Решение заданий № 23

Учитель математики
МОУ СОШ № 25 с УИОП
Радионова Е.Ю.

23

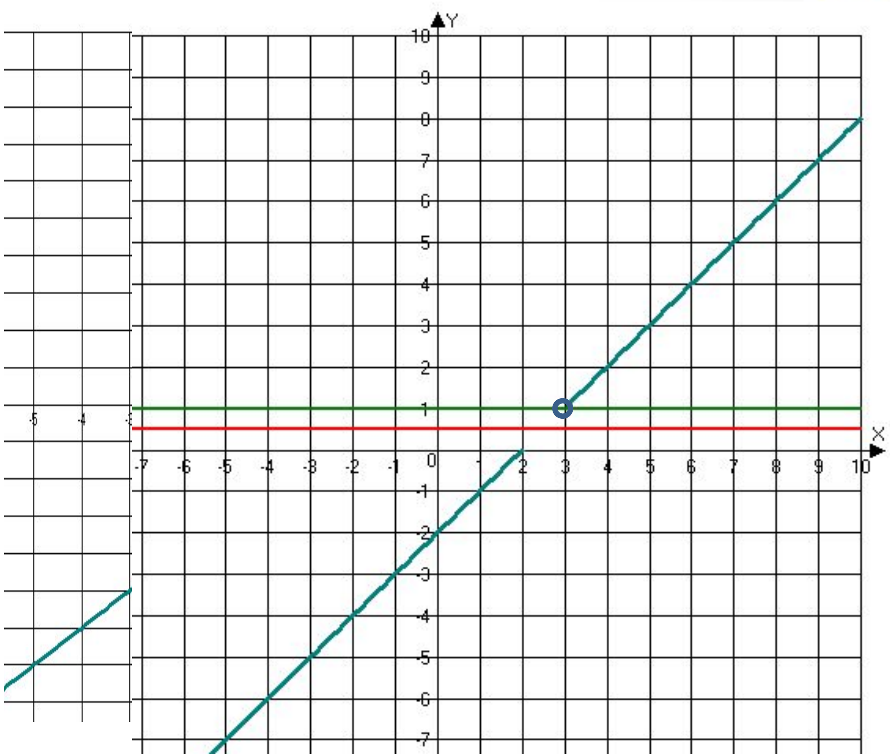
Постройте график функции $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3}$ и найдите все значения a, при которых прямая $y=a$ не имеет с графиком данной функции общих точек.

Решение:

1. Преобразуем функцию: $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3}=\dfrac{|(x-2)\cdot(x-3)|}{x-3}=\dfrac{|x-2|\cdot|x-3|}{x-3}, x\neq 3$

2. Рассмотрим ОДЗ функции: $x^2-5x+6\geq 0$ при $x\in(-\infty;2]\cup(3;\infty)$

3. Построим график функции: $\begin{cases} x-2, если\, x\epsilon(-\infty;2] \\ x\epsilon[2;3)\ не\ удовлетворяет\ условию \\ x-2, если\, x\epsilon(3;\infty) \end{cases}$



Ответ: при $a\epsilon(0;1]$ прямая y=a не имеет с графиком функции $y=\dfrac{\left(\sqrt{x^2-5x+6}\right)^2}{x-3}$ общих точек.

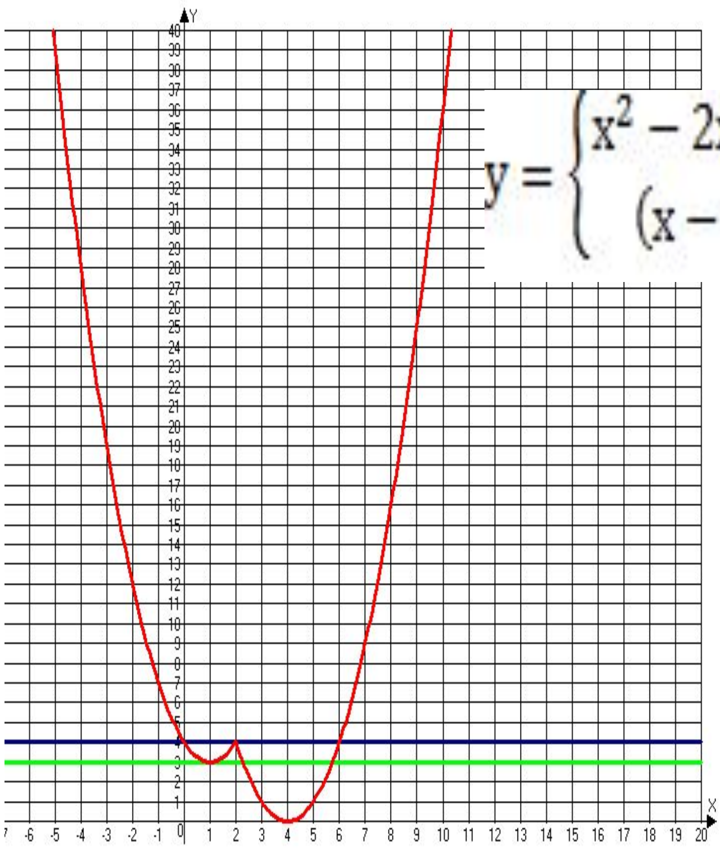
23 Постройте график функции $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x-2|$ и найдите все значения a, при которых он имеет ровно три общие точки с прямой $y = a + 3$.

Решение:

1. Так как нуль модуля равен 2, то рассмотрим знаки модуля:

--- 2 +

2. Построим график функции:



$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & \text{если } x \in (-\infty; 2), \text{ вершина параболы } (1; 3) \\ (x-4)^2, & \text{если } x \in [2; +\infty), \text{ вершина параболы } (4; 0) \end{cases}$$

Ответ: при $a \in [0; 1]$ график функции имеет ровно три общие точки с прямой y=a+3

23 Постройте график функции

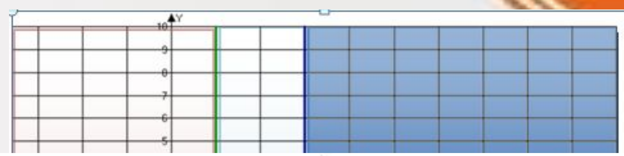
$$y=\begin{cases} 2{,}5x-3{,}5, & \text{если } x<2, \\ -3x+7{,}5, & \text{если } 2\le x\le 3, \\ x-4{,}5, & \text{если } x>3, \end{cases}$$

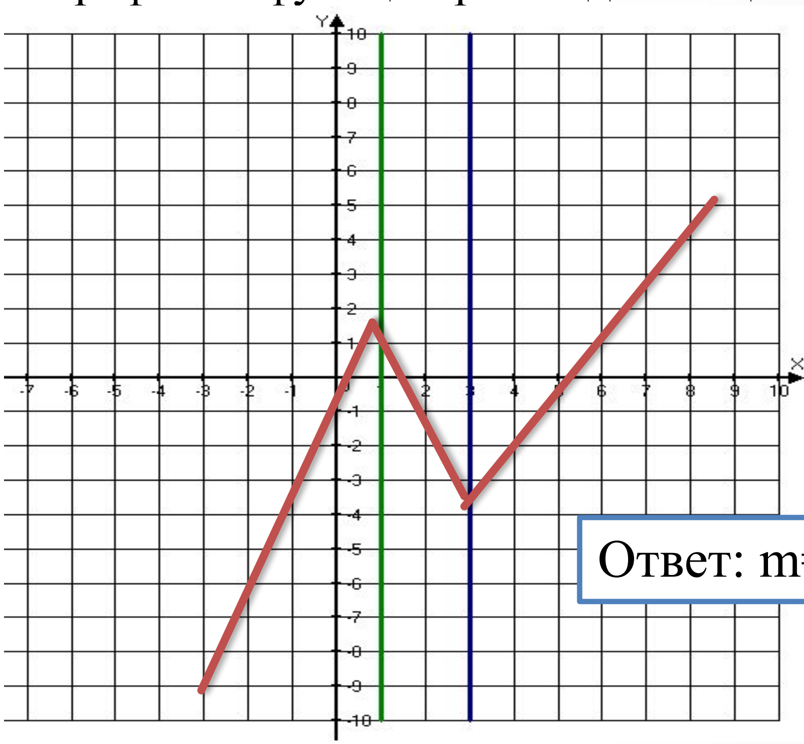
и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно две общие точки.

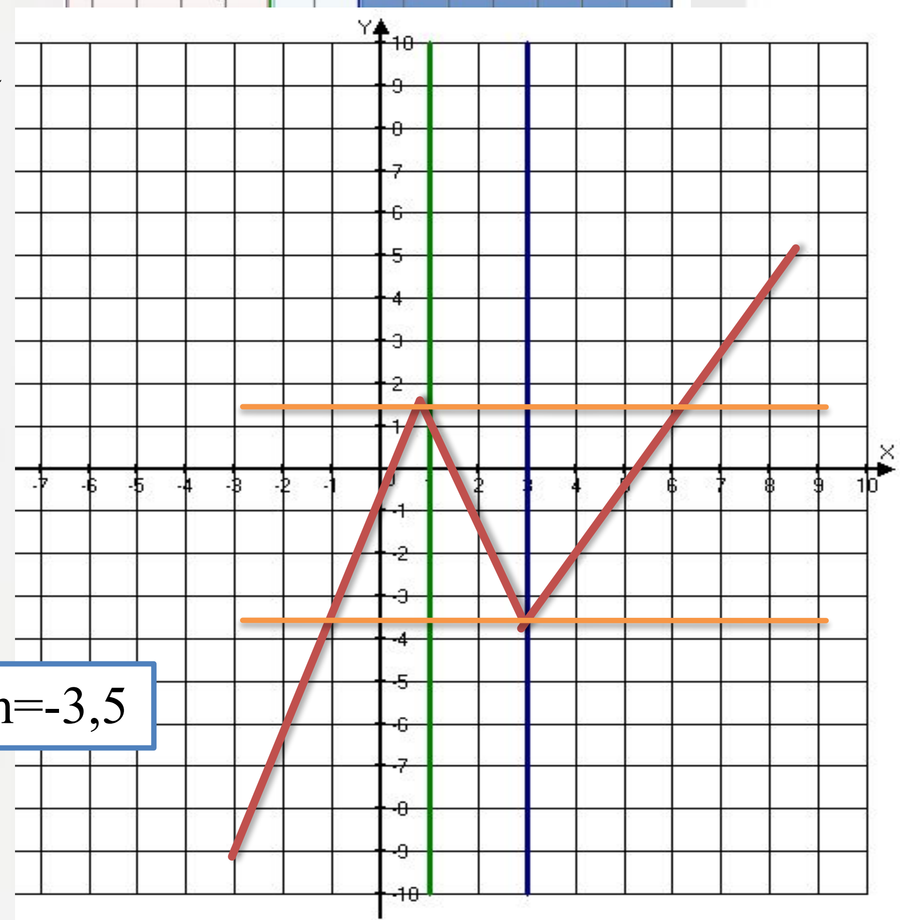
Решение:

Перед нами кусочно-заданная функция.

1. Наносим три области.
2. Строим график функции.
3. Вводим прямую y=m, так, чтобы она имела с графиком функции ровно две общие точки.





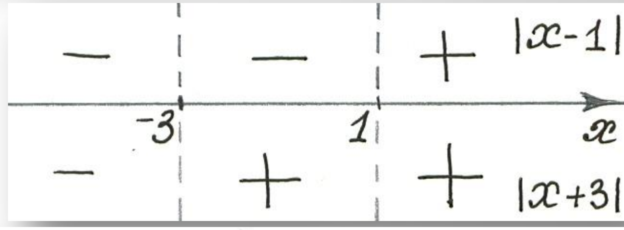


Ответ: m=1,5 и m=-3,5

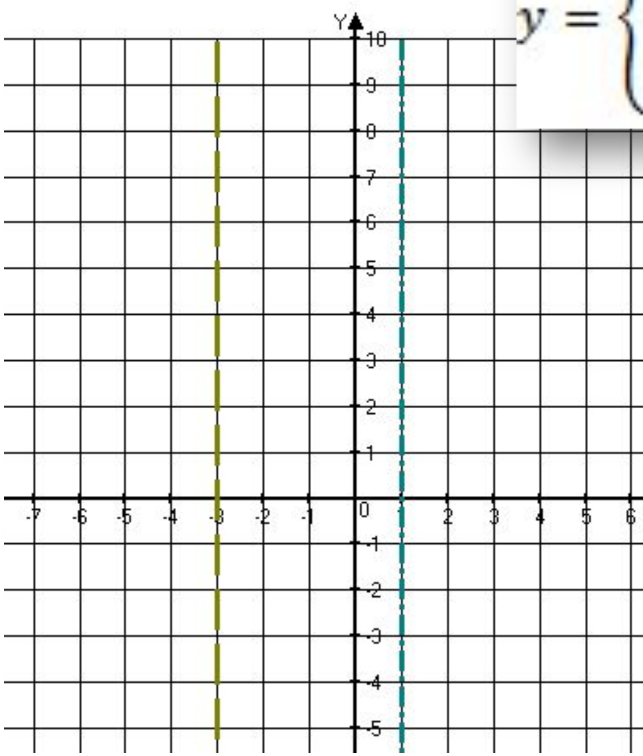
23 Постройте график функции $y = |x-1| - |x+3| + x + 4$ и найдите значения m, при которых прямая $y = m$ имеет с ним ровно две общие точки.

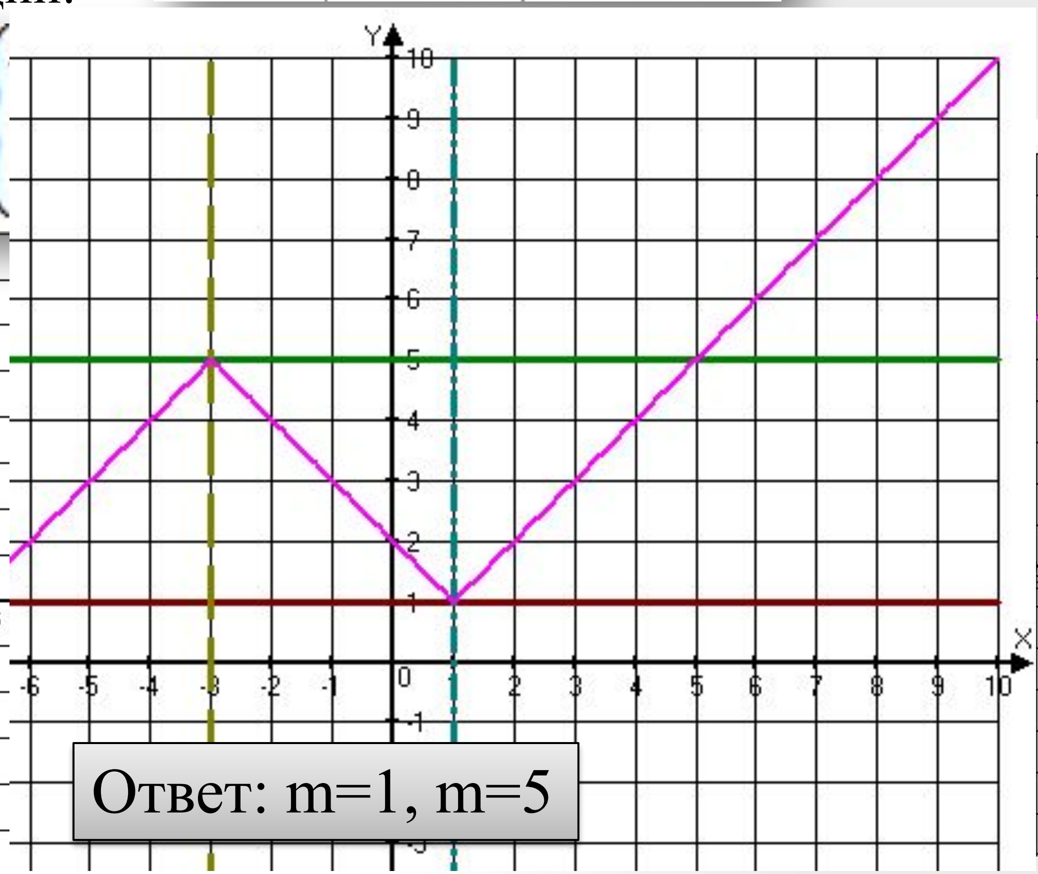
Решение:

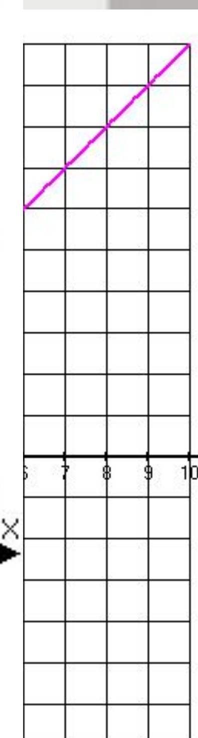
1. Рассмотрим знаки модулей.
2. Наносим три области.
3. Строим график функции:
4. Вводим прямую



$y = \{$







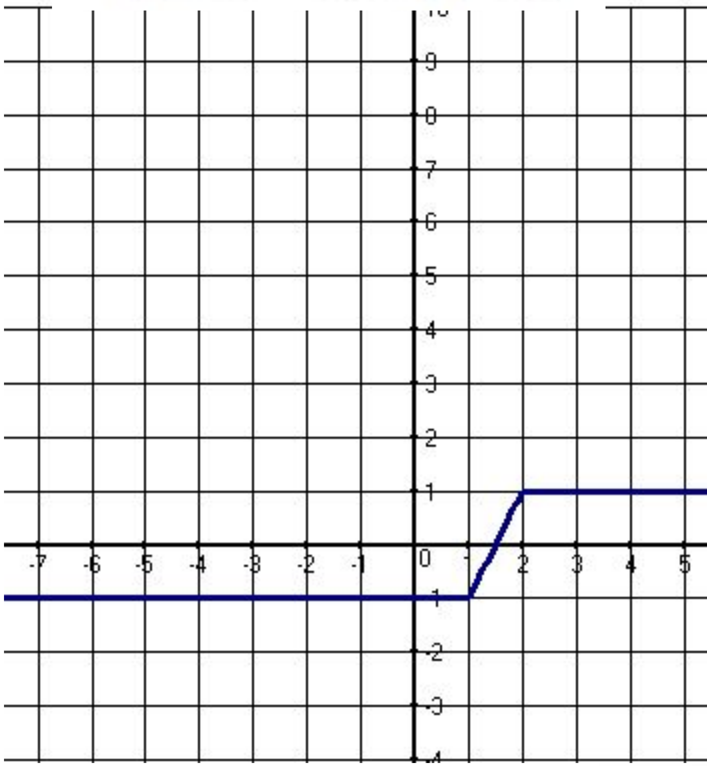
Ответ: m=1, m=5

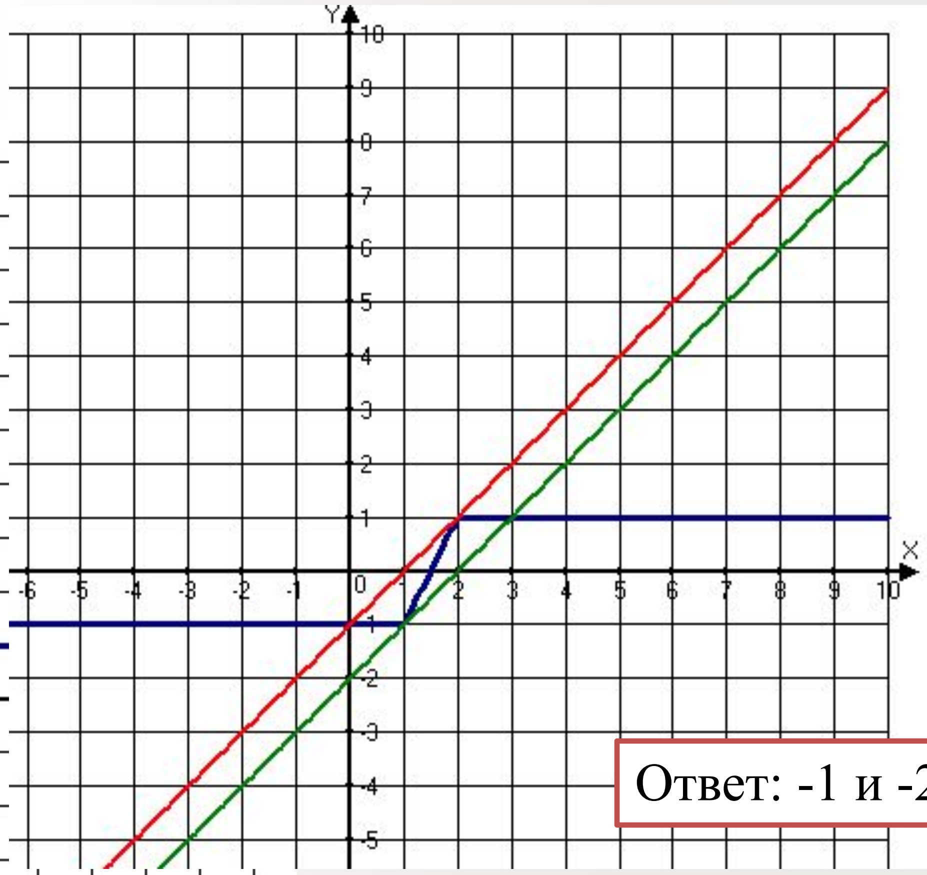
23. Постройте график функции $y = |x-1| - |x-2|$ и определите, при каких значениях b прямая $y = x + b$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение:

Нули модулей 1 и 2. Рассмотрим функцию на интервалах: (-∞;1), [1;2) и [2; +∞).

$$y = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 3, & x \in [1; 2) \\ 1, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$$





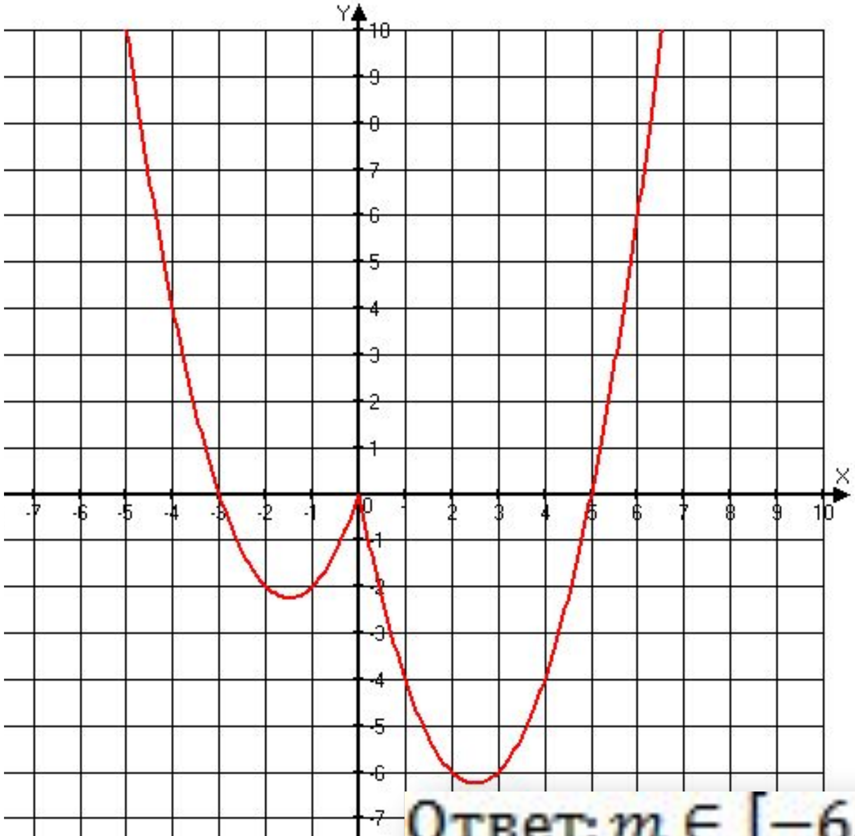
Ответ: -1 и -2

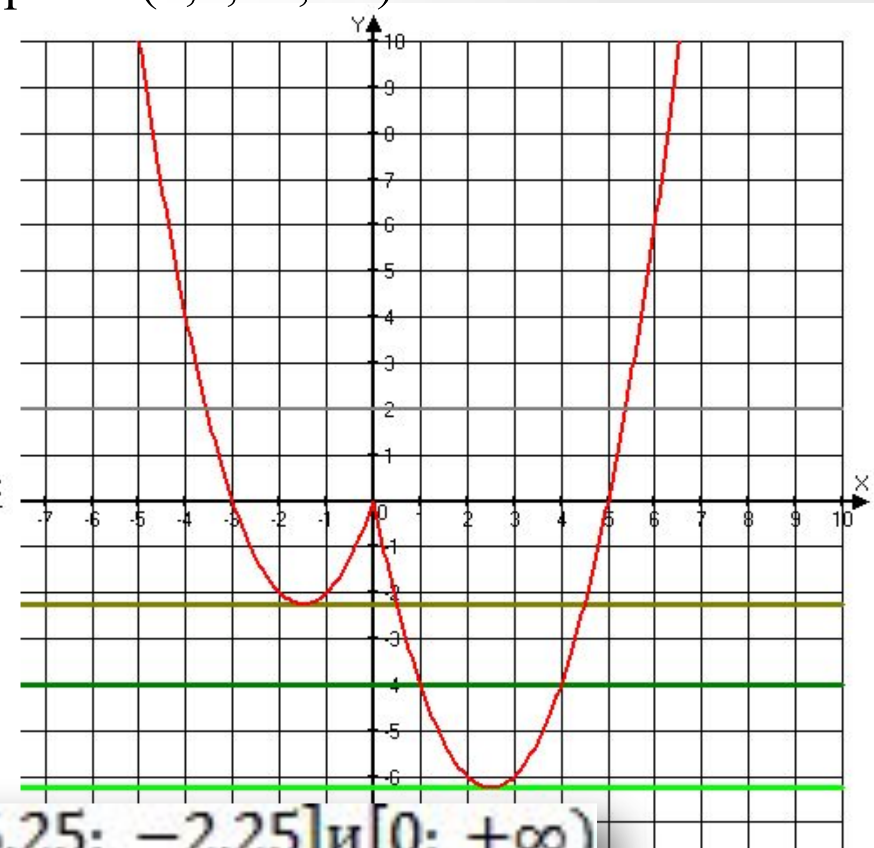
23. Постройте график функции $y=x^2-4|x|-x$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

Решение:

Зная, что $|x| = \begin{cases}-x, x \le 0 \\ x, x > 0\end{cases}$ определим вид функции $y = \begin{cases}x^2+3x, x \le 0 \\ x^2-5x, x > 0\end{cases}$

Построим график функции (вершина первой параболы (-1,5; -2, 25), вершина второй – (2,5; -6, 25).



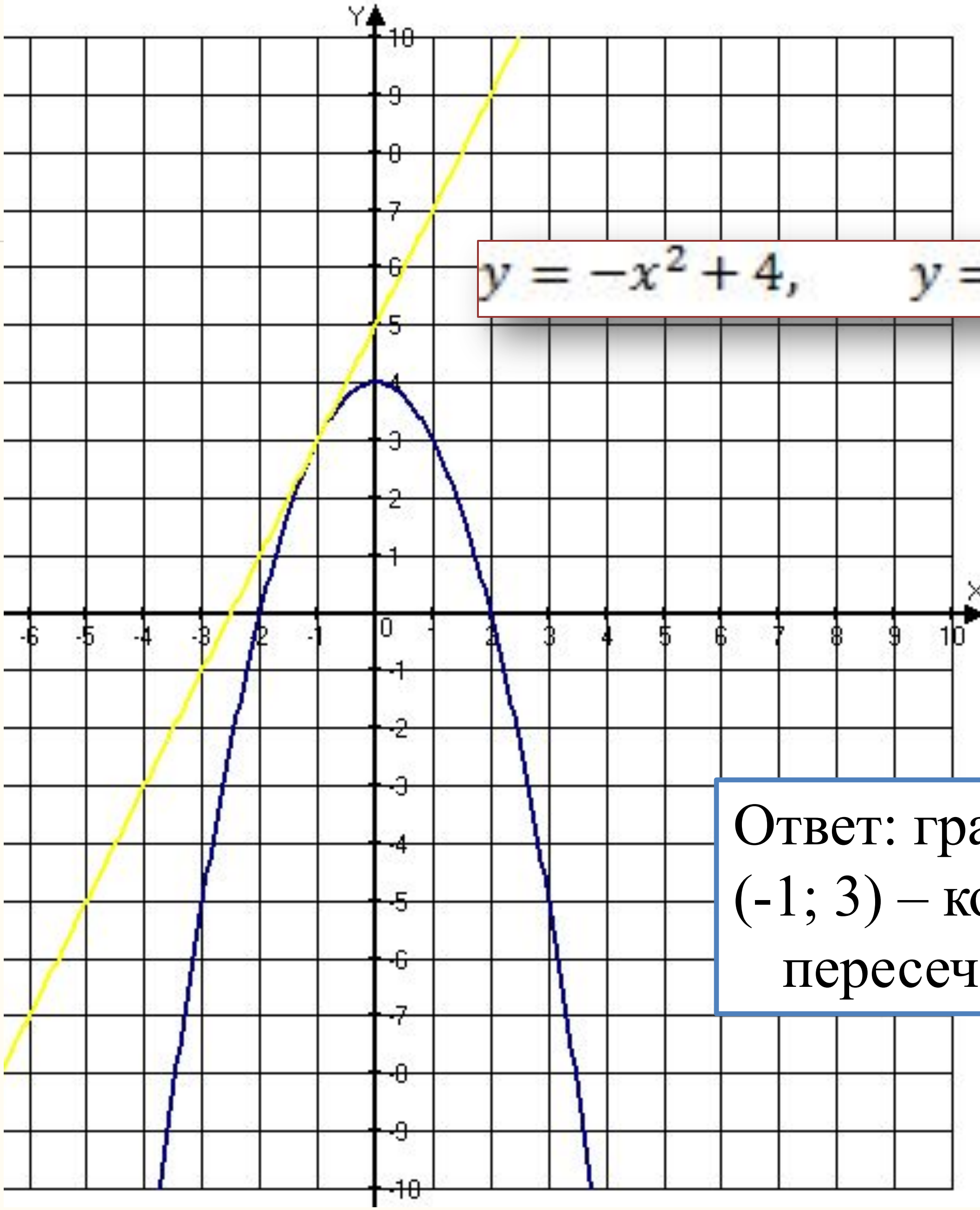


Ответ: $m \in [-6{,}25;\ -2{,}25]$ и $[0;\ +\infty)$

23. Известно, что графики функций $y=-x^2+p$ и $y=2x+5$ имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.

Решение:

1. Так как графики функций имеют общую точку, то приравняем правые части уравнений $-x^2+p=2x+5,\quad -x^2-2x+p-5=0$
2. Точка одна, значит квадратное уравнение имеет одно решение (D=0). Найдем дискриминант (4p -16=0, p=4).
3. Определим координаты этой точки: (-1; 3).
4. Построим в одной системе координат графики этих функций: $y=-x^2+4,\quad y=2x+5=0$



$y = -x^2 + 4, \qquad y = 2x + 5 = 0$

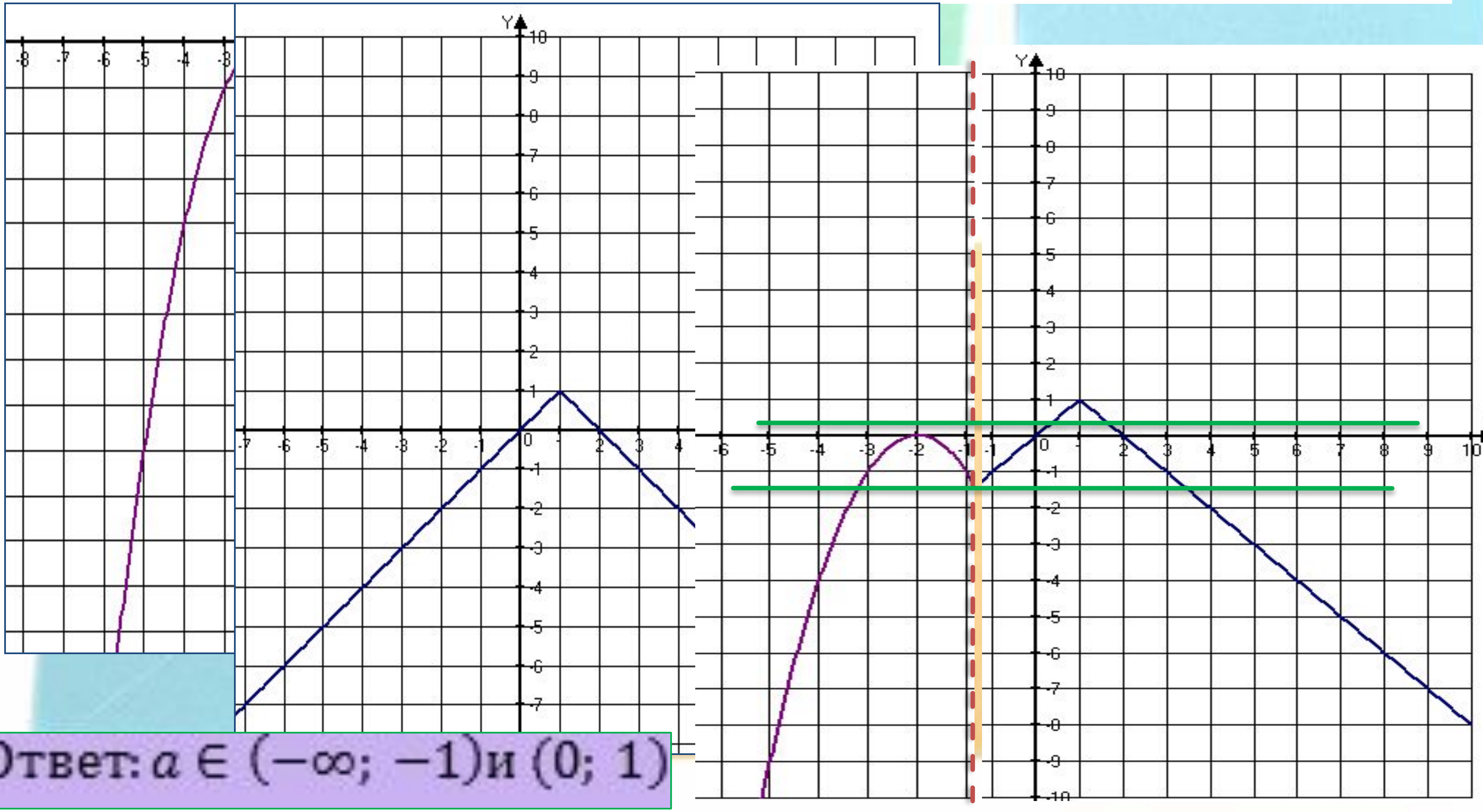
Ответ: графики функций;
(-1; 3) – координаты точки пересечения графиков.

23 Постройте график функции $y=\begin{cases}-x^2-4x-4, & \text{если } x<-1,\\ 1-|x-1|, & \text{если } x\ge -1,\end{cases}$

и найдите, при каких значениях параметра a он имеет ровно две общие точки с прямой $y=a$.

$y=-x^2-4x-4=-(x+2)^2$, парабола, ветви вниз, вершина $(-2;0)$

$y=1-|x-1|$, график функции $y=|x|$ с вершиной в точке $(1;1)$



Ответ: $a\in(-\infty;\ -1)$ и $(0;\ 1)$

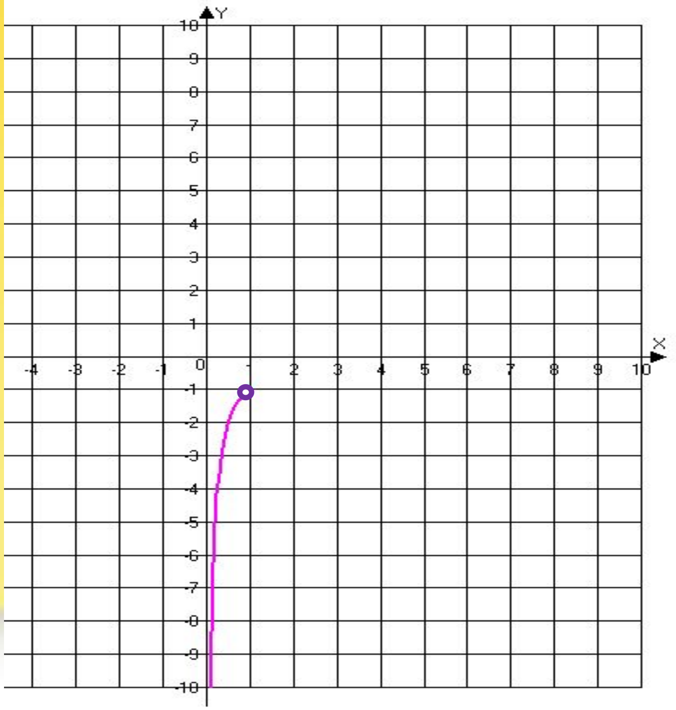
23 Постройте график функции $y = \dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2}$ и найдите все значения k, при которых прямая $y = kx$ имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

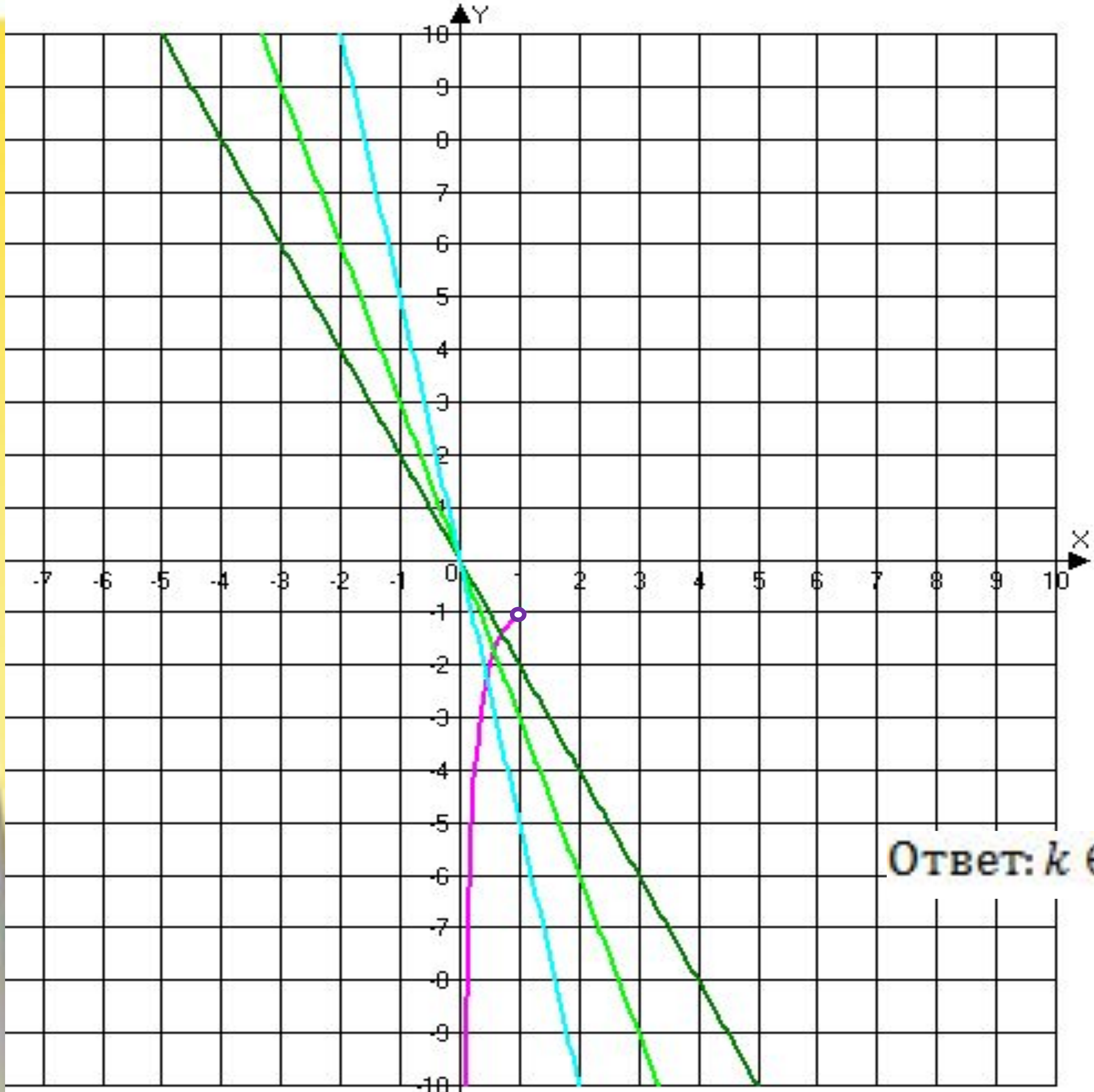
ОДЗ: $x - x^2 > 0$, значит $x \in (0;1)$

Упростим: $y = \dfrac{x-1}{\left(\sqrt{x-x^2}\right)^2} = \dfrac{x-1}{|x-x^2|} = \dfrac{x-1}{|x(1-x)|} = \dfrac{x-1}{|x|\cdot|1-x|} = \dfrac{x-1}{|x|\cdot|x-1|}$

	$(-\infty;0)$	$(0;1)$	$(1;+\infty)$
$\lvert x\rvert$	−	+	+
$\lvert x-1\rvert$	−	−	+

С учетом знаков и ОДЗ: $y = \begin{cases} (-\infty;0) - \text{не принадлежит ОДЗ} \\ \dfrac{-1}{x}, (0;1) \\ (1;+\infty) - \text{не принадлежит ОДЗ} \end{cases}$





Ответ: $k \in (-\infty; -1)$

Постройте график функции $y = \left(\sqrt{9-x^2}\right)^2 + \frac{x^2-3x}{x}$ и найдите, при каких значениях **a** прямая **y=a** имеет с ним ровно одну общую точку.

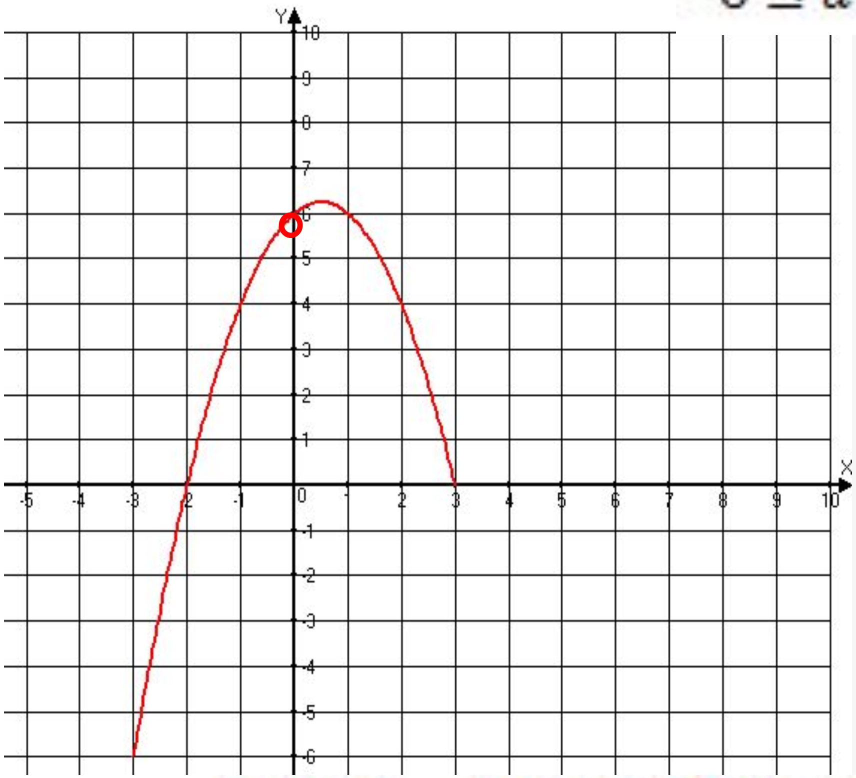
Решение:

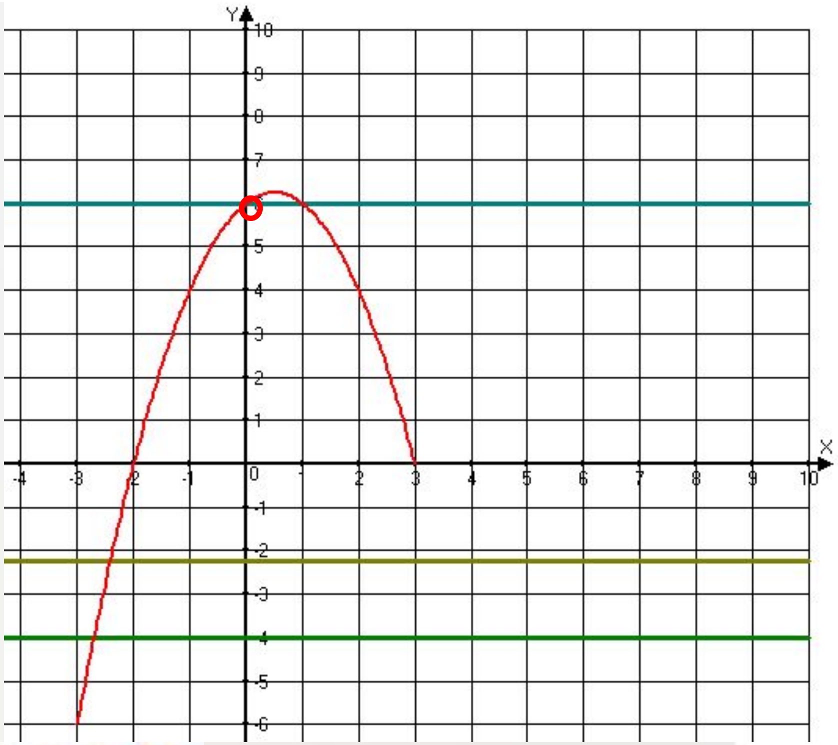
Найдем область определения функции: $9 - x^2 \geq 0, x \neq 0$ ($x \in [-3; 0) \cup (0; 3]$)

Таким образом, на области определения функция принимает вид: $y = -x^2 + x + 6$

Прямая y=a имеет с графиком данной функции ровно одну точку при

$-6 \leq a < 0; a = 6; a = 6{,}25$





Ответ: $-6 \leq a < 0; a = 6; a = 6{,}25$

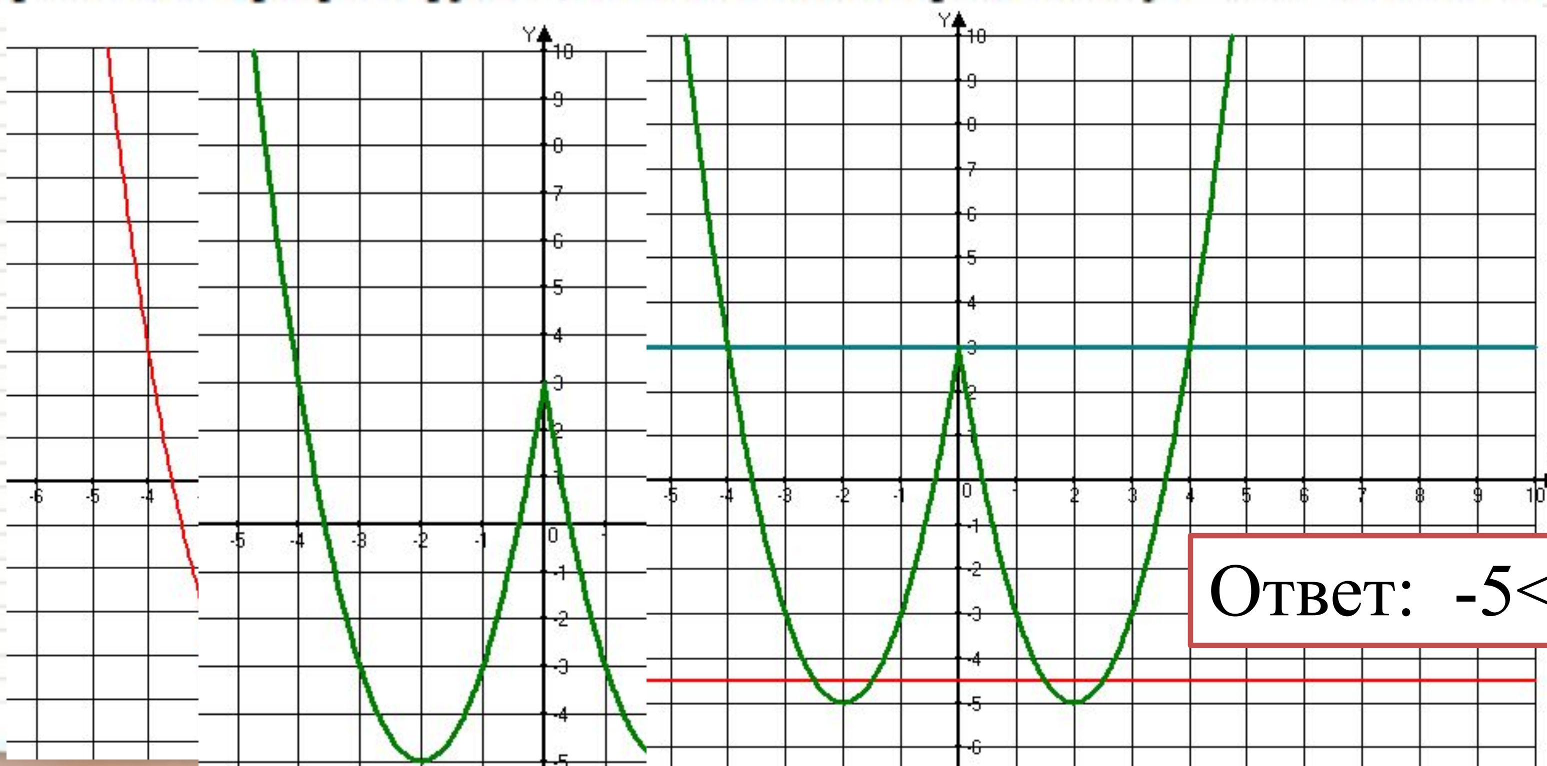
Постройте график функции $y = 2x^2 - 8 \cdot |x| + 3$ и найдите, при каких значениях **а** прямая **у=а** имеет с ним более двух общих точек.

Решение:

Данная в условии задачи функция определена на всей числовой прямой и четная.

При $x \geq 0$ график функции является параболой $y = 2x^2 - 8x + 3$

При $x < 0$ график функции является параболой $y = 2x^2 + 8x + 3$



Ответ: -5<a≤3

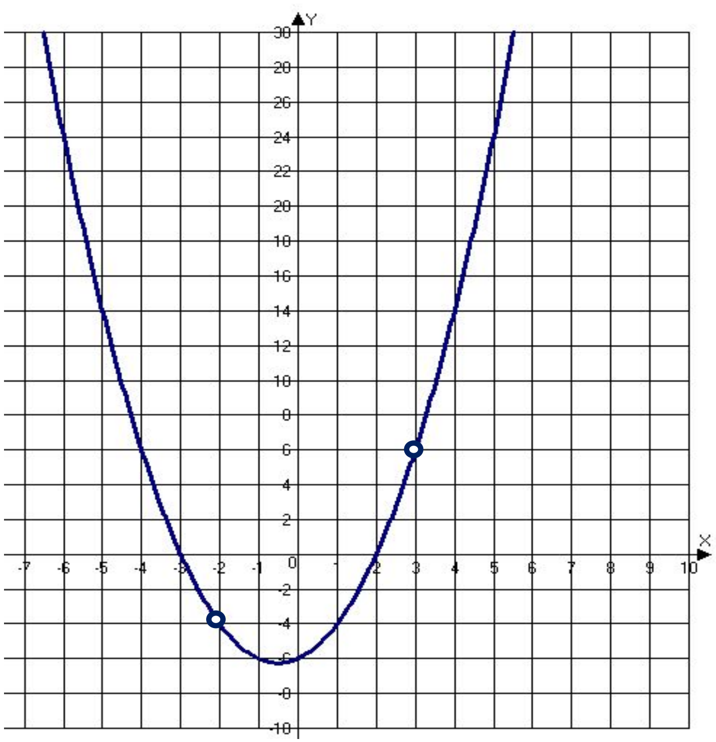
23 Постройте график функции $y=\dfrac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}$ и определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

1.Данная функция дробно – рациональная и определена не для всех действительных чисел.

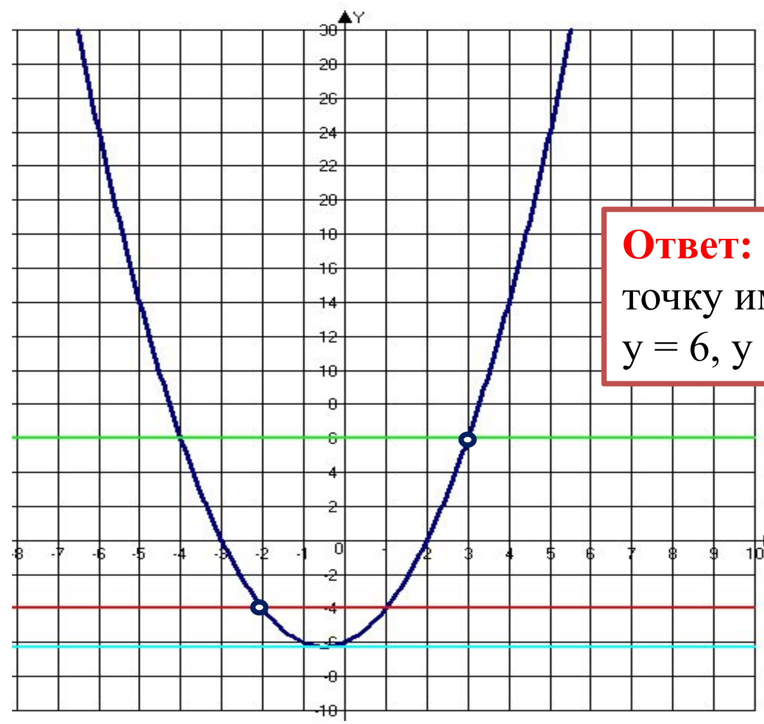
2. Область определения: x≠3 и x≠-2

3.Теперь преобразуем функцию, разложив числитель на множители

$$y=\frac{x^4-13x^2+36}{(x-3)(x+2)}=\frac{(x^2-9)(x^2-4)}{(x-3)(x+2)}=\frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)}=(x+3)(x-2)$$



y = m семейство прямых параллельных оси Ox



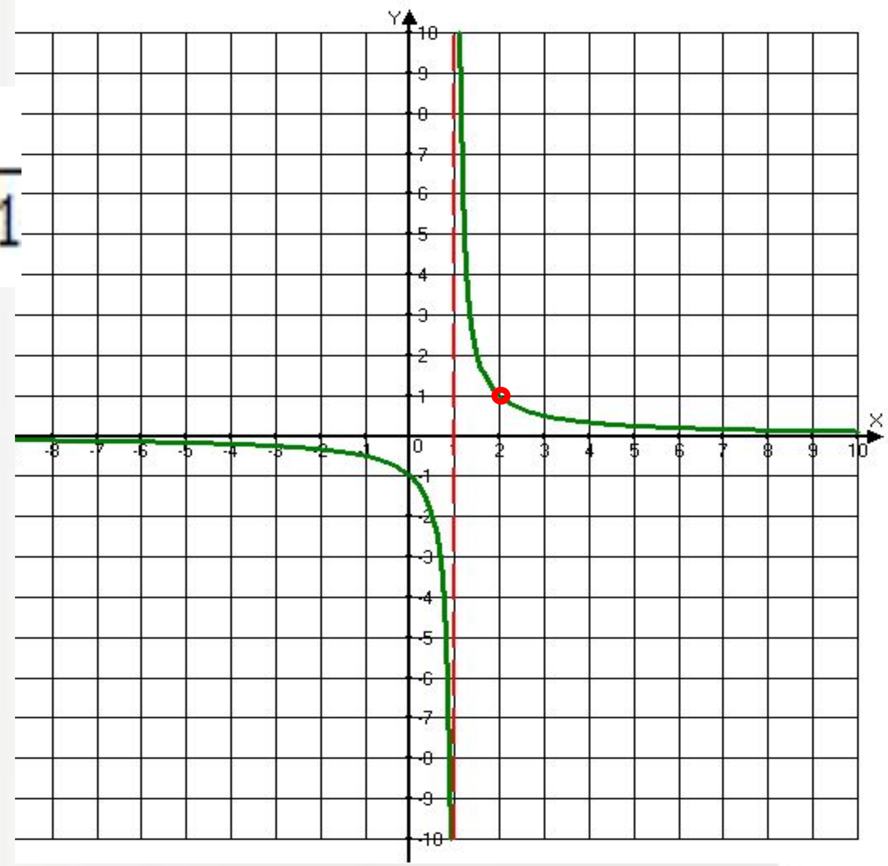
Ответ: одну общую точку имеют прямые: y = 6, y = -4 и y = -6,25

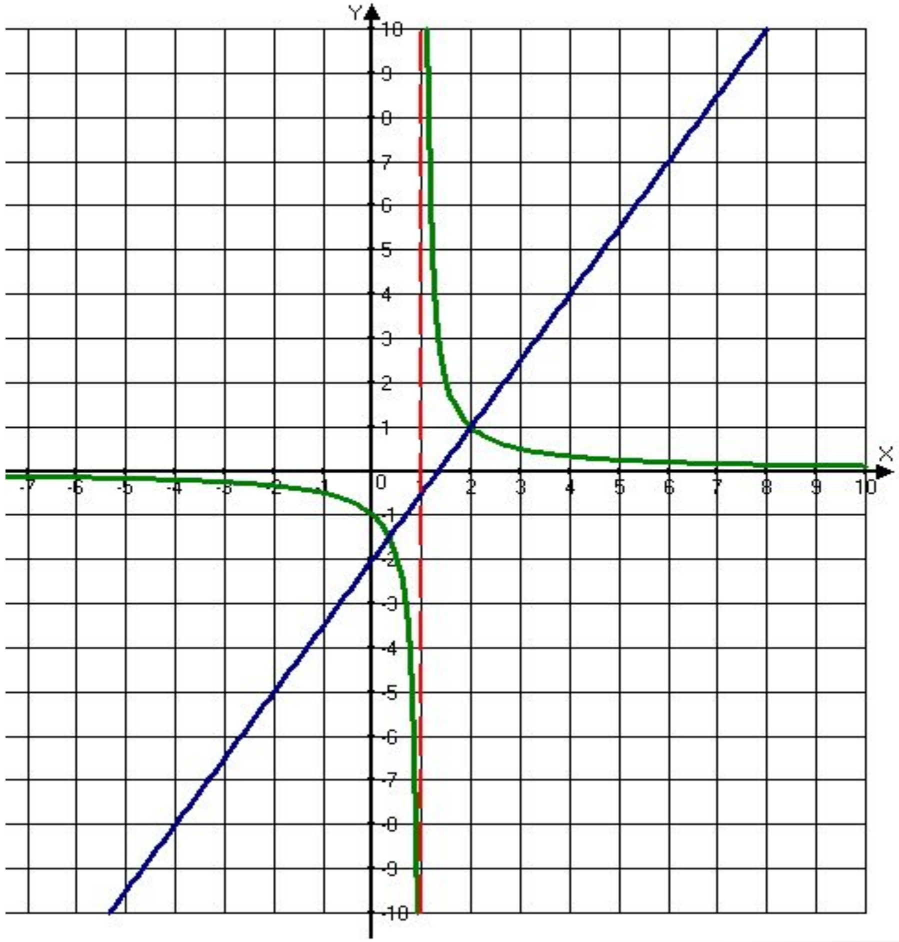
23. Постройте график функции $y = \dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = ax - 2$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

ОДЗ: $x^2 - 3x + 2 \neq 0, \quad x \neq 1, \quad x \neq 2$

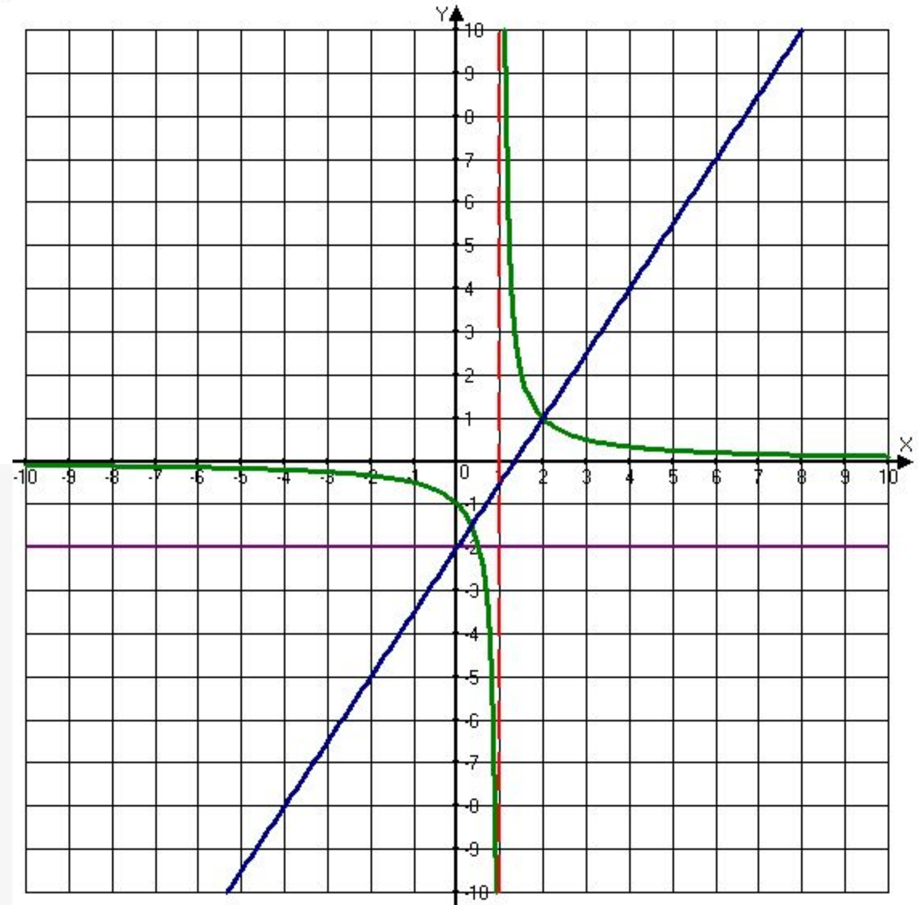
$$y = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}$$

Графиком данной функции является гипербола, 1 и 3 четвертей, смещенная на 1 вправо.





$a = 1{,}5$



$a = 0$

23. Постройте график функции $y = \dfrac{(x+1)(x^2-4x+3)}{x-1}$ и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

23. Найдите все значения *k*, при каждом из которых прямая $y = kx$ имеет с графиком функции $y = x^2 + 4$ ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.