Решение заданий части С по алгебре

Задание С1 в КИМах ЕГЭ интересно тем, что решить его можно различными способами. Например, сделать выбор корней можно методом перебора, можно применить знания графиков тригонометрических функций, решить двойное неравенство или воспользоваться единичной окружностью. Рассмотрим уравнения представленные сразу всеми способами выбора корней.

а). Решите уравнение $2\cos 2x+4\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-1=0$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\pi\right]$

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$

$$2\cos 2x-4\cos x-1=0$$

$\sin^2 x=1-\cos^2 x$

$$2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-4\cos x-1=0$$

$$2\cos^2 x-2\sin^2 x-4\cos x-1=0$$

$$2\cos^2 x-2\left(1-\cos^2 x\right)-4\cos x-1=0$$

$$2\cos^2 x-2+2\cos^2 x-4\cos x-1=0$$

$$4\cos^2 x-4\cos x-3=0$$

$$4a^2-4a-3=0$$

$$D=4^2-4\cdot 4\cdot(-3)=64$$

$$a_{1,2}=\frac{4\pm 8}{2\cdot 4}$$

$$a_1=\frac{12}{8}\notin[-1;1]$$

$$a_2=-\frac{1}{2}$$

$$\cos x=-\frac{1}{2}$$

$$x=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$$

$$x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n;$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$$

Нам будет удобно записать решение в виде **двух множеств**.

Применим формулу приведения: Название «**синус**» изменится на «**косинус**», т.к.

VI чет.

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x$$

В VI чет. знак исходной функции синуса отрицательный

Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$\boxed{\frac{2\pi}{3} + 2\pi n}$$

n=-1

$$\boxed{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n}$$

n=-1

$[-3\pi; -\pi]$ $\le$ $\le$ $/ : \pi$

$$-3 \le \frac{2}{3} + 2n \le -1 \Big/ -\frac{2}{3}$$

$$-3\frac{2}{3} \le 2n \le -1\frac{2}{3}$$

$$-\frac{11}{3} \le 2n \le -\frac{5}{3} \Big/ : 2$$

$$-\frac{11}{6} \le n \le -\frac{5}{6}$$

$n = -1,$

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

$[-3\pi; -\pi]$ $\le$ $\le$ $/ : \pi$

$$-3 \le -\frac{2}{3} + 2n \le -1 \Big/ +\frac{2}{3}$$

$$-2\frac{1}{3} \le 2n \le -\frac{1}{3}$$

$$-\frac{7}{3} \le 2n \le -\frac{1}{3} \Big/ : 2$$

$$-\frac{7}{6} \le n \le -\frac{1}{6}$$

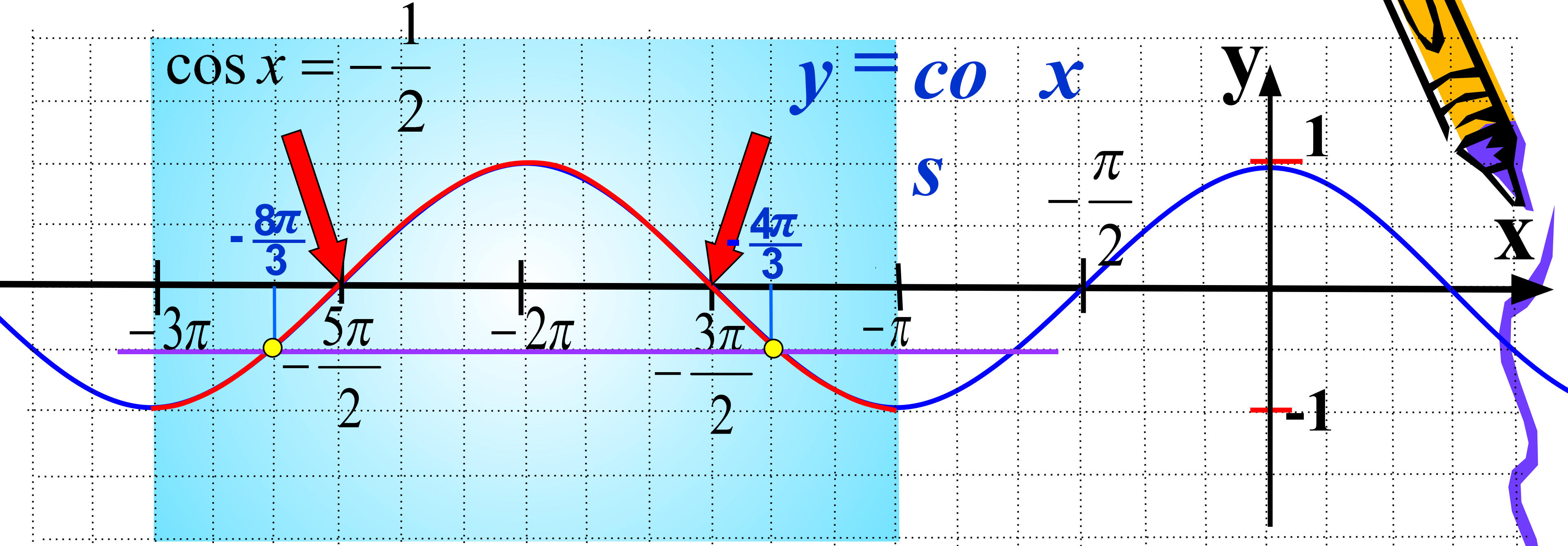
$n = -1,$

$$x = -\frac{2\pi}{3} - 2\pi,$$

$$x = -\frac{8\pi}{3}$$

Отбор корней с помощью графиков

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$



$$-\frac{5\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{15\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-\frac{16\pi}{6}=-\frac{8\pi}{3}.$$

$$-\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=-\frac{9\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=-\frac{8\pi}{6}=-\frac{4\pi}{3}.$$

Отбор корней с помощью числовой окружности.

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\pi\right]$

Выбрать корни по тригонометрическому кругу удобно, т.к. этот промежуток …

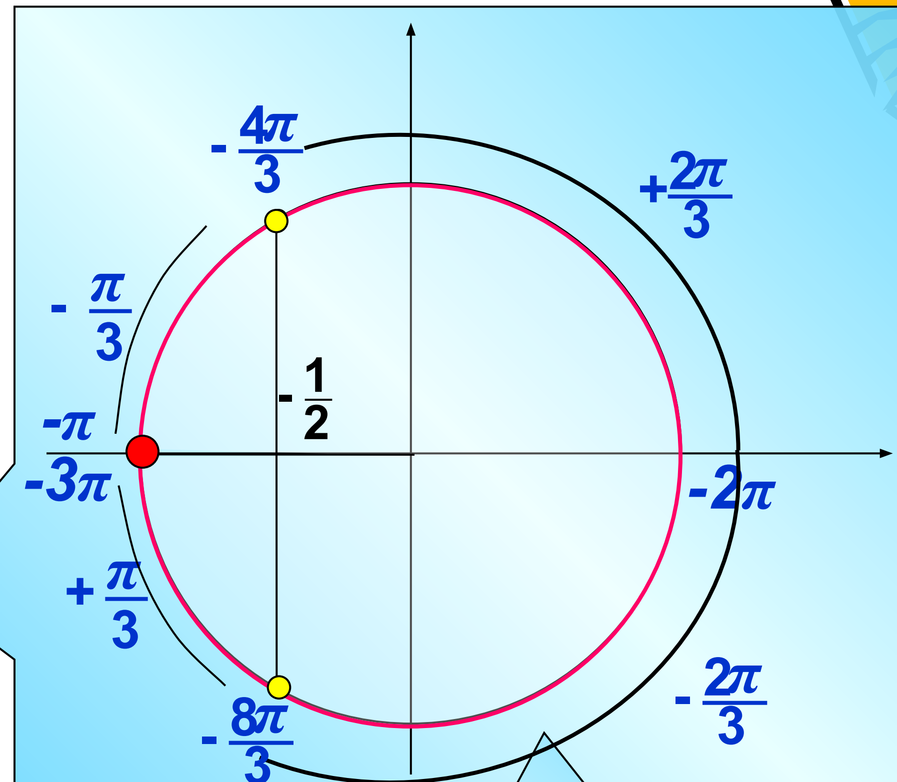
ровно один круг $\left[-3\pi; -\pi\right]$

Б). Ответ:

$$x = -\frac{4\pi}{3}$$

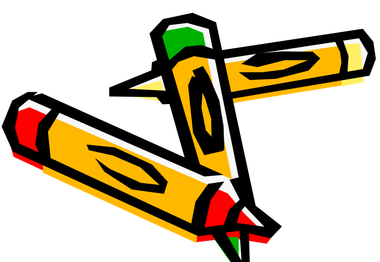
$$x = -\frac{8\pi}{3}$$

Эти корни можно было найти иначе. Посмотрим…



Если вы хорошо понимаете тригонометрический круг, то этот способ можно с успехом применить

- Эксперты оценивают выполнение задания по следующим критериям.
  - Обоснованно получены ответы в обоих пунктах - 2 балла, это максимальный балл.
  - Обоснованно получен ответ в пункте **а** или в пункте **б** - 1 балл.
  - Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше - 0 баллов.



а). Решите уравнение

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$2\cos x + 1 = \sin 2x + \sin x$$

$$2\cos x + 1 = 2\sin x\cos x + \sin x$$

$$2\cos x + 1 = \sin x(2\cos x + 1)$$

$$1\cdot(2\cos x + 1) - \sin x(2\cos x + 1) = 0$$

$$(1 - \sin x)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{2} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin x = 1 \qquad \cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \qquad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi n$$

$$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;$$

Нам будет удобно записать решение в виде **двух множеств**.

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n \qquad x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

Отбор корней с помощью решения неравенств

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

n=0

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$$-\pi \le \qquad\qquad \le \frac{3\pi}{2} \quad \Big/ :\pi$$

$$-1\le \frac{1}{2}+2n\le \frac{3}{2} \quad \Big/ -\frac{1}{2}$$

$$-\frac{3}{2}\le 2n\le 1 \quad \Big/ :2$$

$$-\frac{3}{4}\le n\le \frac{1}{2}$$

$$n=0, \qquad x=\frac{\pi}{2}$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

n=1

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$-\pi \le \qquad\qquad \le \frac{3\pi}{2} \quad \Big/ : \pi$$

$$-1 \le -\frac{2}{3} + 2n \le \frac{3}{2} \quad \Big/ + \frac{2}{3}$$

$$-\frac{1}{3} \le 2n \le \frac{13}{6} \quad \Big/ : 2$$

$$-\frac{1}{6} \le n \le \frac{13}{12}$$

$$n = 0,\ \ x = -\frac{2\pi}{3}$$

$$n = 1,\ \ x = \frac{4\pi}{3}$$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

n=0

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$$

$$-\pi \le \qquad \le \frac{3\pi}{2} \quad \Big/ : \pi$$

$$-1 \le \frac{2}{3} + 2n \le \frac{3}{2} \quad \Big/ -\frac{2}{3}$$

$$-\frac{5}{3} \le 2n \le \frac{5}{6} \quad \Big/ : 2$$

$$-\frac{5}{6} \le n \le \frac{5}{12}$$

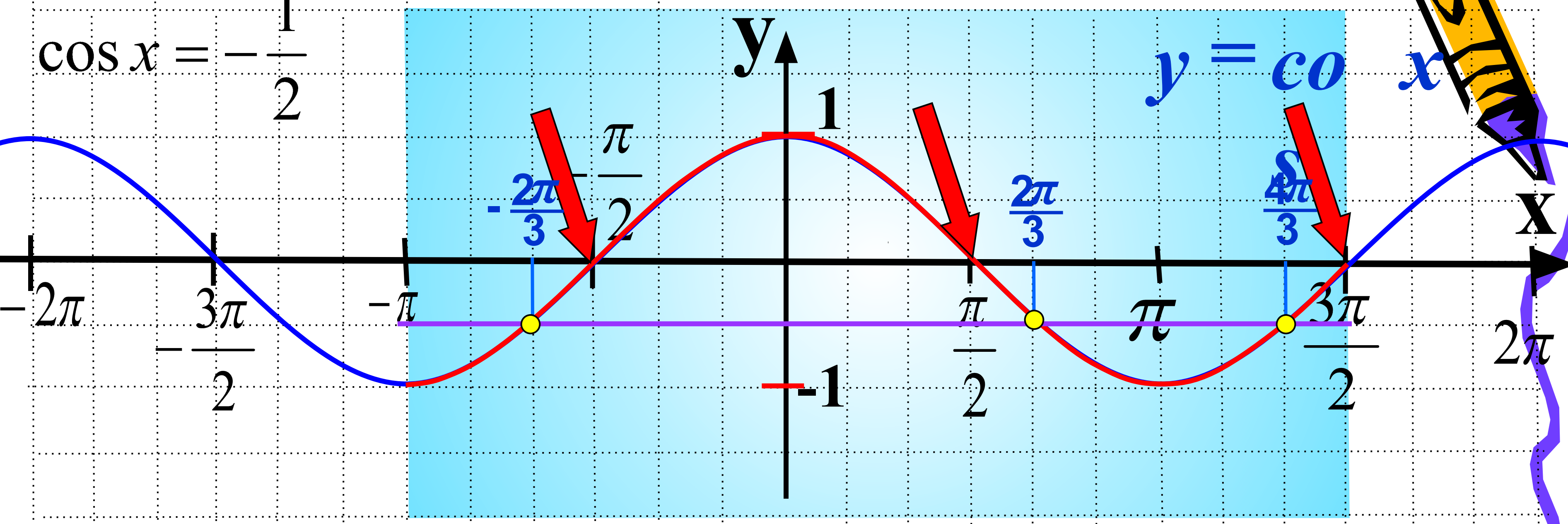
$$n = 0, \qquad x = \frac{2\pi}{3}$$

б). $\frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}.$

Отбор корней с помощью графиков

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$



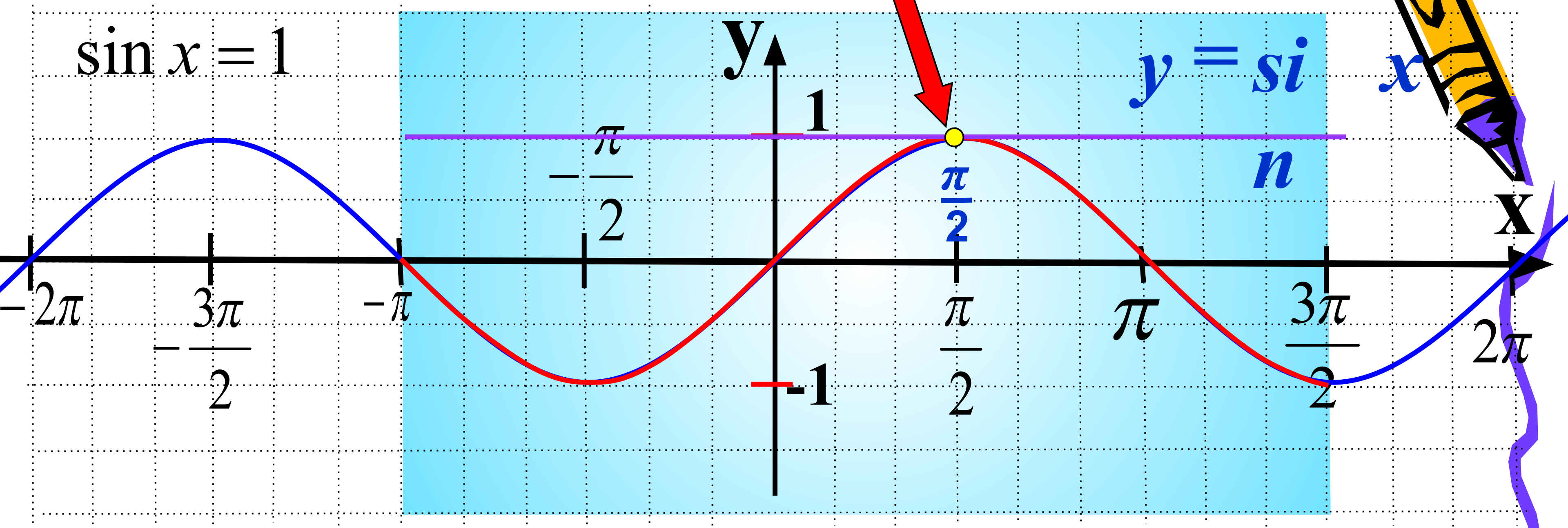
$$-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=-\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=-\frac{4\pi}{6}=-\frac{2\pi}{3}.$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{3\pi}{6}+\frac{\pi}{6}=\frac{4\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}.$$

$$\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{9\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{8\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}.$$

Отбор корней с помощью графиков

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$



$$б).\ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}.$$

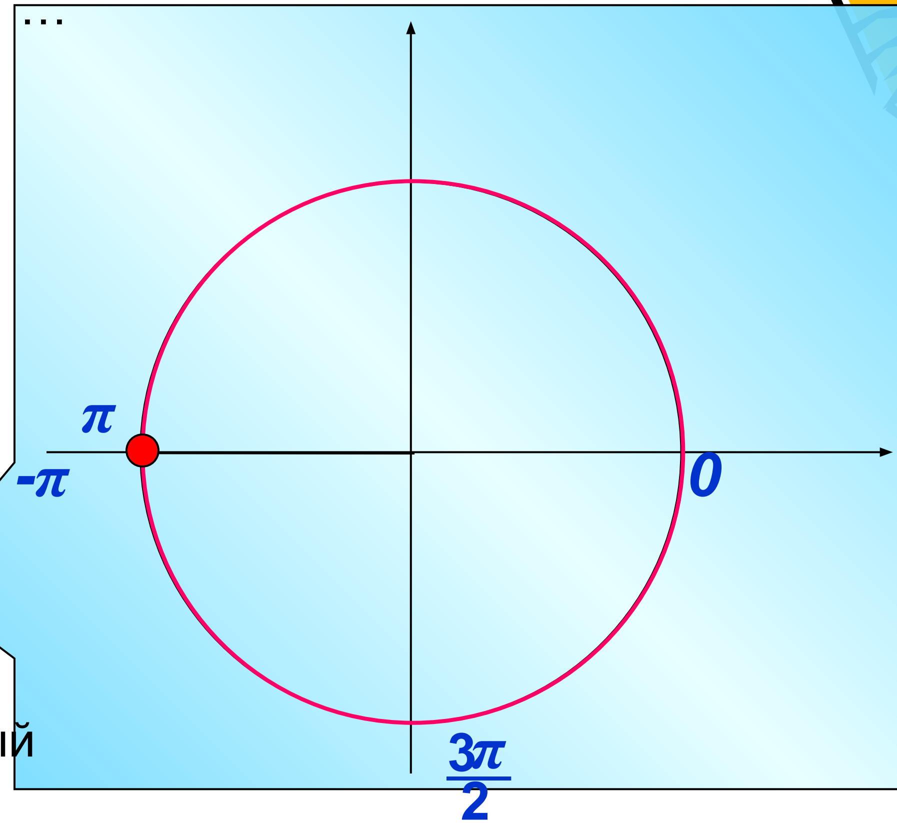
Отбор корней с помощью числовой окружности.

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Выбирать корни по тригонометрическому кругу не удобно, т.к. этот промежуток …

более одного круга $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Если вы хорошо понимаете тригонометрический круг, то этот способ тоже можно с успехом применить



Но попробуем сделать выбор корней с помощью круга.

Рассмотрим отдельно первый полный круг $[-\pi; \pi]$, выберем корни.

Затем, рассмотрим четверть круга $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

б). Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

Рассмотрим отдельно первый полный круг $[-\pi;\ \pi]$ выберем корни.

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2}$

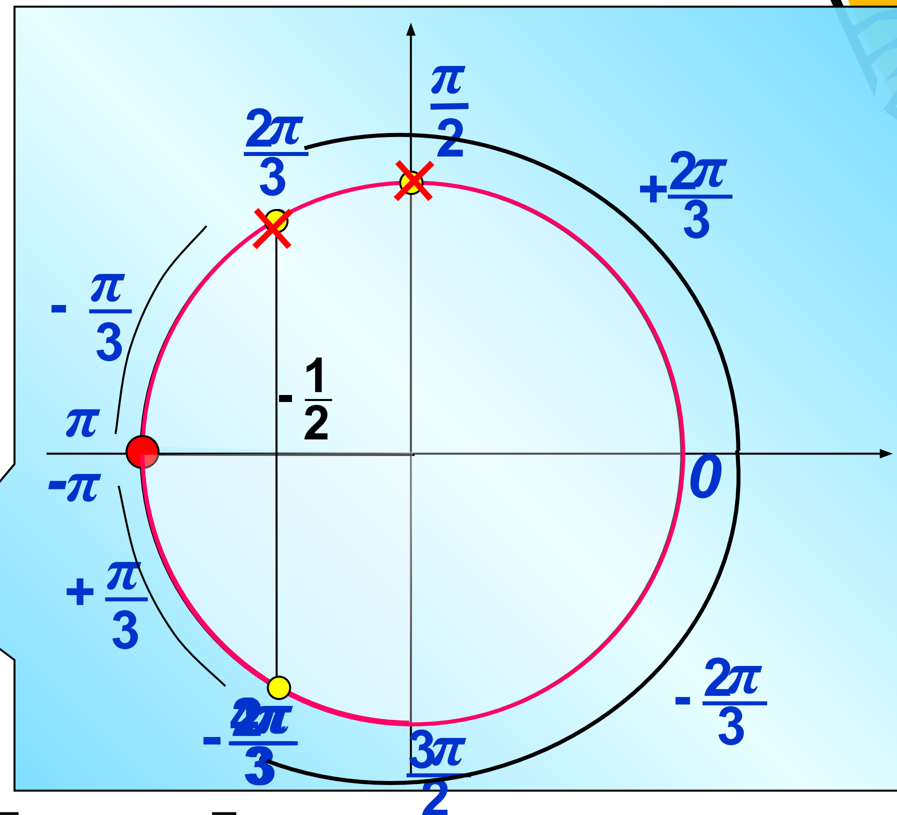
$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x = \frac{2\pi}{3};$

$x = -\frac{2\pi}{3};$

$x = \frac{4\pi}{3}$

Эти корни можно было найти иначе. Посмотрим…



Теперь, рассмотрим четверть круга $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

$б).\ \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}; -\frac{2\pi}{3}.$

Третье задание части С
из экзамена ЕГЭ
по математике посвящена
решению системы неравенств.

Для приведения исходного логарифмического уравнения или неравенства к нужному виду могут пригодиться следующие *формулы действий с логарифмами* (здесь и ниже $a, b, x, y > 0$ и $a, b \neq 1$):

$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1;$

$a^{\log_a x} = x$ — *основное логарифмическое тождество*;

$\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$ — *логарифм произведения*;

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$ — *логарифм частного*;

$p \log_a x = \log_a (x^p)$ — *логарифм степени*;

$\frac{p}{q} \log_a x = \log_{(a^q)} (x^p) \quad (q \neq 0);$

$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ — *формула перехода к новому основанию*;

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}.$

Пример1: (1 способ)

$$\log_{0,5x}(0,25x^2-1,25x+1,5)\le 1$$

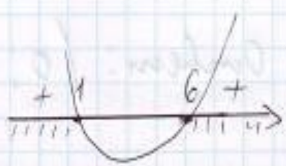
$$\left[\begin{array}{l} 1)\begin{cases} 0<0,5x<1, \\ 0,25x^2-1,25x+1,5\ge 0,5x, \end{cases} \\ 2)\begin{cases} 0,5x>1, \\ 0,25x^2-1,25x+1,5\le 0,5x, \\ 0,25x^2-1,25x+1,5>0; \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} 0<0,5x<1, \\ 0,25x^2-1,25x+1,5\ge 0,5x, \end{cases}$

$\begin{cases} 0<x<2, \\ 0,25x^2-1,75x+1,5\ge 0 \quad |:0,25 \end{cases}$

$\begin{cases} 0<x<2, \\ x^2-7x+6\ge 0, \end{cases}$

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=6, \\ x_1+x_2=7, \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x_1=1 \\ x_2=6. \end{array}\right.$



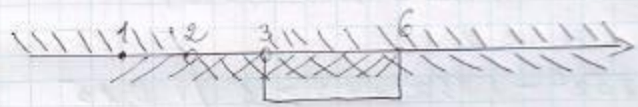
$\begin{cases} 0<x<2 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 6 \end{array}\right. \end{cases}$

$(0;\ 1]$

2) $\begin{cases} 0,5x>1, \\ 0,25x^2-1,25x+1,5\le 0,5x, \\ 0,25x^2-1,25x+1,5>0 \quad |:0,25 \end{cases}$

$\begin{cases} x>2 \\ x^2-7x+6\le 0 \\ x^2-5x+6>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1\cdot x_2=6 \\ x_1+x_2=5 \end{cases}$ $\left[\begin{array}{l} x_1=2 \\ x_2=3 \end{array}\right.$



$[3;\ 6]$

Ответ: $(0;\ 1]\cup(3;\ 6]$

$$\log_{0,5x}(0,25x^2+1,25x+1,5)\le 1$$

(2 способ)

Решение.

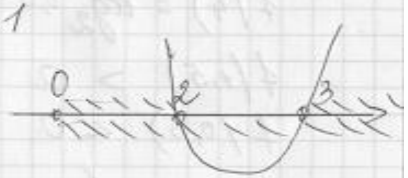
$\log_{0,5x}(0,25x^2+1,25x+1,5)\le 1$

$\log_{0,5x}(0,25x^2+1,25x+1,5)-1\le 0$

Функция $f(x)=\log_{0,5x}(0,25x^2+1,25x+1,5)-1$ определена при:

$$D(f):\ \begin{cases}0,5x>0\\ 0,25x^2-1,25x+1,5>0\\ 0,5x\ne 1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x>0\\ \left[\begin{array}{l}x<2\\ x>3\end{array}\right.\\ x\ne 2\end{cases}$$



$D(f)=(0;\,2)\cup(3;+\infty)$

Найдём нули функции:

$\log_{0,5x}(0,25x^2-1,25x+1,5)-1=0$

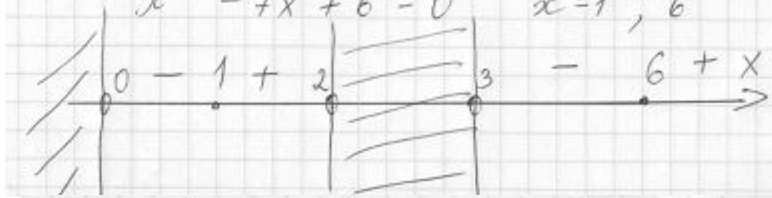
$\log_{0,5x}(0,25x^2-1,25x+1,5)=1$

$\log_{0,5x}(0,25x^2-1,25x+1,5)=\log_{0,5x}0,5x$

$0,25x^2-1,25x+1,5=0,5x$

$0,25x^2-1,75x+1,5=0$

$x^2-7x+6=0 \qquad x=1;\ 6$



$f(8)=\log_4 7,5-1>0$

$f(4)=\log_2 0,5-1<0$

$f(1,5)>0$

$f(0,5)<0$

Ответ: $(0;\,1]\cup(3;\,6]$

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geq 1$$

Решение.

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geq 1 \qquad \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}-1\geq 0 \qquad \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x}{x}\geq 0$$

Рассмотрим функцию

$$y=\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x}{x}$$

$$D(f): \begin{cases} 3\cdot 2^{x-1}-1>0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

$3\cdot 2^{x-1}-1>0$

$3\cdot 2^{x-1}>1$

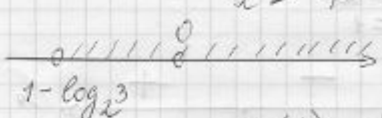
$2^{x-1}>\frac{1}{3}$

$2^{x-1}>2^{\log_2\frac{1}{3}}$, т. к. $y=2^t$ возрастает, то $x-1>\log_2\frac{1}{3}$

$x>\log_2\frac{1}{3}+1$

$x>\log_2 1-\log_2 3+1$

$x>1-\log_2 3$



$D(f)=(1-\log_2 3;0)\cup(0;+\infty)$

Найдём нули функции:

$y=0$

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x}{x}=0$$

$x\neq 0$ $\quad \log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x=0$

$\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)=\log_2 2^x$

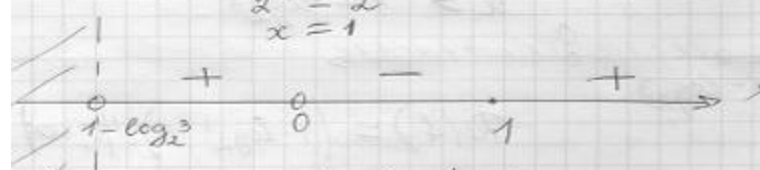
$3\cdot 2^{x-1}-1=2^x$

$\frac{3}{2}\cdot 2^x-1=2^x$

$\frac{1}{2}\cdot 2^x=1$

$2^x=2$

$x=1$



$y(0,5)=\frac{\log_2(3\cdot 2^{\frac{1}{2}}-1)-0,5}{0,5}<0$

$y(2)>0$

$y(1-\log_2 2,5)>0$

Ответ: $(1-\log_2 3;0)\cup[1;+\infty)$

Основные ошибки при решении неравенств (С3)

- Ошибки в применении свойств логарифма.
- Плохое знание свойств логарифмической функции, показательной.
- Неумение применять замену переменной.
- Неумение применять метод интервалов при решении неравенств повышенного и высокого уровней сложности.
- Неумение применять метод равносильных преобразований, при решении неравенств повышенного и высокого уровней сложности.
- Некорректное использование систем и совокупностей.
- Незнание рациональных методов решения неравенств повышенного и высокого уровня сложности.

Алгоритм решения задач с параметром графическим методом

1. Преобразовываем исходное условие задачи к системе неравенств, в которых неизвестное выражается через параметр, или, наоборот, параметр выражается через неизвестное.
2. Вводим систему координат (*a;x*), если мы неизвестное выражали через параметр, или (*x;a*) , если, наоборот, параметр выражали через неизвестное.
3. Изображаем в выбранной координатной плоскости фигуру, которая задается множеством решений системы неравенств.
4. «Сканируем» эту фигуру, двигаясь вдоль оси параметра и определяем, при каких значениях параметра выполняются заданные в задаче условия.
5. Записываем ответ.

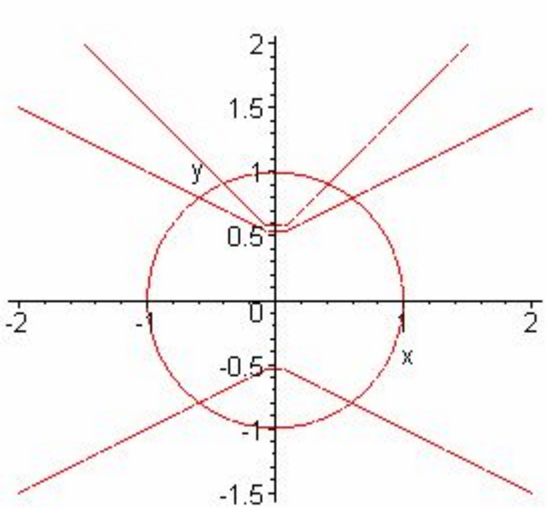
Найдите все значения p, при каждом из которых для любого q система имеет решения.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ y = q|x| + p \end{cases}$$

Решение.

График функции, заданной первым уравнением – окружность радиуса 1 с

центром в начале координат. График функции, заданной вторым



кружность при любом q, т.е. при любом угле

Нетрудно видеть, что это условие для любого угла наклона выполняется при сдвиге вершины ломаной по оси y не более чем на единицу вниз или вверх .

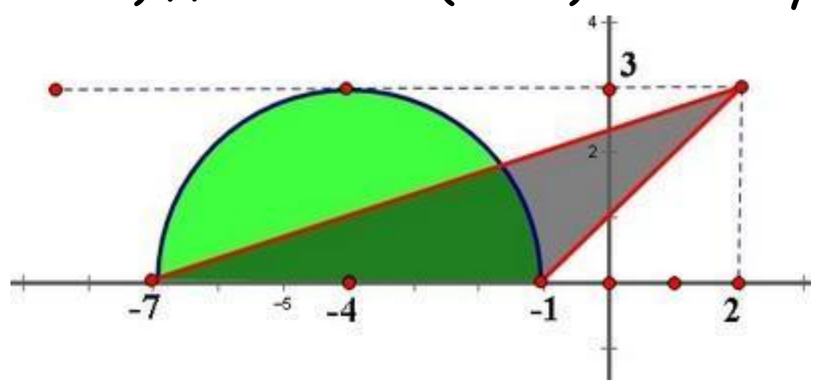
Ответ: $-1 \le p \le 1.$

- **Найти все значения параметра `a` , при каждом из которых уравнение** `ax + sqrt( -7 -8x -x^2) = 2a +3` **имеет единственное решение**

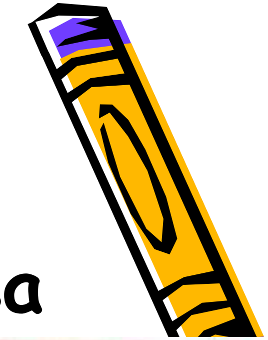
  `ax + sqrt(-7-8x-x^2) =2a+3` перепишем как `sqrt(-7 - 8*x - x^2) = a*(-x + 2) + 3` ...
  `y = sqrt(-7 - 8*x - x^2) ` - уравнение верхней половины окружности с центром `(-4; 0)` и радиуса `3` ...
  `y = a*(-x + 2) + 3` - прямая, проходящая через точку `(2; 3)` ... и угловым коэффициентом `k = -a` ...
  Графики имеют одну общую точку в следующих случаях

  1) касание с окружностью в точке `(-4; 3)` ... при этом `a = 0` ...
  2) угловые коэффициенты прямых, проходящих через точки на оси икс от точки `(-7; 0)` (не включая этот случай, поскольку получаем 2 точки пересечения) до точки `(-1; 0)` ... Получаем `k (3/9; 1]` ...

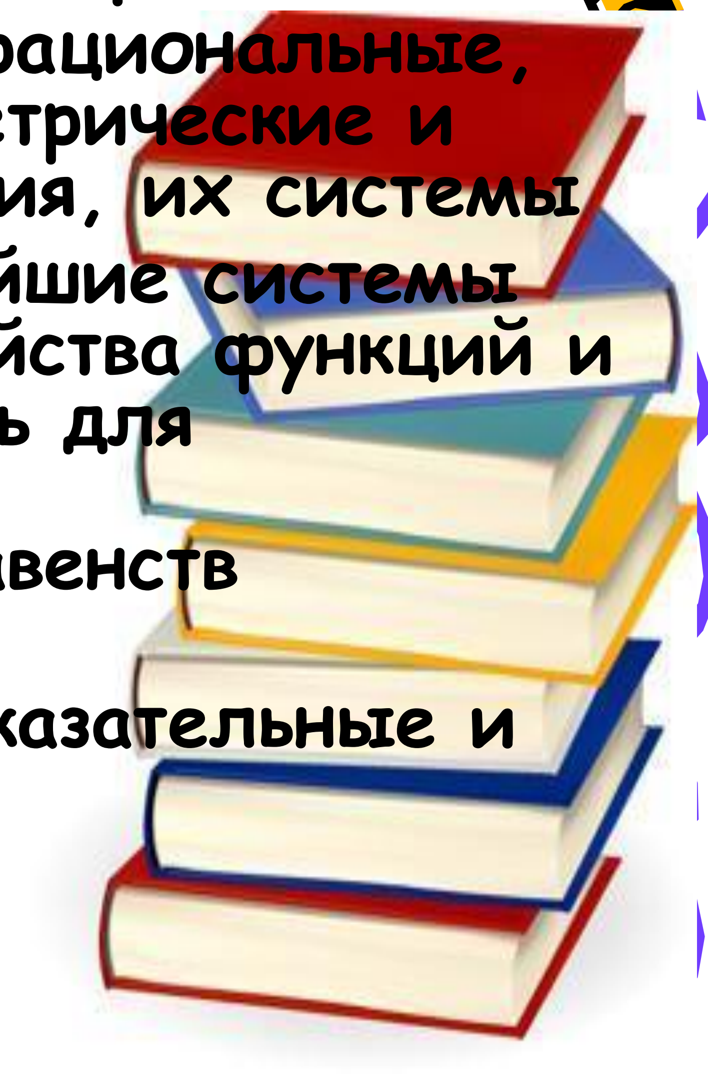
  Ответ: ` [-1; -1/3) {0}`



Для успешного решения задач типа С5 необходимо:

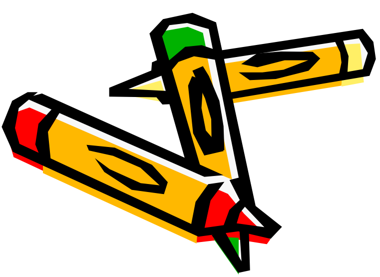


- Уметь решать уравнения и неравенства
- Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы
- Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод
- Решать рациональные, показательные и логарифмические неравенства, их системы



Источники:

1. http://alexlarin.narod.ru
2. http://www.akipkro.ru/
3. http://4ege.ru/matematika/
4. http://www.ctege.info/content/
5. http://seklib.ru/
6. http://mathege.info/category/zadaniya-ege/c5-zadanie-ege/
7. http://shpargalkaege.ru/egepomatematike.shtml
8. http://4ege.ru/matematika/4132-realnye-varianty-ege-po-matematike-2009-2013-godov.html
9. Решу ЕГЭ
10. http:// alleng.ru/
11. ege.edu.ru



Спасибо за внимание !