Решение задач В11

Необходимое условие точки экстремума.

Теорема. В точке экстремума производная функции либо равна нулю, либо не существует.

Если функция имеет точки экстремума, то они могут находиться только среди критических точек функции.

Достаточные условия точек экстремума.

Теорема. Если функция f дифференцируема в точке x_o, причем вблизи этой точки слева от нее производная функции f положительна, а справа от x_o она отрицательна, то x_o – точка максимума функции f.

Теорема. Если функция f дифференцируема в точке x_o, причем вблизи этой точки слева от нее производная функции f отрицательна, а справа от x_o она положительна, то x_o – точка минимума функции f.

Найти точку минимума функции:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$1. D(y) = (-\infty; +\infty)$

$2. y' = (x^3 - 2x^2 + x - 2)' = 3x^2 - 4x + 1$

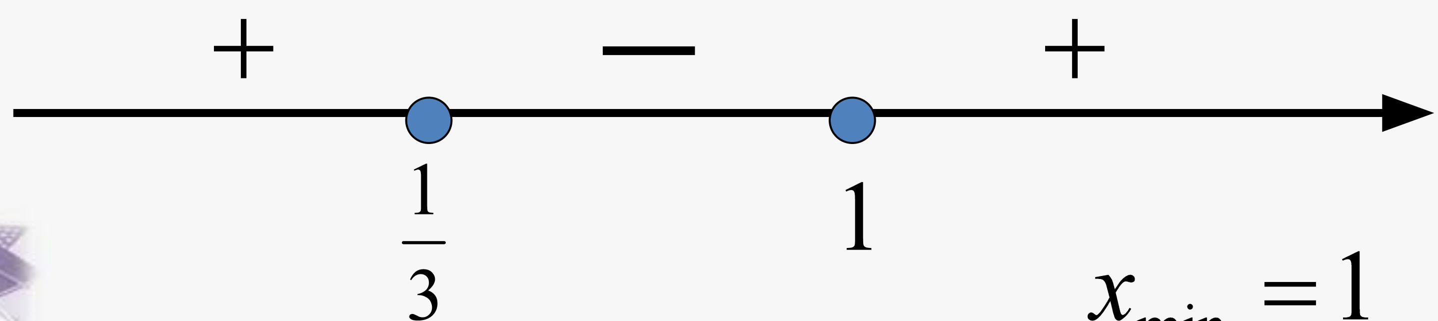
$3.$ *Критические точки* : $y' = 0 \quad 3x^2 - 4x + 1 = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right.$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

$$3x^2 - 4x + 1 = 3(x - 1)\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

4.



$$x_{\min} = 1$$

Алгоритм решения задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке::

1. Найти производную данной функции.
2. Найти критические точки функции.
3. Какие из критических точек принадлежат данному отрезку?
4. Найти значения функции на концах данного отрезка и в критических точках, которые входят в него.
5. Из полученных значений в пункте 4 выбрать наибольшее и наименьшее – наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Найти наименьшее значение функции:

$y = x^3 + x^2 - 8x - 8$ **на отрезке** $[-3; 0]$

$$1.\ y' = \left(x^3 + x^2 - 8x - 8\right)' = 3x^2 + 2x - 8$$

$$2.\ \textit{Критические точки}: y' = 0 \quad 3x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = \dfrac{4}{3} \end{array}\right. \qquad 3.\ -2 \in [-3;0]$$

$$4.\ \textit{Вычислим}: y(-3), y(-2), y(0)$$

$$y(-3) = (-3)^3 + (-3)^2 - 8\cdot(-3) - 8 = -27 + 9 + 24 - 8 = -2$$

$$y(-2) = -8 + 4 + 16 - 8 = 4$$

$$y(0) = -8 \qquad \textit{Ответ}: -8$$

Найти точку максимума функции:

$$y = 7 - 0{,}5x - \frac{2}{x^2}$$

$$1.D(y): x \neq 0$$

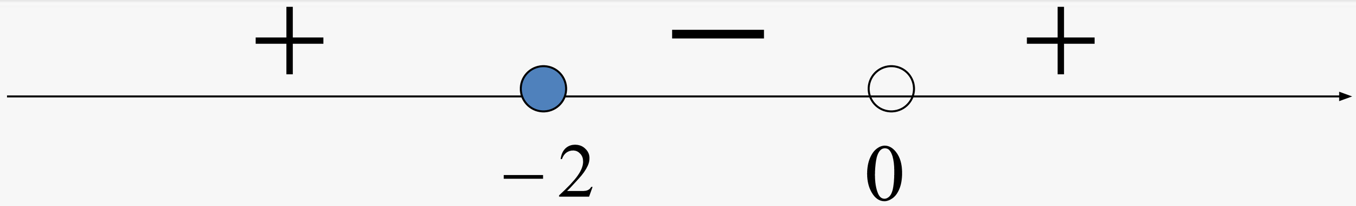
$$2.y' = \left(7 - 0{,}5x - \frac{2}{x^2}\right)' = -0{,}5 - 2\left(\frac{1}{x^2}\right)' =$$

$$= 0{,}5 - 2 \cdot \left(x^{-2}\right)' = 0{,}5 + 4x^{-3} = 0{,}5 + \frac{4}{x^3} = \frac{x^3 + 8}{2x^3}$$

$$3.\textit{Критические точки}: y' = 0$$

$$\frac{x^3 + 8}{2x^3} = 0 \quad x^3 + 8 = 0 \quad x^3 = -8 \quad x = -2$$

4.



$$x_{\max} = -2$$

Найдите наибольшее значение функции

$$y = \frac{x^2 - 8x + 64}{x}$$ ***на отрезке*** $[-16; -4]$

$$\frac{x^2 - 8x + 64}{x} = x - 8 + \frac{64}{x}$$

$$1.\ y' = \left(x - 8 + \frac{64}{x}\right)' = 1 + 64 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = 1 + 64\left(x^{-1}\right)' =$$

$$= 1 - 64x^{-2} = 1 - \frac{64}{x^2} = \frac{x^2 - 64}{x^2}$$

$2.$ *Критические точки* $: y' = 0$

$$\frac{x^2-64}{x^2}=0 \qquad x^2-64=0 \qquad \left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=-8 \end{array}\right.$$

$$3. -8 \in [-16; -4]$$

$4.$ *Вычислим значения* $: y(-16), y(-8), y(-4)$

$$\frac{x^2-8x+64}{x}=x-8+\frac{64}{x}$$

$$y(-16)=-16-8+\frac{64}{-16}=-28$$

$$y(-8)=\boxed{-24} \qquad y(-4)=-28$$

Найти точку минимума функции:

$$y = \frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6x + 1$$

$$1. D(y): x \geq 0$$

$$2. y' = \left(\frac{4}{3}x\sqrt{x} - 6x + 1\right)' = \frac{4}{3}\left(x\sqrt{x}\right)' - 6 =$$

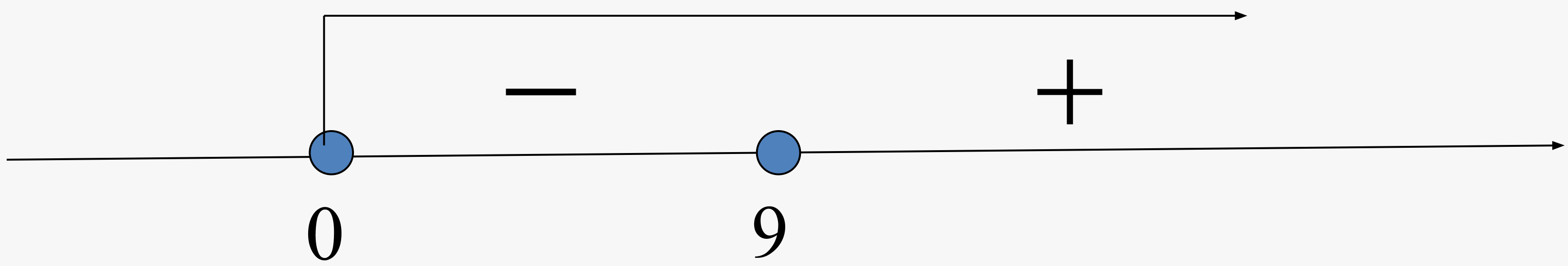
$$= \frac{4}{3}\left(x \cdot x^{\frac{1}{2}}\right)' - 6 = \frac{4}{3}\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 6 = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - 6 =$$

$$= 2\sqrt{x} - 6$$

$$3.\textit{Критические точки}: y' = 0$$

$$2\sqrt{x} - 6 = 0 \quad 2\sqrt{x} = 6 \quad \sqrt{x} = 3 \quad x = 9$$

4.



$$x_{\min} = 9$$

Найти наибольшее значение функции

$y=(7-x)\cdot\sqrt{x+5}$ ***на отрезке*** $[-4;4]$

$$(f\cdot g)'=f'\cdot g+f\cdot g'$$

$$1.\ y'=\left((7-x)\cdot\sqrt{x+5}\right)'=$$

$$=(7-x)'\cdot\sqrt{x+5}+(7-x)\cdot\left(\sqrt{x+5}\right)'=$$

$$=-1\cdot\sqrt{x+5}+(7-x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x+5}}=-\sqrt{x+5}+\frac{7-x}{2\sqrt{x+5}}=$$

$$=\frac{-2(x+5)+7-x}{2\sqrt{x+5}}=\frac{-3x-3}{2\sqrt{x+5}}$$

$$2.\textit{Критические точки}: y' = 0$$

$$\frac{-3x-3}{2\sqrt{x+5}} = 0 \qquad -3x-3=0 \qquad x=-1$$

$$3. -1 \in [-4; 4]$$

$$4.\textit{Вычислим значения}: y(-1), y(-4), y(4)$$

$$y(-1) = (7-(-1)) \cdot \sqrt{-1+5} = 8\sqrt{4} = \boxed{16}$$

$$y(-4) = 11$$

$$y(4) = 9$$

$$\textit{Ответ}: 16$$

Найти наибольшее значение функции

$$y = 2\sin x - \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{6}\pi + 7$$ ***на отрезке*** $$\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$