

Решение заданий В₈ ЕГЭ по математике

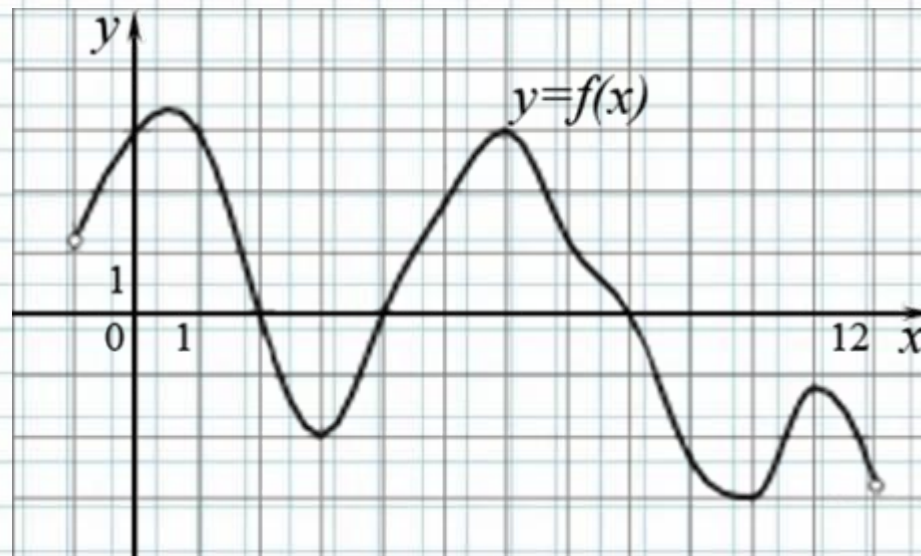
Артамонова Л.В.,
учитель математики
МКОУ «Москаленский лицей»

На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-1; 12)$. Определите количество целых точек, в которых производная функции отрицательна.

• Решение.

Производная функции отрицательна на тех интервалах, на которых функция убывает, т. е. на интервалах $(0,5; 3)$, $(6; 10)$ и $(11; 12)$. В них содержатся целые точки 1, 2, 7, 8 и 9. Всего 5 точек.

Ответ: 5.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-10; 4)$. Найдите промежутки убывания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

• **Решение.**

Промежутки убывания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции отрицательна, то есть интервалу $(-9; -6)$ длиной 3 и интервалу $(-2; 3)$ длиной 5. Длина наибольшего из них равна 5.

Ответ: 5.

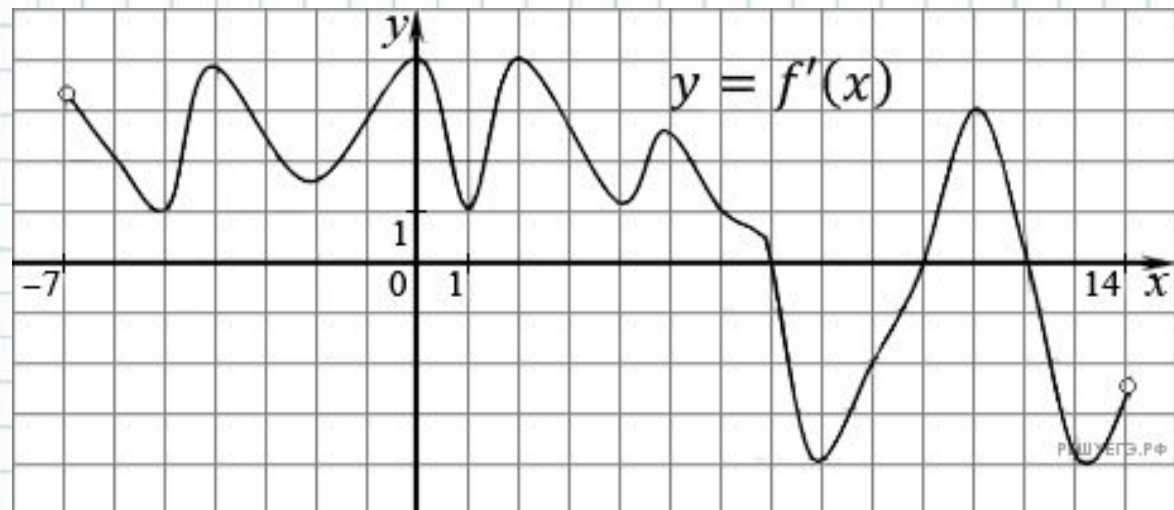


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 14)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$ на отрезке $[-6; 9]$.

• **Решение.**

Точки максимума соответствуют точкам смены знака производной с положительного на отрицательный. На отрезке $[-6; 9]$ функция имеет одну точку максимума $x = 7$.

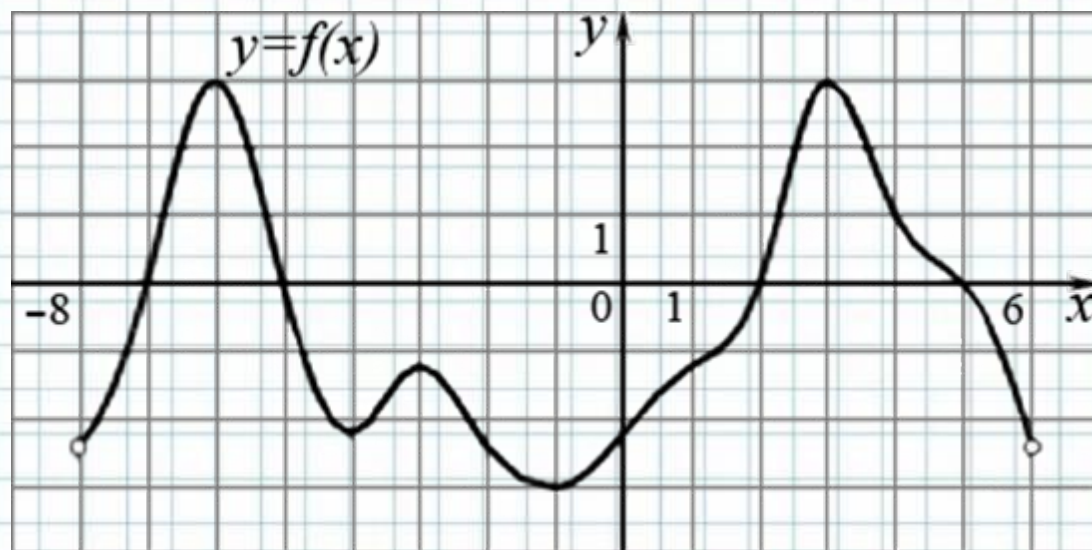
Ответ: 1.



На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-8; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите длину наибольшего из них.

• **Решение.**

Промежутки возрастания функции $f(x)$ соответствуют промежуткам, на которых производная функции положительна, то есть интервалам $(-7; -5)$, $(2; 5)$. Наибольший из них — интервал $(2; 5)$, длина которого 3.

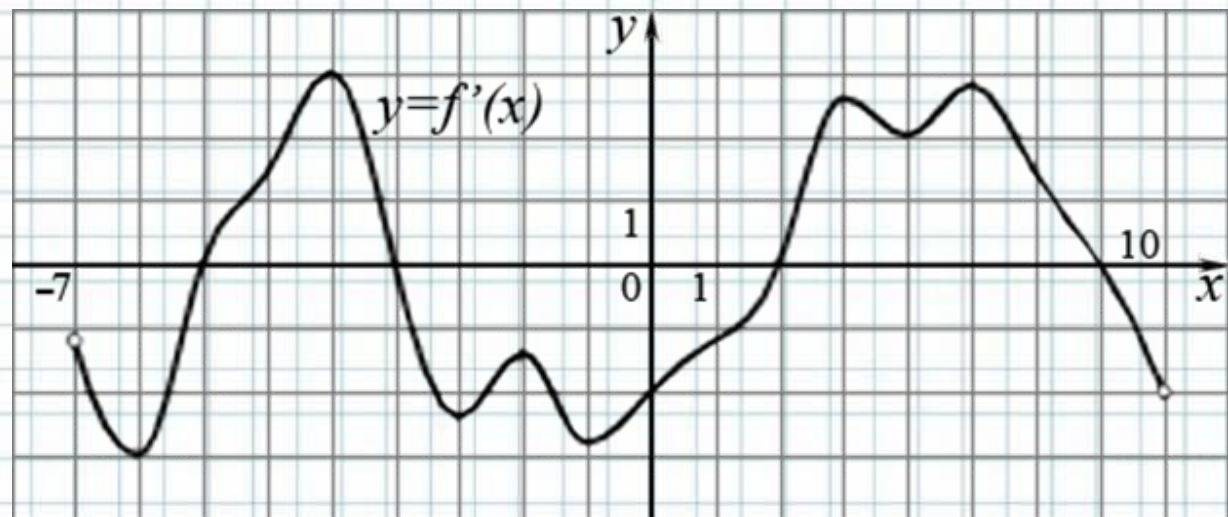


На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-7; 10)$. Найдите количество точек минимума функции $f(x)$ на отрезке $[-3; 8]$.

• **Решение.**

Точки минимума соответствуют точкам смены знака производной с минуса на плюс. На отрезке $[-3; 8]$ функция имеет одну точку минимума $x = 4$.

Ответ: 1.



Прямая $y = 5x + 5$ является касательной к графику функции $8x^2 + 29x + c$. Найдите c .

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 16x + 29 = 5, \\ 8x^2 + 29x + c = 5x + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1,5, \\ 8x^2 + 24x + c - 5 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = -1,5, \\ c = 23. \end{cases}$$

Таким образом, $c = 23$.

На рисунке изображен график производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-16; 4)$. Найдите количество точек экстремума функции $f(x)$ на отрезке $[-14; 2]$.

• **Решение.**

Точки экстремума соответствуют точкам смены знака производной — изображенным на графике нулям производной.

Производная обращается в нуль в точках $-13, -11, -9, -7$. На отрезке $[-14; 2]$ функция имеет 4 точки экстремума.

Ответ: 4.

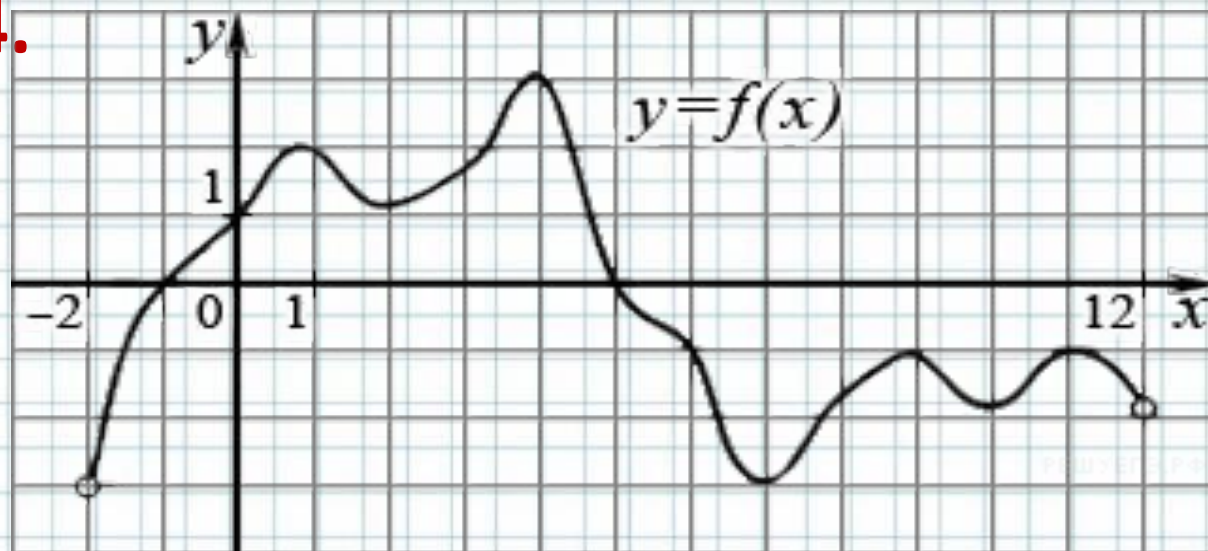


На рисунке изображен график функции $y=f(x)$, определенной на интервале $(-2; 12)$. Найдите сумму точек экстремума функции $f(x)$.

• **Решение.**

Заданная функция имеет максимумы в точках 1, 4, 9, 11 и минимумы в точках 2, 7, 10. Поэтому сумма точек экстремума равна $1 + 4 + 9 + 11 + 2 + 7 + 10 = 44$.

Ответ: 44.



Прямая $y = -9x + 5$ является касательной к графику функции $ax^2 + 15x + 11$. Найдите a .

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 15 = -9, \\ ax_0^2 + 15x_0 + 11 = -9x_0 + 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = -12, \\ -12x_0 + 24x_0 = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 24, \\ x_0 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Искомое значение a равно 24.

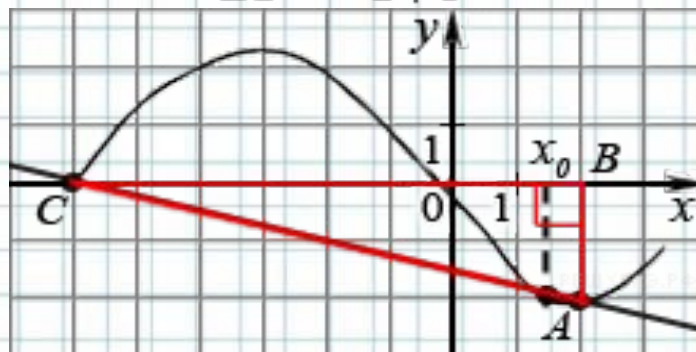
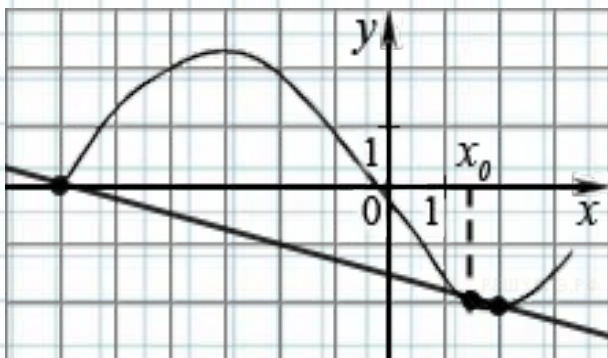
Ответ: 24.

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

• **Решение.**

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-6; 0)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом $\angle ACB$.

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{2+6} = -0,25$$

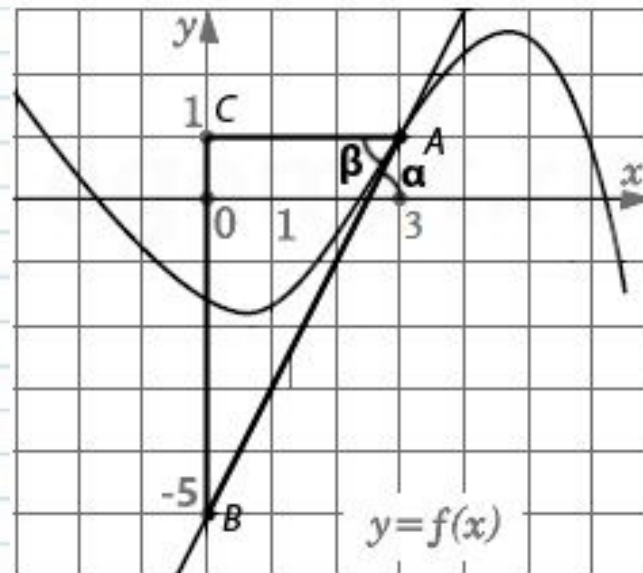
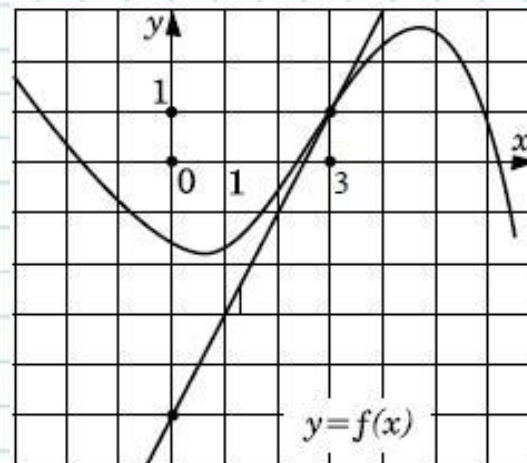


На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

Для решения используем геометрический смысл производной: значение производной функции в точке равняется угловому коэффициенту касательной к графику этой функции, проведенной в этой точке. Угловым коэффициентом касательной равен тангенсу угла между касательной и положительным направлением оси x ($\operatorname{tg} \alpha$). Угол $\alpha = \beta$, как накрест лежащие углы при параллельных прямых $y=0$, $y=1$ и секущей-касательной. Для треугольника ABC

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{BC}{AC} = \frac{6}{3} = 2.$$

$$f'(3) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta = 2$$



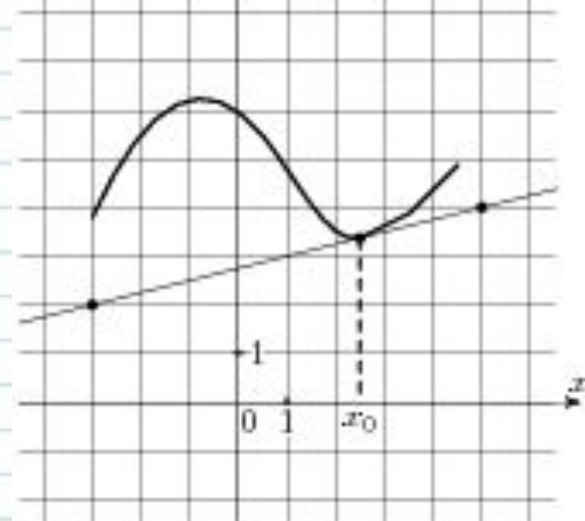
На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 .

Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

- По свойствам касательной, формула касательной к функции $f(x)$ в точке x_0 равна
- $y=f'(x_0) \cdot x+b, b=\text{const}$
- По рисунку видно, что касательная к функции $f(x)$ в точке x_0 проходит через точки $(-3;2), (5,4)$. Следовательно, можно решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2 = f'(x_0) \cdot -3 + b \\ 4 = f'(x_0) \cdot 5 + b \end{cases}$$

$$b = \frac{11}{4}, f'(x_0) = 0.25$$



ИСТОЧНИКИ

- <http://reshuege.ru/>
- <http://egemat.ru/prepare/B8.html>
- <http://bankege.ru/>