А | (0; 1; 0)  |
| 2 | $\overline{AC}$ | Б | (0; 0; -1) |
| 3 | $\overline{BD}$ | В | (-1; 1; 0) |
| 4 | $\overline{OA}$ | Г | (1; 0; -1) |
|   |                 | Д | (1; 0; 1)  |



	А	Б	В	Г	Д
1					
2					
3					
4					

35. Якщо кожне ребро куба збільшити на 1 м, то його об'єм збільшиться в 125 разів. Знайдіть ребро куба (у м).

Відповідь: \_\_\_\_\_

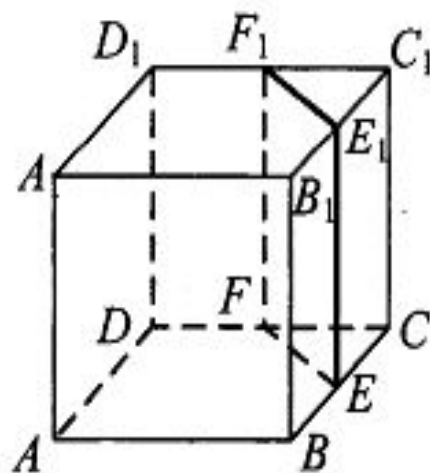
Объем прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, равен  $16 \text{ см}^3$ . У второго прямоугольного параллелепипеда, в основании которого тоже лежит квадрат, высота в четыре раза меньше, а ребро основания в два раза больше, чем у первого. Найдите объем второго прямоугольного параллелепипеда (в кубических сантиметрах).

В единичном кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  найдите расстояние от точки  $D$  до плоскости  $CAD_1$ .

В правильной треугольной призме  $ABCA_1 B_1 C_1$  сторона основания равна  $\sqrt{3}$ , боковое ребро равно  $2\sqrt{3}$ . Найдите объем пирамиды  $MABC$ , если точка  $M$  — середина ребра  $AA_1$ .

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$ , стороны основания которой равны 2, а боковые ребра 3, найдите расстояние между прямыми  $AA_1$  и  $BC_1$ .

В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  точки  $E, F, E_1$  и  $F_1$  являются серединами рёбер  $BC, DC, B_1 C_1$  и  $D_1 C_1$  соответственно. Объём призмы, отсекаемой от куба плоскостью  $EFF_1$ , равен 21. Найдите объём куба.





- 36.** В основі прямої призми з висотою 4 см лежить квадрат зі стороною 3 см. У призмі через вершину основи перпендикулярно до діагоналі бічної грані побудовано переріз. Знайдіть об'єм меншої з утворених призм, у  $\text{см}^3$ .

**Розв'язання.**

Нехай  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  — дана призма (див. рисунок).

Перерізом призми є прямокутник  $ADKN$ , оскільки площина  $\alpha$ , що перетинає дві паралельні площини, утворює паралельні прямі  $AN \parallel DK$  і  $AD \parallel NK$ .  $AD \perp DC$  і  $AD \perp DD_1$ , отже,  $AD \perp DK$ , тому переріз утворює дві призми: одну — з основою  $DCK$  і висотою  $AD$ , другу — з основою  $DD_1 C_1 K$  (яка є трапецією) і висотою  $AD$ .

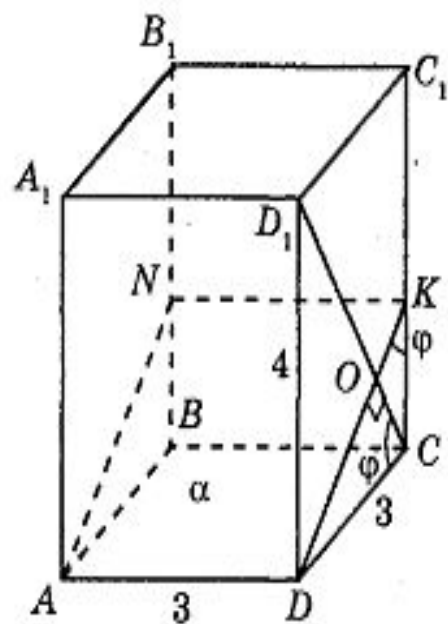
Знайдемо площі трикутника  $DCK$  і трапеції  $DD_1 C_1 K$  й зрівняємо їх.

$$\triangle DD_1 C: \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{4}{3}; \quad \angle D_1 CD = \angle DKC = \varphi, \quad KC = \frac{3}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}.$$

$$S_{\triangle DCK} = 3 \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{27}{8}.$$

$$S_{DD_1 C_1 K} = S_{DD_1 C_1 C} - S_{\triangle DCK} = 12 - \frac{27}{8} = \frac{69}{8} > \frac{27}{8}.$$

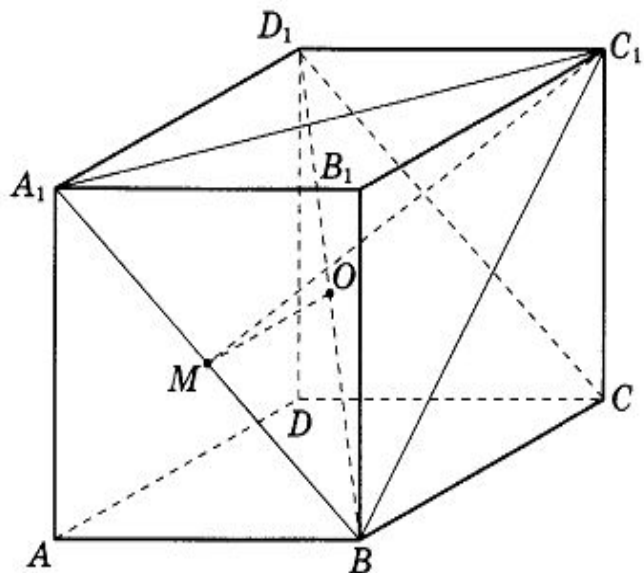
$$V_{ANBCK} = S_{\triangle DCK} \cdot AD = \frac{27}{8} \cdot 3 = \frac{81}{8} = 10,125 (\text{см}^3). \text{ Відповідь: } 10,125.$$



Дан куб  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ .

а) Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки  $B$ ,  $A_1$ , и  $D_1$ .

б) Найдите угол между плоскостями  $BA_1C_1$  и  $BA_1D_1$ .



Решение.

а) Так как  $BC$  параллельно  $A_1D_1$ , то точка  $C$  лежит в плоскости  $BA_1D_1$ . Прямоугольник  $BCD_1A_1$  — искомое сечение.

б) Пусть точка  $O$  — центр куба, а  $M$  — середина  $A_1B$ .

$A_1D_1 \perp A_1B$ , а  $MO$  — средняя линия треугольника  $BA_1D_1$ , поэтому  $MO \perp A_1B$ . Треугольник  $BA_1C_1$  равносторонний,  $C_1M \perp A_1B$ , следовательно, искомый угол равен углу  $OMC_1$ .

Найдём стороны треугольника  $OMC_1$ . Из треугольника  $BA_1D_1$  находим  $OM = \frac{1}{2}$ ;

из треугольника  $BA_1C_1$  находим  $MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .  $OC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , поскольку  $O$  — середина диагонали  $AC_1$ .

Теперь применим к треугольнику  $OMC_1$  теорему косинусов:

$$\cos \angle OMC_1 = \frac{OM^2 + C_1M^2 - OC_1^2}{2 \cdot OM \cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{2} - \frac{3}{4}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$



В правильной четырёхугольной призме  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре  $AA_1$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE:EA_1=1:2$ .

- Постройте прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $BED_1$ .
- Найдите угол между плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

### Решение.

а) Прямая  $D_1E$  пересекает прямую  $AD$  в точке  $K$ . Плоскости  $ABC$  и  $BED_1$  пересекаются по прямой  $KB$ .

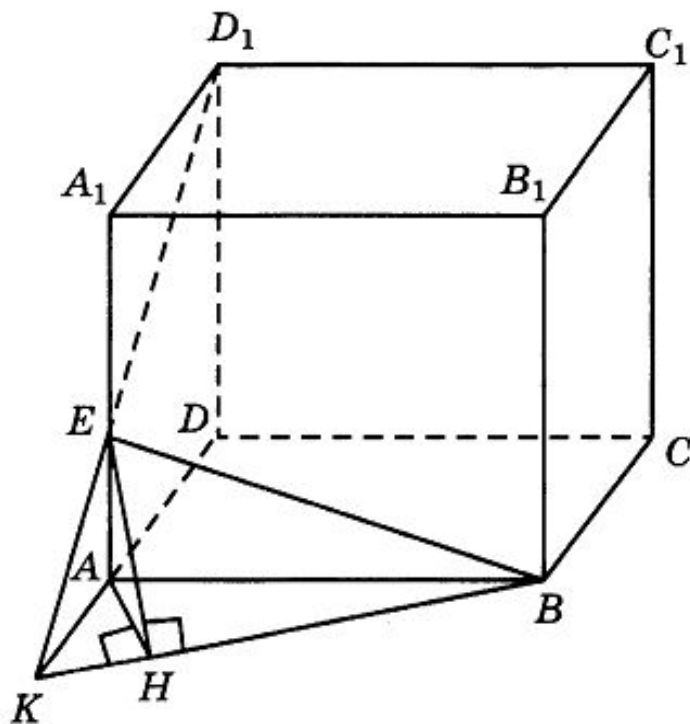
б) Из точки  $E$  опустим перпендикуляр  $EH$  на прямую  $KB$ , тогда отрезок  $AH$  (проекция  $EH$ ) перпендикулярен прямой  $KB$ . Угол  $AHE$  является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями  $ABC$  и  $BED_1$ .

Поскольку  $AE:EA_1=1:2$ , получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; \quad EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников  $A_1D_1E$  и  $AKE$  находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$



В прямоугольном треугольнике  $AKB$  с прямым углом  $A$ :  $AB=2$ ;  $AK=1$ ;  
 $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$ , откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Из прямоугольного треугольника  $AHE$  с прямым углом  $A$  получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

$$\left( \sin \angle AHE = \frac{\sqrt{5}}{3}; \cos \angle AHE = \frac{2}{3} \right)$$

Ответ:  $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$ .