Кафедра математики и моделирования
Старшие преподаватели Е.Д. Емцева и Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 12.

Тема: Решение задач с использованием теорем сложений и умножения вероятностей.

Цель: Научиться использовать теоремы сложения и умножения при решении задач.

Теоремы сложения и умножения для двух событий

- 1) P(A + B) = P(A) + P(B) (A,B - несовместны)
- 2) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B)$
- 3) P(AB) = P(A)· P(B), (A,B- независимы)
- 4) P(AB) = P(A)· P(B | A)

История о находчивом майоре

- В городе объявлен розыск четверых особо опасных преступников, ограбивших банк. Чтобы предотвратить утечку информации при передаче в Центр сообщений о ходе розыска, майор Зимин придумал такой способ. Он зашифровал первыми буквами алфавита следующие события:
- Событие Р- обнаружен преступник Рыков;
- Событие У - обнаружен преступник Угрюмов;
- Событие Ф - обнаружен преступник Фомкин;
- Событие Т - обнаружен преступник Тимошкин. $\overline{P}$
- Вскоре в центр пришли следующие сообщения:
- 1) У+Ф, 2)УТ, 3) $\overline{\Phi}\ \overline{P}$,4) $\overline{\Phi P}$ 5)УТ(Ф+Р), 6)УТФ ,7) УТФР

История о находчивом майоре

- Зашифруйте следующие донесения
- а) взят только один из четырех,

$$P\overline{T}\overline{У}\overline{Ф}+\overline{P}T\overline{У}\overline{Ф}+\overline{P}\overline{T}У\overline{Ф}+\overline{P}\overline{T}\overline{У}Ф$$

- б) взят по крайней мере один,

$$\overline{PTУФ}=P+T+У+Ф$$

- в) взяли не менее двух,

$$PT+PУ+PФ+TУ+TФ+УФ$$

- г) взяли только двоих,

$$PT\overline{У}\overline{Ф}+P\overline{T}У\overline{Ф}+P\overline{T}\overline{У}Ф+\overline{P}TУ\overline{Ф}+\overline{P}T\overline{У}Ф+\overline{P}\overline{T}УФ$$

- д) взяли только троих,

$$PTУ\overline{Ф}+PT\overline{У}Ф+P\overline{T}УФ+\overline{P}TУФ$$

- е) ни один не обнаружен.

$$\overline{P}\overline{T}\overline{У}\overline{Ф}$$

История одной сессии

- В сессию студент должен был сдать два экзамена и один зачет. Событие А состоит в том, что студент сдал экзамен по английскому языку, событие В – он сдал экзамен по философии, С – получил зачет по математике. Р(А)=0,5; Р(В)=0,4; Р(С)=0,7.
- Найти вероятность того, что
- 1) студент не получил зачета;

$$1 - P(C) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

- 2) сдал два экзамена;

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}2$$

- 3) сдал по крайней мере один экзамен;

$$1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}7$$

- 4) получил зачет, но не сдал
- ни одного экзамена;

$$P(\bar{A}\bar{B}C) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}7 = 0{,}21$$

- 5) сдал только один экзамен
- и не получил зачета;

$$P((A\bar{B} + \bar{A}B)\bar{C}) = (0{,}5 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}4) \cdot 0{,}3 = 0{,}15$$

- 6) не сдал ничего;

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}09$$

- 7) сдал все

$$P(ABC) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}7 = 0{,}14$$

Задача

- **1.Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?**
- Решение:
- Авторское решение
- А – попадание первого стрелка,
- В – попадание второго стрелка,
- С – попадание хотя бы одного из стрелков.
- Тогда, очевидно С = А + В, причем события А и В совместны. Следовательно,
- р(С) = р(А) + р(В) – р(АВ).
- Так как события А и В независимы, то
- р(С) = р(А) + р(В) – р(А) р(В)= 0,8 + 0,6 – 0,8 · 0,6 = 0,92.
- Другое решение
- $p(C)=1-p(\bar{A}\bar{B})=1-0{,}2*0{,}4=1-0{,}08=0{,}92$

Задача

- **2. В команде из 12 спортсменов 5 мастеров спорта. По жеребьевке из команды выбирают 3 спортсменов. Какова вероятность того, что все выбранные спортсмены являются мастерами спорта?**

- Решение
- 1) $p(A) = \dfrac{C_5^3}{C_{12}^3} = \dfrac{1}{22}$
- 2) p(A) = p(A1) p(A2/A1)*
  *p(A3/A1A2) =

$$= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22}$$

Задача

- 3. Монета брошена три раза. Найдите вероятность того, что герб выпадет ровно два раза.
- Решение:
- A_i – выпадение герба при i-м бросании монеты (i = 1, 2, 3), A – выпадение 2 гербов при 3 бросаниях монеты.
- $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$
- $p(A) = p(A_1)\, p(A_2)\, p(\overline{A_3}) + p(A_1)\, p(\overline{A_2})\, p(A_3) +$
- $+\, p(\overline{A_1})\, p(A_2)\, p(A_3) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$

Задача

- **4** В урне n белых и n черных шаров. Все шары из урны извлекаются парами, причем вынутые шары обратно не возвращаются. Какова вероятность того, что все пары будут состоять из разноцветных шаров?
- **Решение:**
- Пусть A_k (k=1,2,...,n) обозначает, что k-я пара состоит из разноцветных шаров. Тогда вероятность события
- $A = A_1A_2 \ldots A_n$ равна
- $p(A) = p(A_1)\, p(A_2/A_1) \ldots p(A_n/A_1A_2 \ldots A_{n-1}) =$
- $= \dfrac{n^2}{C_{2n}^2} \cdot \dfrac{(n-1)^2}{C_{2n-2}^2} \cdot \dfrac{(n-2)^2}{C_{2n-4}^2} \cdot \ldots \cdot \dfrac{4}{C_4^2} \cdot \dfrac{1}{C_2^2} = \dfrac{2^n (n!)^2}{(2n)!}$

Вопросы:

- Какие события называют совместными (несовместными)?
- Какие события называют зависимыми (независимыми)?