

# Решение заданий № 23

Учитель математики  
МОУ СОШ № 25 с УИОП  
Радионова Е.Ю.

Постройте график функции  $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$  и найдите все значения  $a$ , при которых прямая  $y = a$  не имеет с графиком данной функции общих точек.

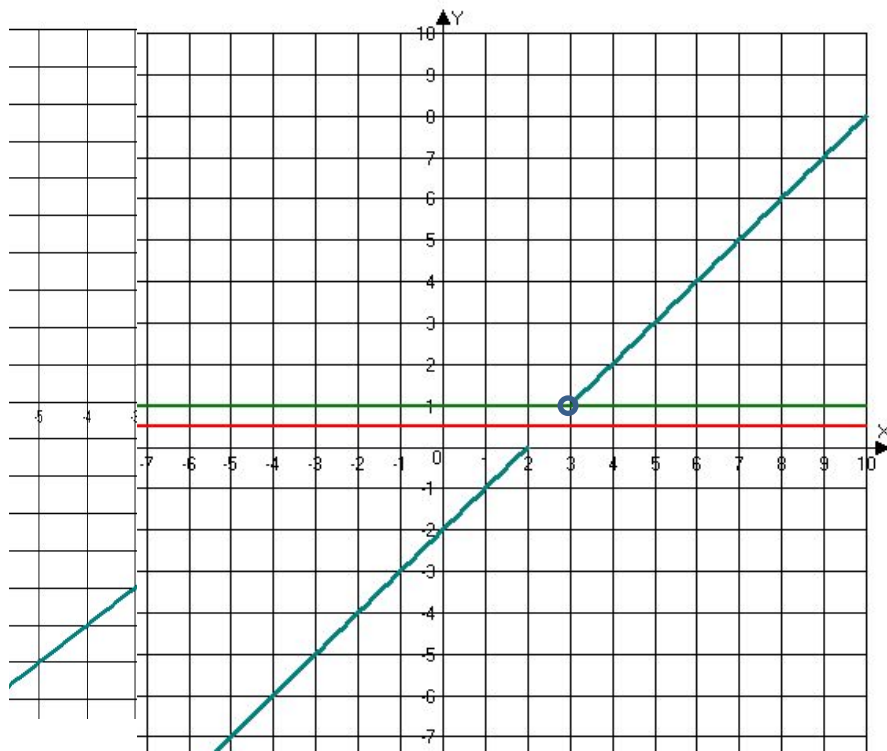


### Решение:

1. Преобразуем функцию:  $y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3} = \frac{|(x - 2) \cdot (x - 3)|}{x - 3} = \frac{|x - 2| \cdot |x - 3|}{x - 3}, x \neq 3$

2. Рассмотрим ОДЗ функции:  $x^2 - 5x + 6 \geq 0$  при  $x \in (-\infty; 2] \cup (3; \infty)$

3. Построим график функции:



$$\begin{cases} x - 2, \text{ если } x \in (-\infty; 2] \\ x \in [2; 3) \text{ не удовлетворяет условию} \\ x - 2, \text{ если } x \in (3; \infty) \end{cases}$$

**Ответ:** при  $a \in (0; 1]$

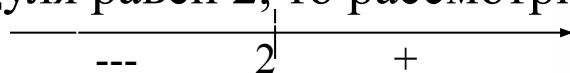
прямая  $y = a$  не имеет с графиком функции общих точек.

$$y = \frac{(\sqrt{x^2 - 5x + 6})^2}{x - 3}$$

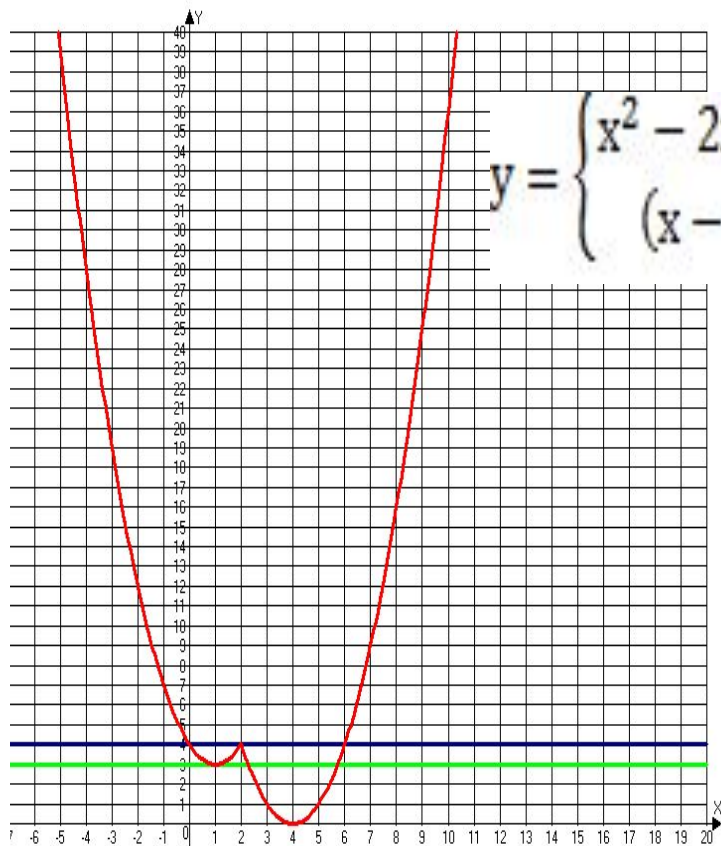
Постройте график функции  $y = x^2 - 5x + 10 - 3|x - 2|$  и найдите все значения  $a$ , при которых он имеет ровно три общие точки с прямой  $y = a + 3$ .

## Решение:

1. Так как нуль модуля равен 2, то рассмотрим знаки модуля:



2. Построим график функции:



$$y = \begin{cases} x^2 - 2x + 4, & \text{если } x \in (-\infty; 2), \text{ вершина параболы } (1; 3) \\ (x - 4)^2, & \text{если } x \in [2; +\infty), \text{ вершина параболы } (4; 0) \end{cases}$$

Ответ: при  $a \in [0; 1]$  график функции имеет ровно три общие точки с прямой  $y = a + 3$



Постройте график функции

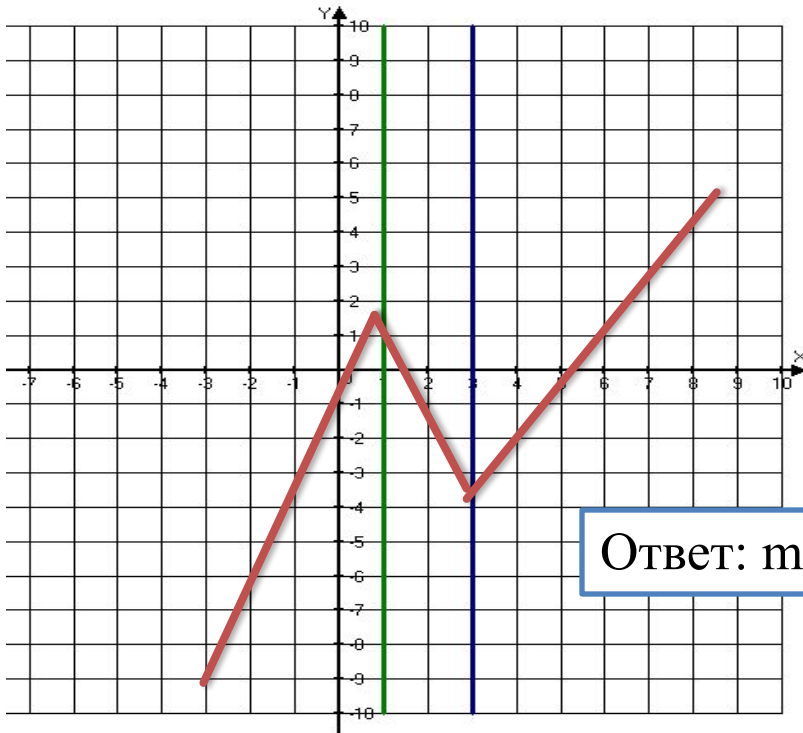
$$y = \begin{cases} 2,5x - 3,5, & \text{если } x < 2, \\ -3x + 7,5, & \text{если } 2 \leq x \leq 3, \\ x - 4,5, & \text{если } x > 3, \end{cases}$$

и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно две общие точки.

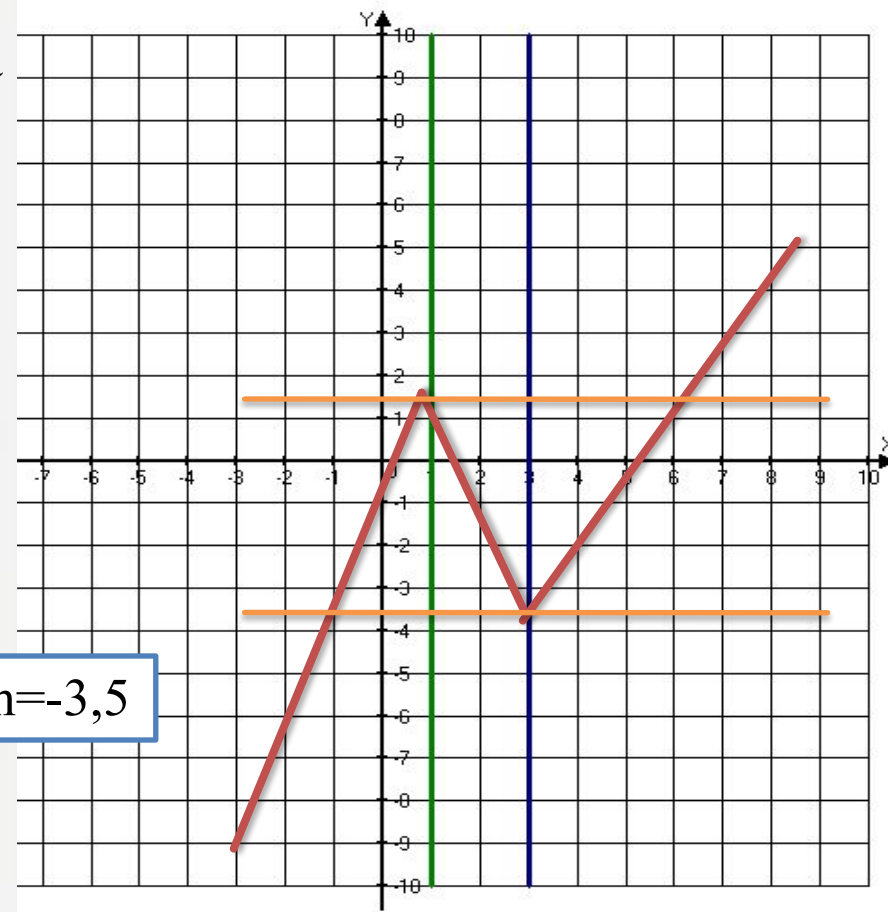
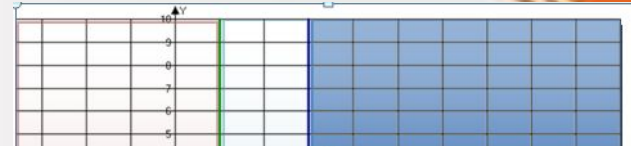
### Решение:

Перед нами кусочно-заданная функция.

1. Наносим три области.
2. Строим график функции.
3. Вводим прямую  $y = m$ , так, чтобы она имела с графиком ровно две общие точки.



Ответ:  $m = 1,5$  и  $m = -3,5$



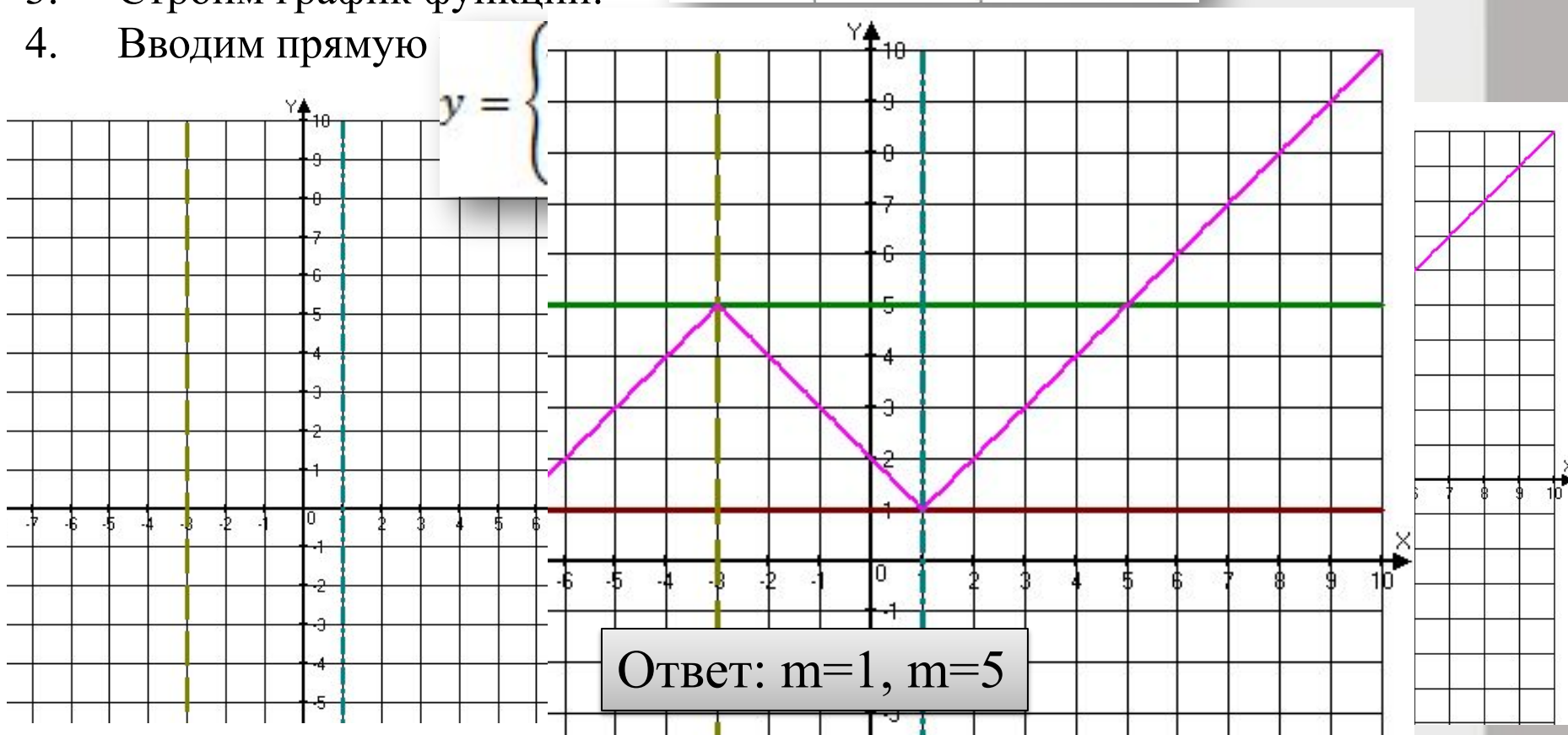
23

Постройте график функции  $y = |x - 1| - |x + 3| + x + 4$  и найдите значения  $m$ , при которых прямая  $y = m$  имеет с ним ровно две общие точки.

### Решение:

1. Рассмотрим знаки модулей.
2. Наносим три области.
3. Строим график функции:
4. Вводим прямую

-	-	+	$ x-1 $
-	+	+	$ x+3 $
	-3	1	$x$



Ответ:  $m=1, m=5$

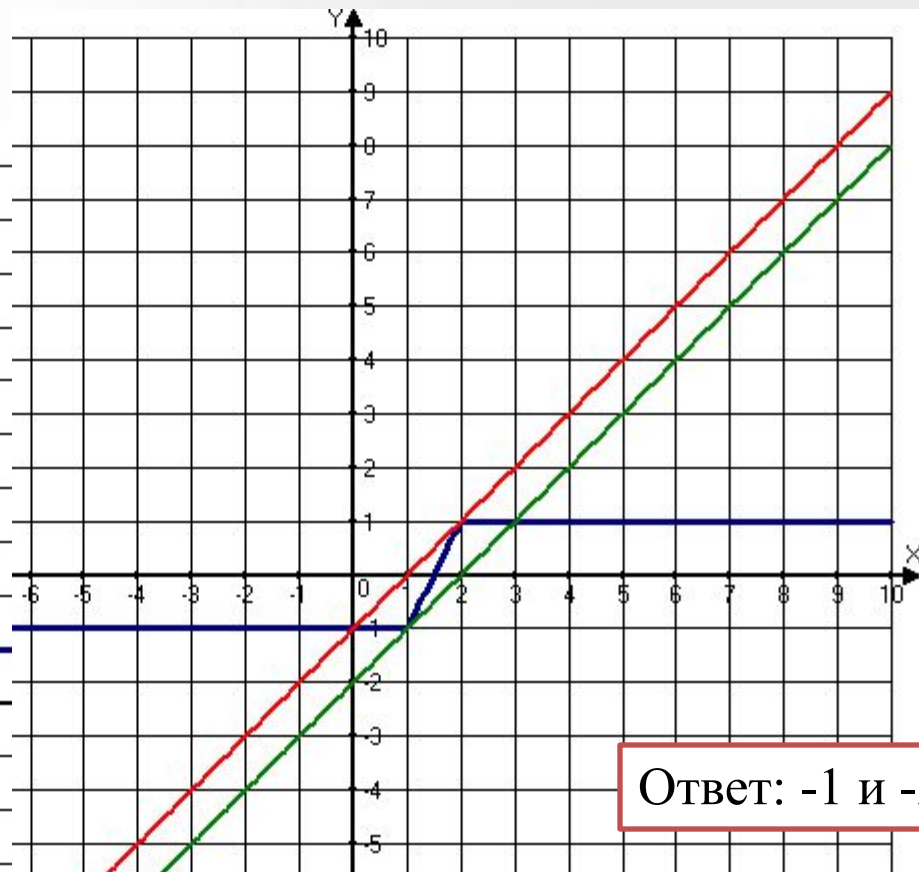
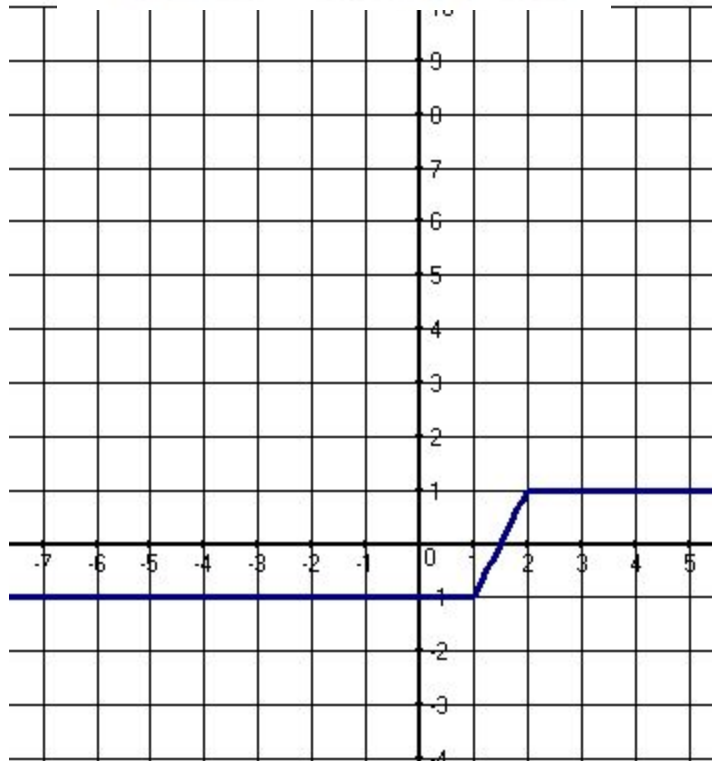
23. Постройте график функции  $y = |x - 1| - |x - 2|$  и определите, при каких значениях

$b$  прямая  $y = x + b$  имеет с графиком ровно две общие точки.

**Решение:**

Нули модулей 1 и 2. Рассмотрим функцию на интервалах:  $(-\infty; 1)$ ,  $[1; 2)$  и  $[2; +\infty)$ .

$$y = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty; 1) \\ 2x - 3, & x \in [1; 2) \\ 1, & x \in [2; +\infty) \end{cases}$$



Ответ: -1 и -2

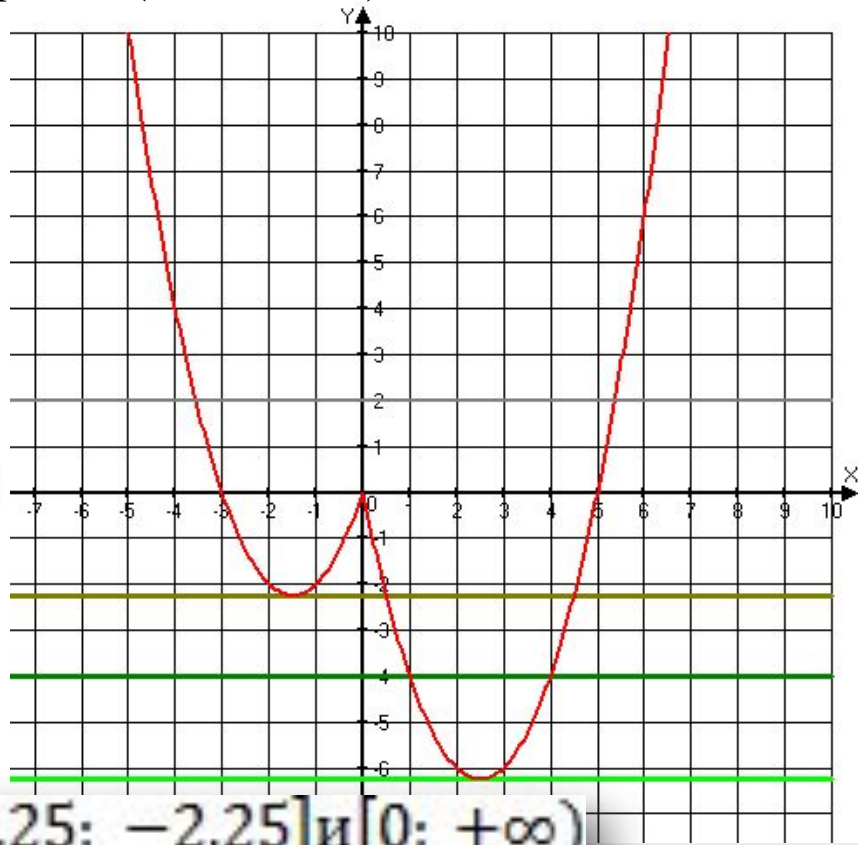
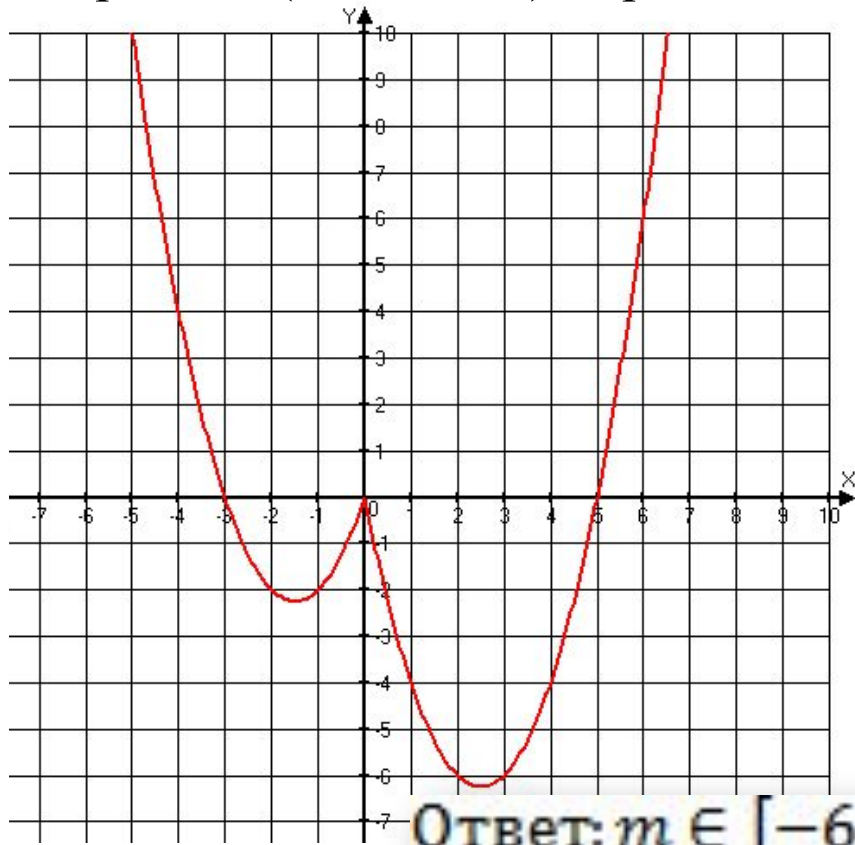
23. Постройте график функции  $y = x^2 - 4|x| - x$  и определите, при каких значениях  $m$

прямая  $y = m$  имеет с графиком не менее одной, но не более трёх общих точек.

**Решение:**

Зная, что  $|x| = \begin{cases} -x, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$  определим вид функции  $y = \begin{cases} x^2 + 3x, & x \leq 0 \\ x^2 - 5x, & x > 0 \end{cases}$

Построим график функции (вершина первой параболы  $(-1,5; -2,25)$ , вершина второй  $(2,5; -6,25)$ ).



Ответ:  $m \in [-6,25; -2,25]$  и  $[0; +\infty)$



23. Известно, что графики функций  $y = -x^2 + p$  и  $y = 2x + 5$  имеют ровно одну общую точку. Определите координаты этой точки. Постройте графики заданных функций в одной системе координат.



## Решение:

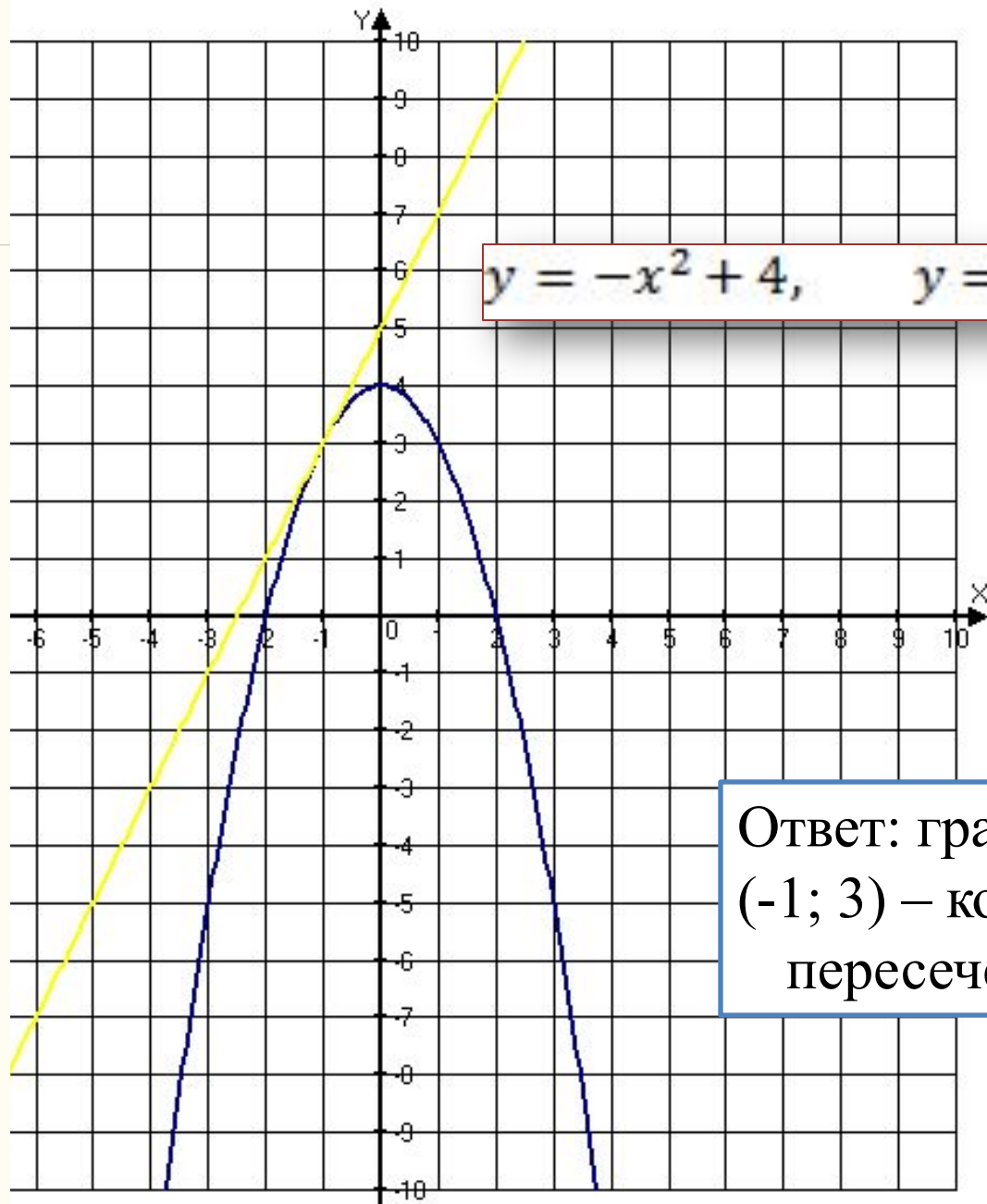
1. Так как графики функций имеют общую точку, то приравняем правые части уравнений  $-x^2 + p = 2x + 5$ ,  $-x^2 - 2x + p - 5 = 0$

2. Точка одна, значит квадратное уравнение имеет одно решение ( $D=0$ ). Найдем дискриминант ( $4p - 16=0$ ,  $p=4$ ).

3. Определим координаты этой точки:  $(-1; 3)$ .

4. Построим в одной системе координат графики этих функций:  $y = -x^2 + 4$ ,  $y = 2x + 5 = 0$





$$y = -x^2 + 4, \quad y = 2x + 5 = 0$$

Ответ: графики функций;  
(-1; 3) – координаты точки  
пересечения графиков.

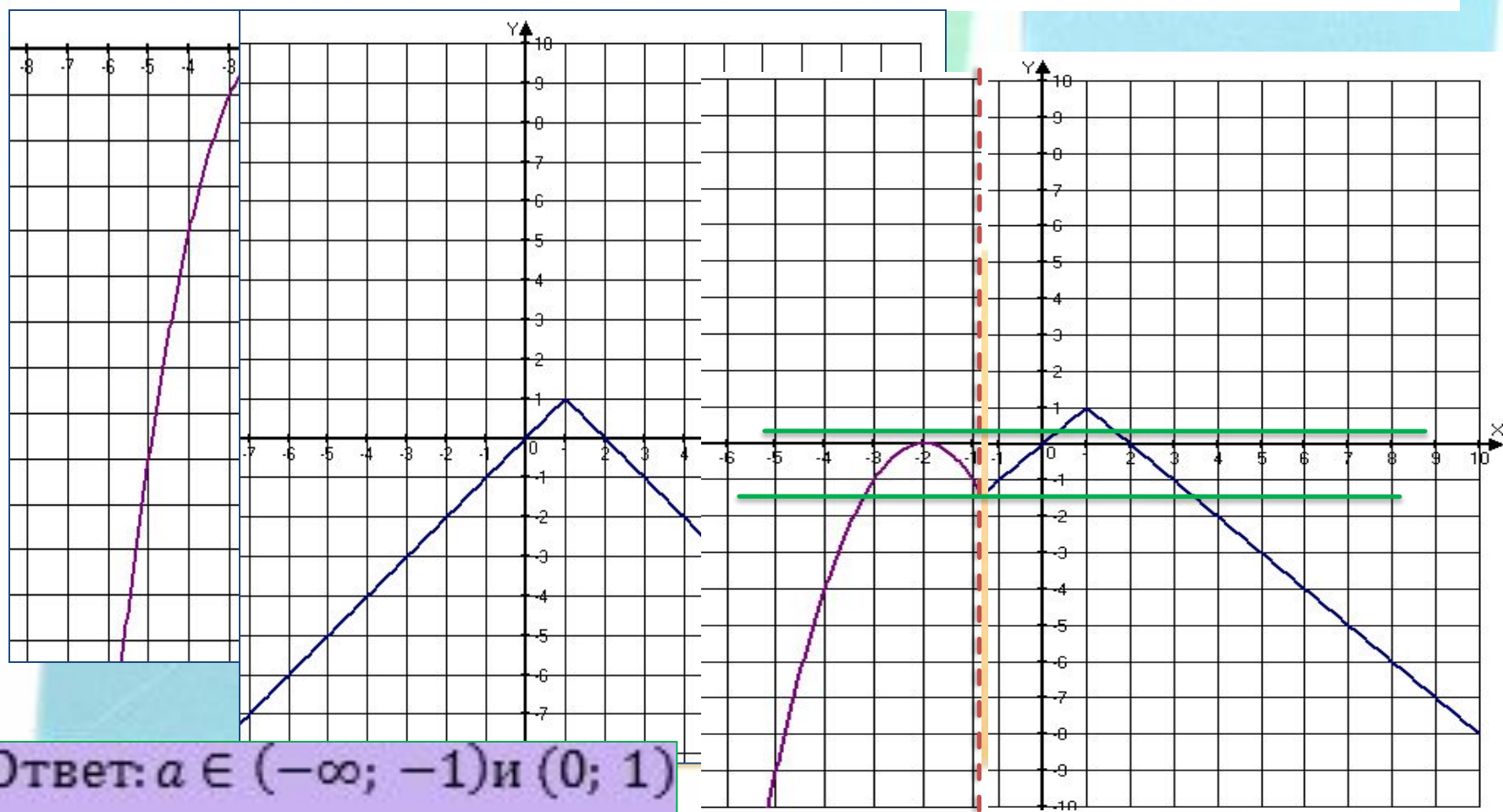
23

Постройте график функции  $y = \begin{cases} -x^2 - 4x - 4, & \text{если } x < -1, \\ 1 - |x - 1|, & \text{если } x \geq -1, \end{cases}$

и найдите, при каких значениях параметра  $a$  он имеет ровно две общие точки с прямой  $y = a$ .

$y = -x^2 - 4x - 4 = -(x + 2)^2$ , парабола, ветви вниз, вершина  $(-2; 0)$

$y = 1 - |x - 1|$ , график функции  $y = |x|$  с вершиной в точке  $(1; 1)$



Ответ:  $a \in (-\infty; -1)$  и  $(0; 1)$

23

Постройте график функции  $y = \frac{x-1}{(\sqrt{x-x^2})^2}$  и найдите все значения  $k$ , при

которых прямая  $y = kx$  имеет с графиком данной функции ровно одну общую точку.

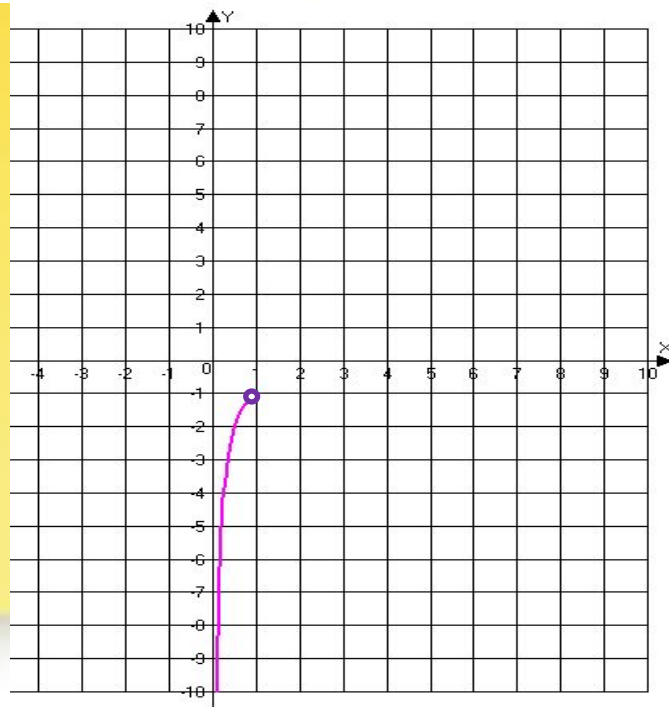
ОДЗ:  $x - x^2 > 0$ , значит  $x \in (0; 1)$

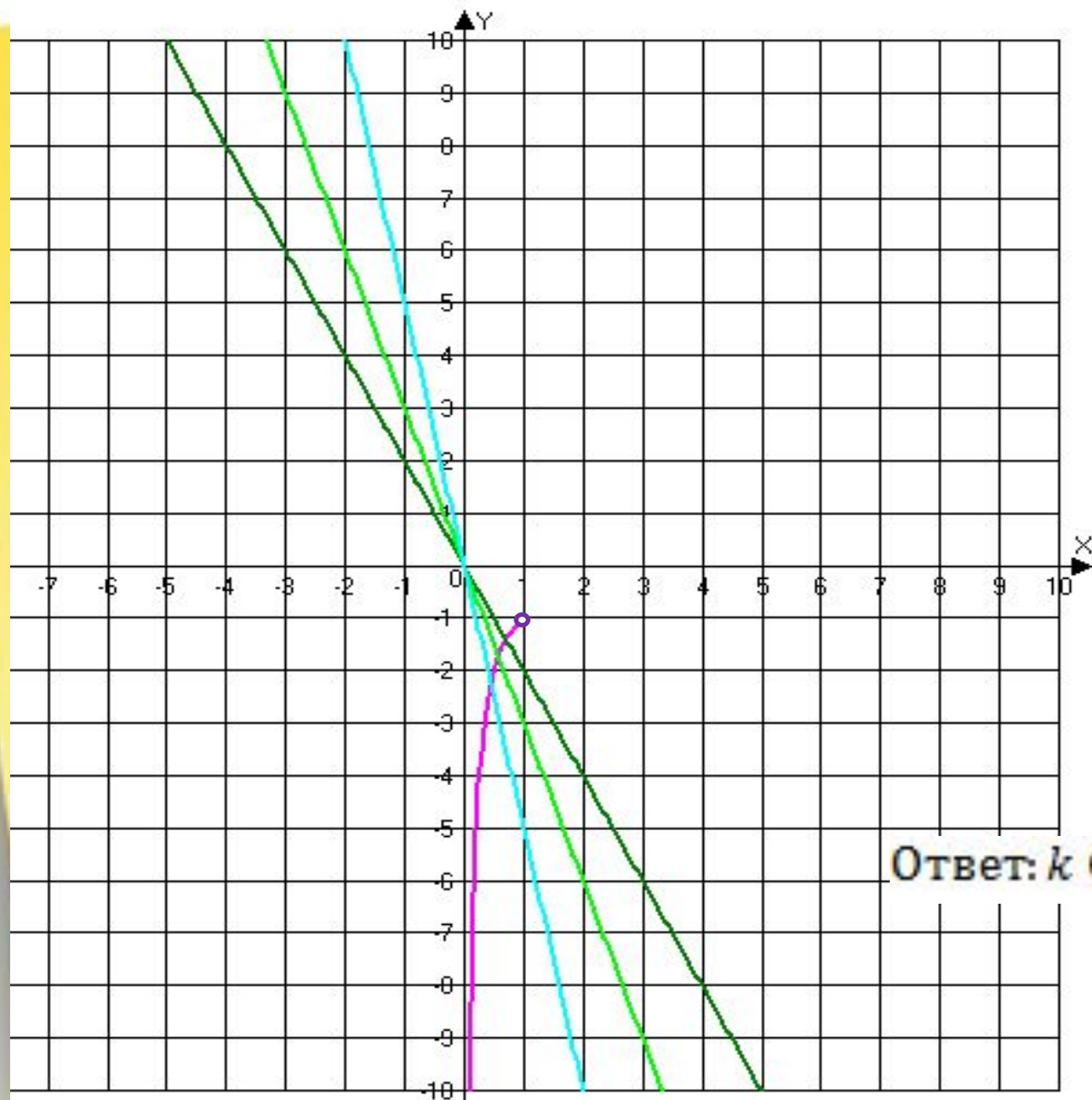
$$\text{Упростим: } y = \frac{x-1}{(\sqrt{x-x^2})^2} = \frac{x-1}{|x-x^2|} = \frac{x-1}{|x(1-x)|} = \frac{x-1}{|x| \cdot |1-x|} = \frac{x-1}{|x| \cdot |x-1|}$$

-	+	+	$ x $
-	-	+	$ x-1 $

$x$

С учетом знаков и ОДЗ:  $y = \begin{cases} (-\infty; 0) - \text{не принадлежит ОДЗ} \\ \frac{-1}{x}, (0; 1) \\ (1; +\infty) - \text{не принадлежит ОДЗ} \end{cases}$





Ответ:  $k \in (-\infty; -1)$



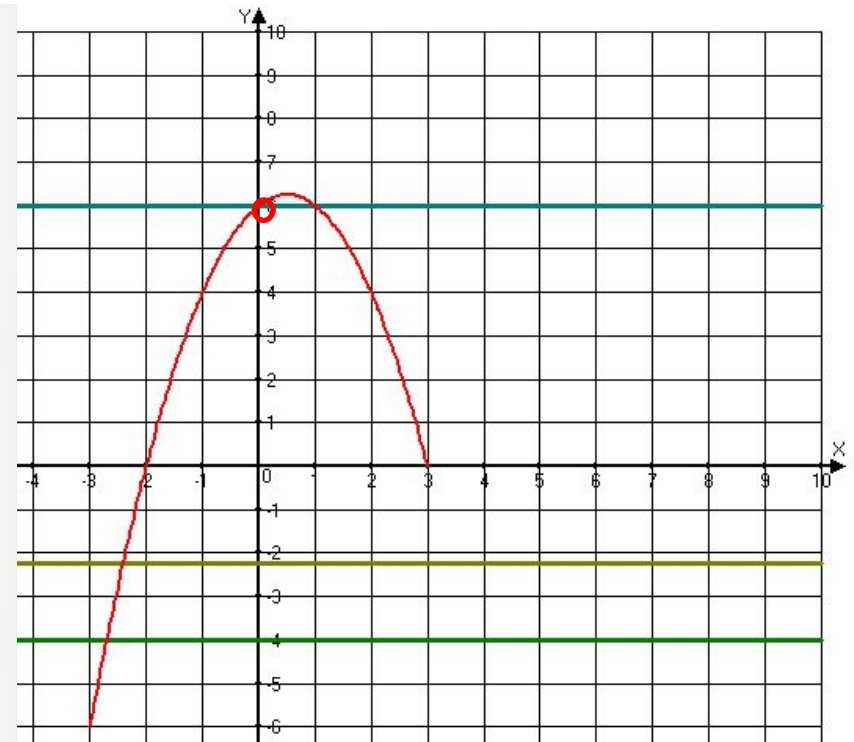
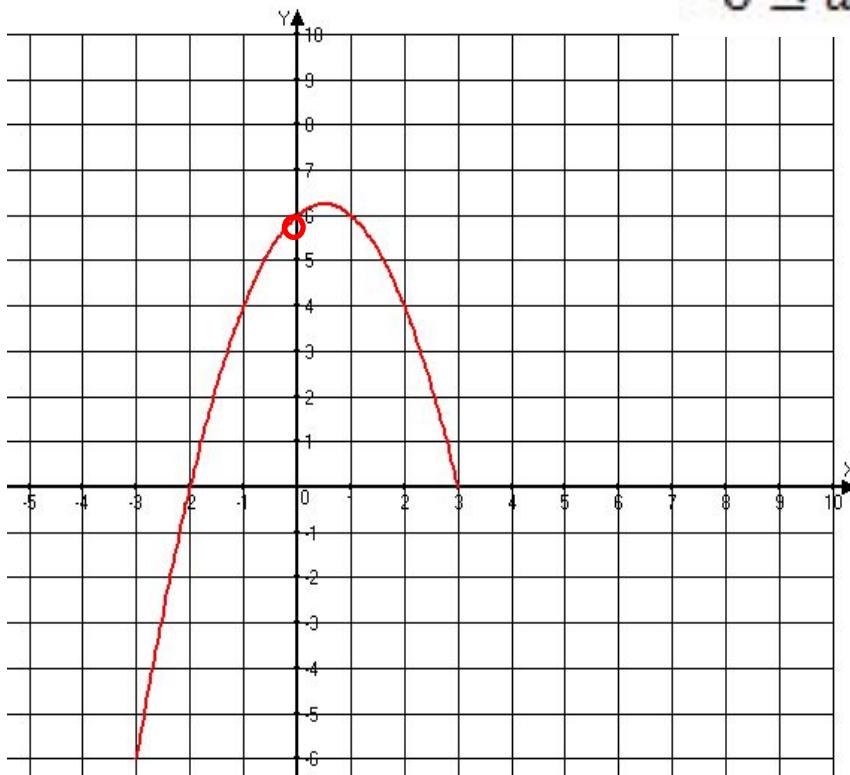
Постройте график функции  $y = (\sqrt{9 - x^2})^2 + \frac{x^2 - 3x}{x}$  и найдите, при каких значениях  $a$  прямая  $y=a$  имеет с ним ровно одну общую точку.

**Решение:**

Найдем область определения функции:  $9 - x^2 \geq 0, x \neq 0$  ( $x \in [-3; 0) \cup (0; 3]$ )

Таким образом, на области определения функция принимает вид:  $y = -x^2 + x + 6$

Прямая  $y=a$  имеет с графиком данной функции ровно одну точку при  $-6 \leq a < 0; a = 6; a = 6,25$



Ответ:  $-6 \leq a < 0; a = 6; a = 6,25$

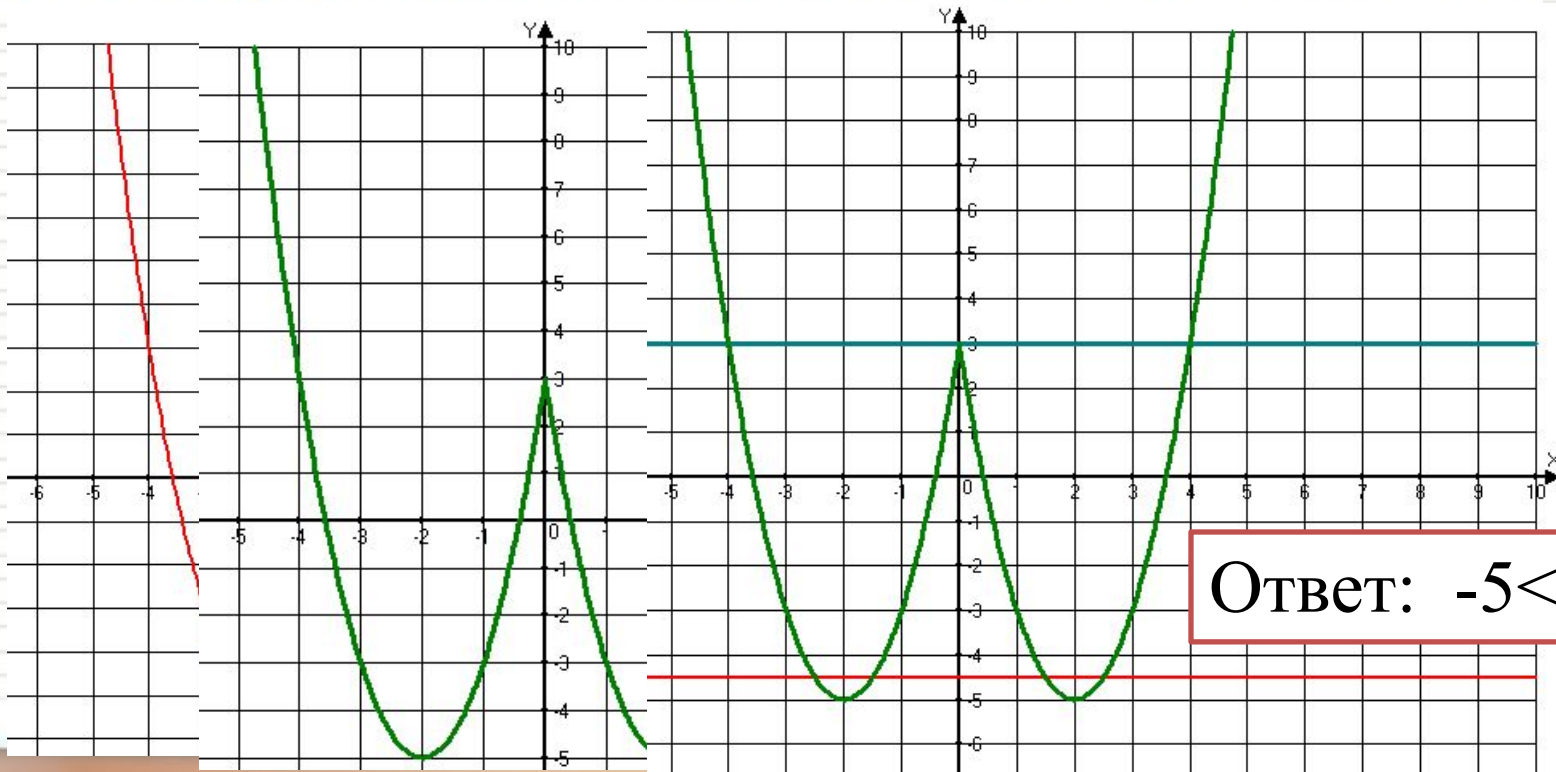
Постройте график функции  $y = 2x^2 - 8 \cdot |x| + 3$  и найдите, при каких значениях  $a$  прямая  $y=a$  имеет с ним более двух общих точек.

**Решение:**

Данная в условии задачи функция определена на всей числовой прямой и четная.

При  $x \geq 0$  график функции является параболой  $y = 2x^2 - 8x + 3$

При  $x < 0$  график функции является параболой  $y = 2x^2 + 8x + 3$



**Ответ:  $-5 < a \leq 3$**

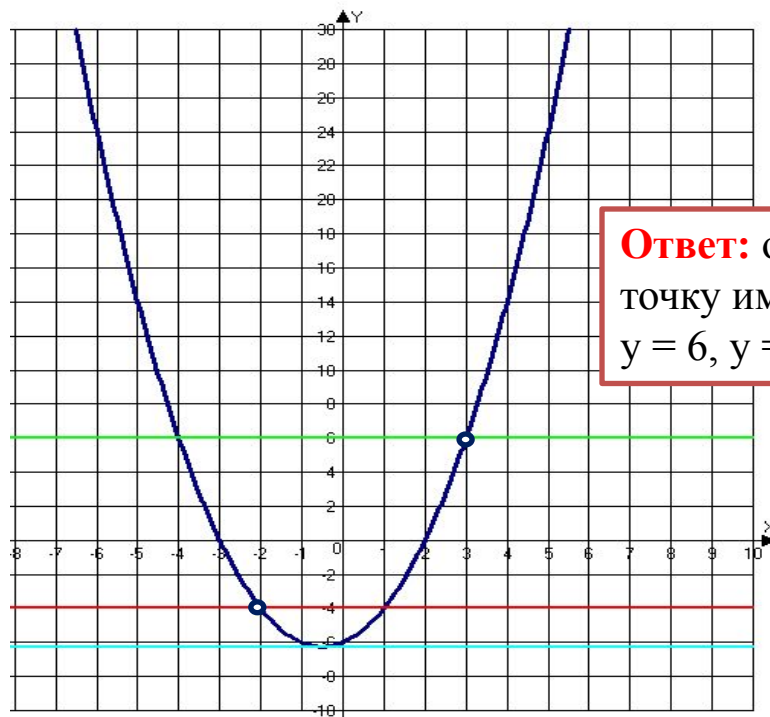
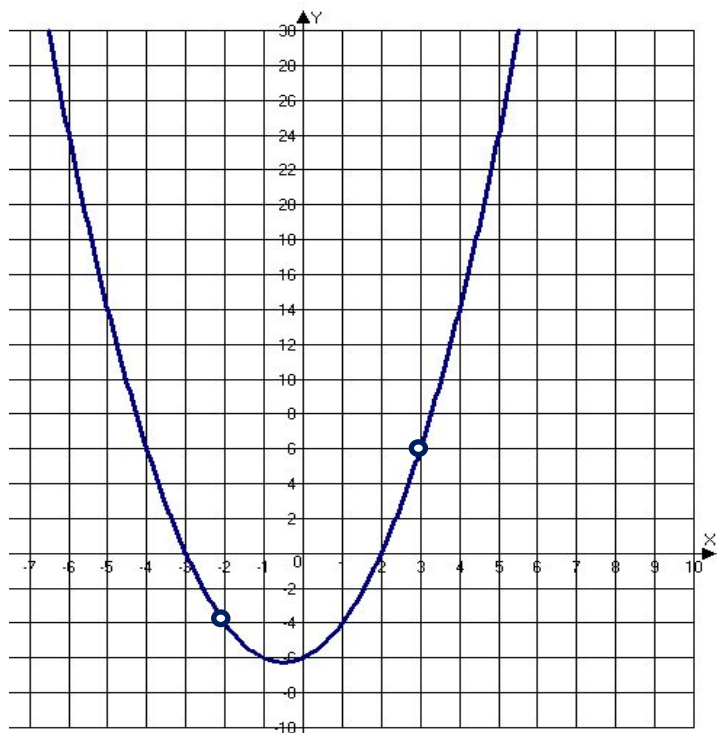
23

Постройте график функции  $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$  и определите, при каких значениях  $m$  прямая  $y = m$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

1. Данная функция дробно – рациональная и определена не для всех действительных чисел.
2. Область определения:  $x \neq 3$  и  $x \neq -2$
3. Теперь преобразуем функцию, разложив числитель на множители

$$y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x^2 - 9)(x^2 - 4)}{(x-3)(x+2)} = \frac{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}{(x-3)(x+2)} = (x+3)(x-2)$$

$y = m$  семейство прямых параллельных оси  $Ox$



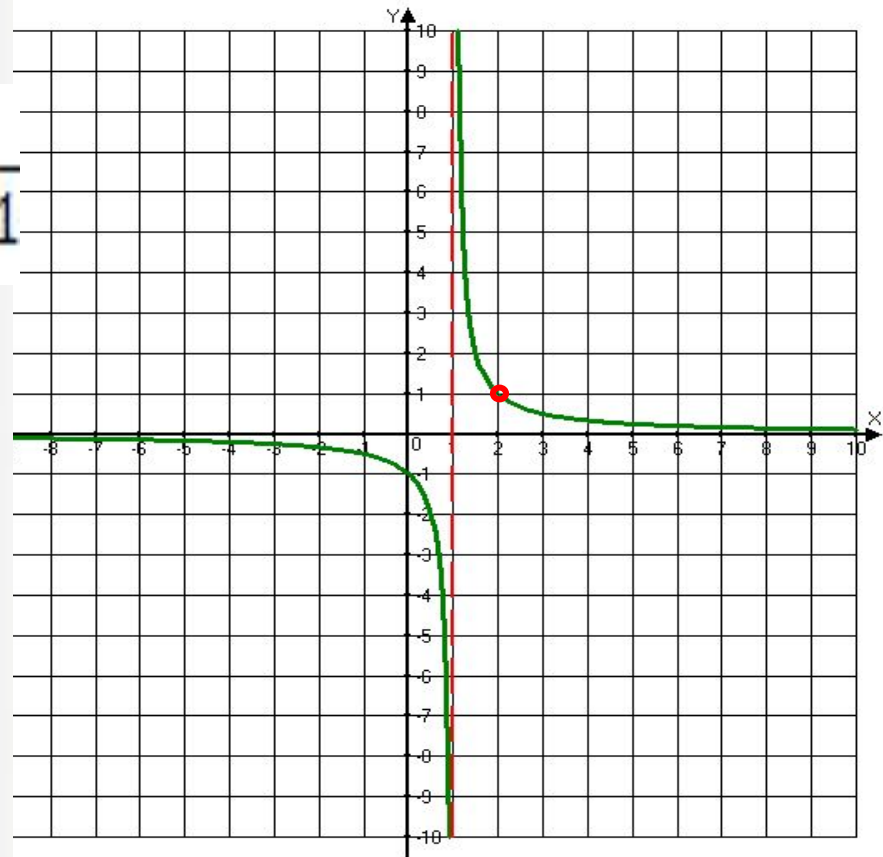
**Ответ:** одну общую точку имеют прямые:  $y = 6$ ,  $y = -4$  и  $y = -6,25$

**23.** Постройте график функции  $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$  и определите, при каких значениях параметра  $a$  прямая  $y = ax - 2$  имеет с графиком ровно одну общую точку.

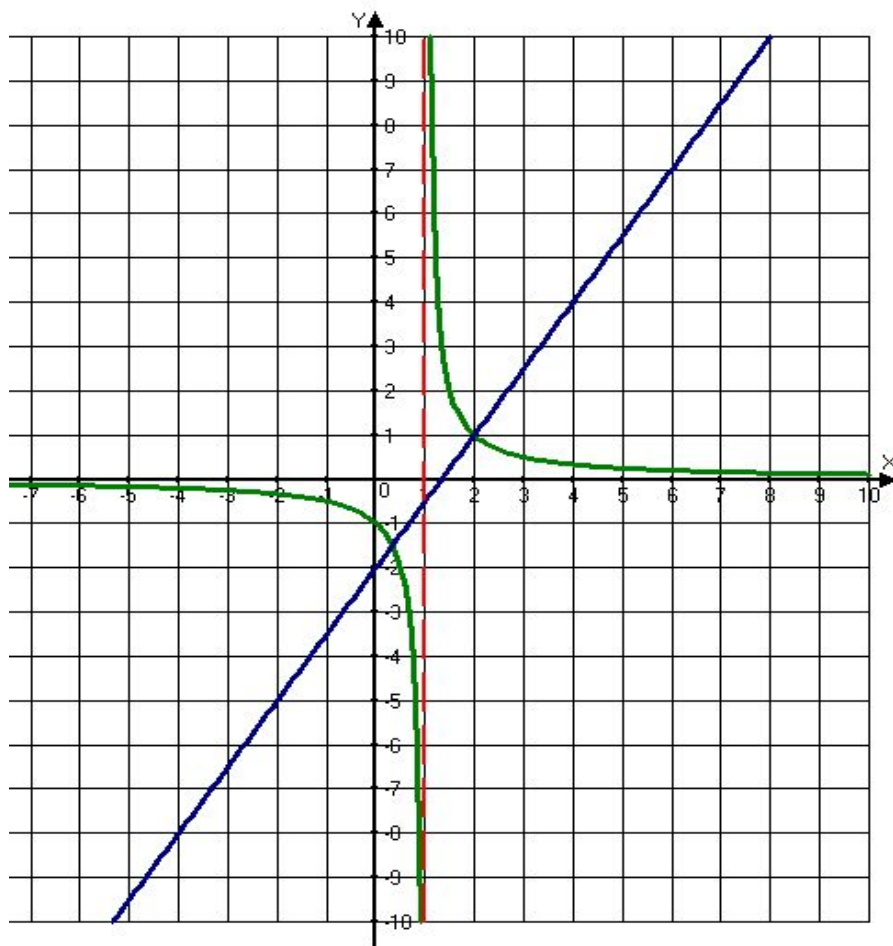
ОДЗ:  $x^2 - 3x + 2 \neq 0$ ,  $x \neq 1$ ,  $x \neq 2$

$$y = \frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-1}$$

Графиком данной функции является гипербола, 1 и 3 четвертей, смещенная на 1 вправо.



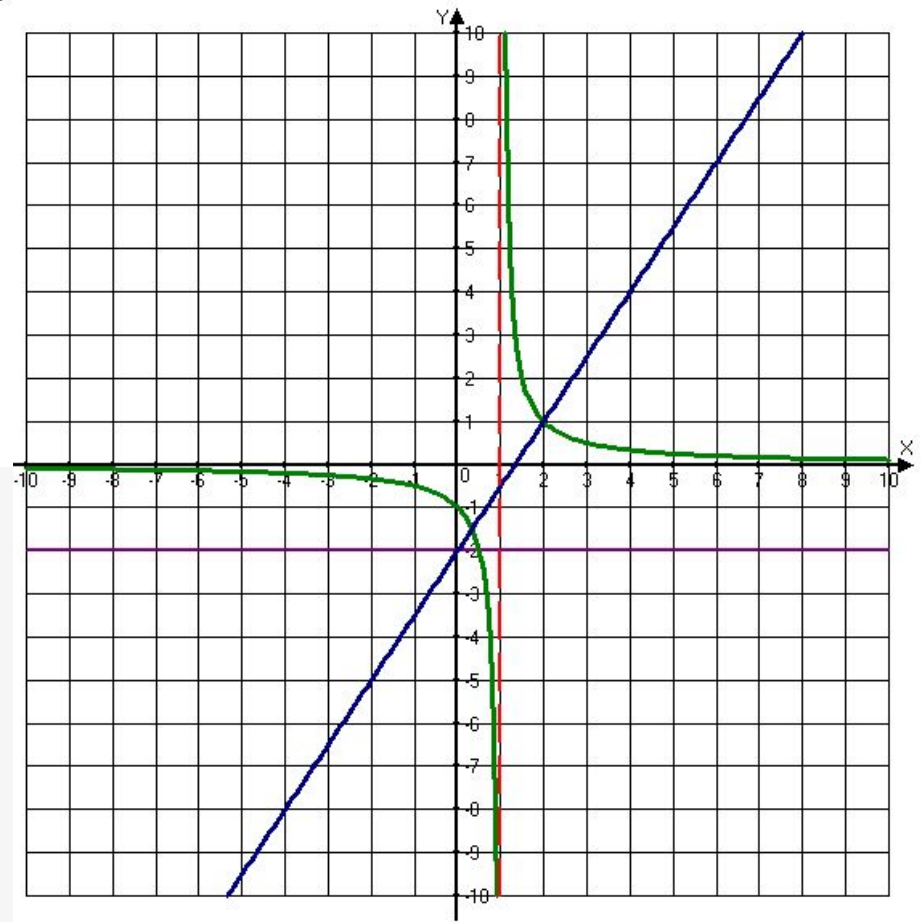




$$a = 1,5$$



$$a = 0$$



**23.** Постройте график функции  $y = \frac{(x+1)(x^2 - 4x + 3)}{x-1}$  и найдите все прямые, проходящие через начало координат, которые имеют с этим графиком ровно одну общую точку. Изобразите эти прямые и запишите их уравнения.

**23.** Найдите все значения  $k$ , при каждом из которых прямая  $y = kx$  имеет с графиком функции  $y = x^2 + 4$  ровно одну общую точку. Постройте этот график и все такие прямые.

