Решение заданий С5 ЕГЭ

Разработал учитель математики
МОУ «Лицей № 83» Приволжского района г. Казани
Чикрин Евгений Александрович

ВЫХОД ЕСТЬ

1. Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} |a|^{x-y} = log_2 x - 6, \\ x - log_2 x = y - 6 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

3. Найдите все значения a, при каждом из которых система
$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$$
не имеет решений.

4. Найдите значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений
$$\begin{cases} (1+3x^2)^a + (b^2-4b+5)^y = 2, \\ x^2y^2 + (b-2)xy + a^2 + 2a = 3 \end{cases}$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1} = (x^2-6x)^2, \\ x^2 + y = 6x \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

ПРИМЕР 1.

Найдите все значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} |a|^{x-y} = log_2 x - 6, \\ x - log_2 x = y - 6 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение. Перепишем систему в виде $\begin{cases} |a|^{x-y} = \log_2 x - 6, \\ x - y = \log_2 x - 6 \end{cases}$

Тогда сможем получить уравнение $|a|^{x-y} = x - y$ или,

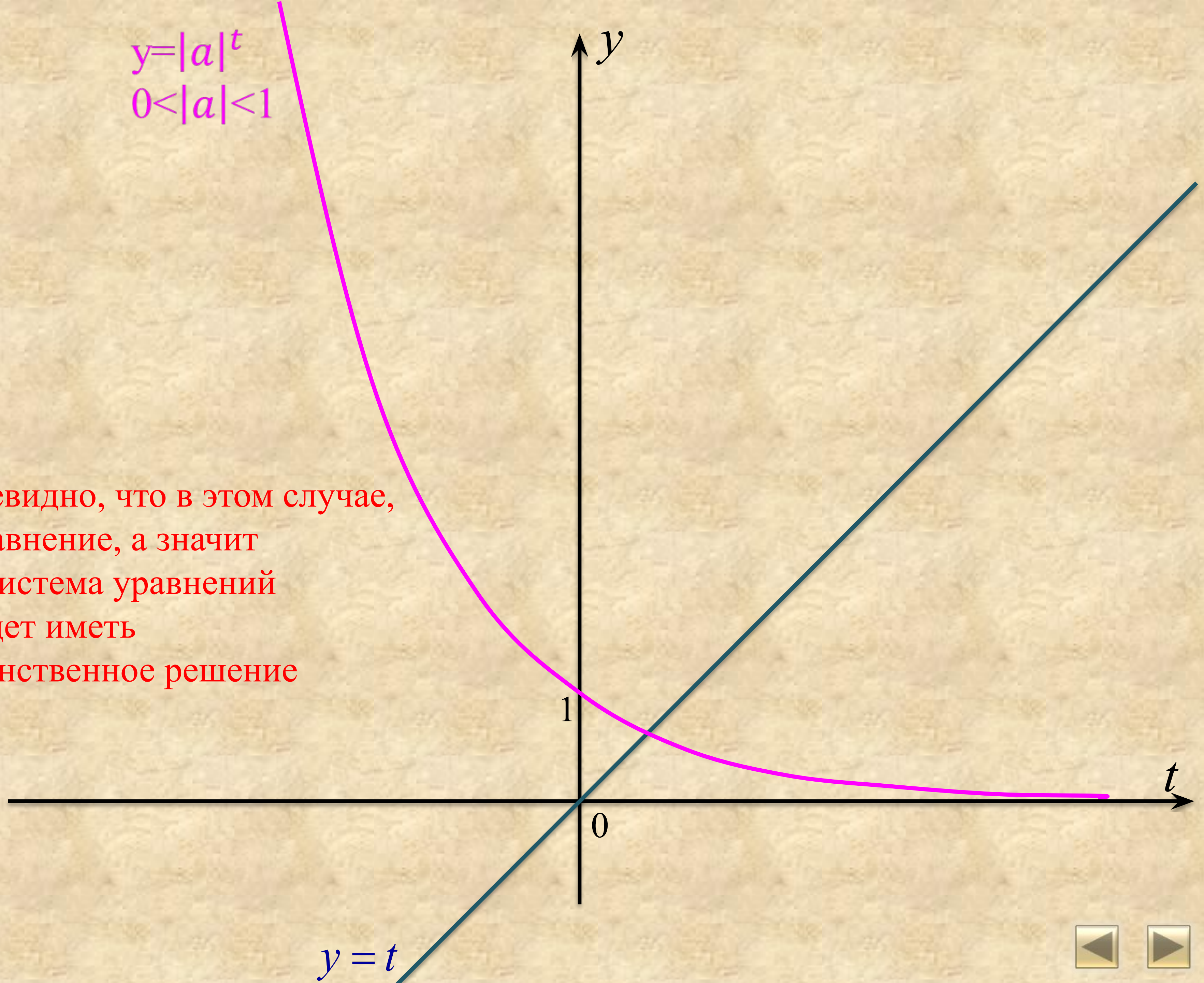
после замены $x - y = t,$ имеем $\left|a^t\right| = t.$

Так как x и y монотонно зависимы, то система будет иметь два решения тогда и только тогда, когда два корня имеет уравнение $|a|^t = t.$

Рассмотрим возможные варианты расположения графиков функций

$$y = |a|^t \text{ и } y = t$$

при различных значениях параметра a



Очевидно, что в этом случае, уравнение, а значит и система уравнений будет иметь единственное решение

При $|a| > 1$ возможны следующие варианты

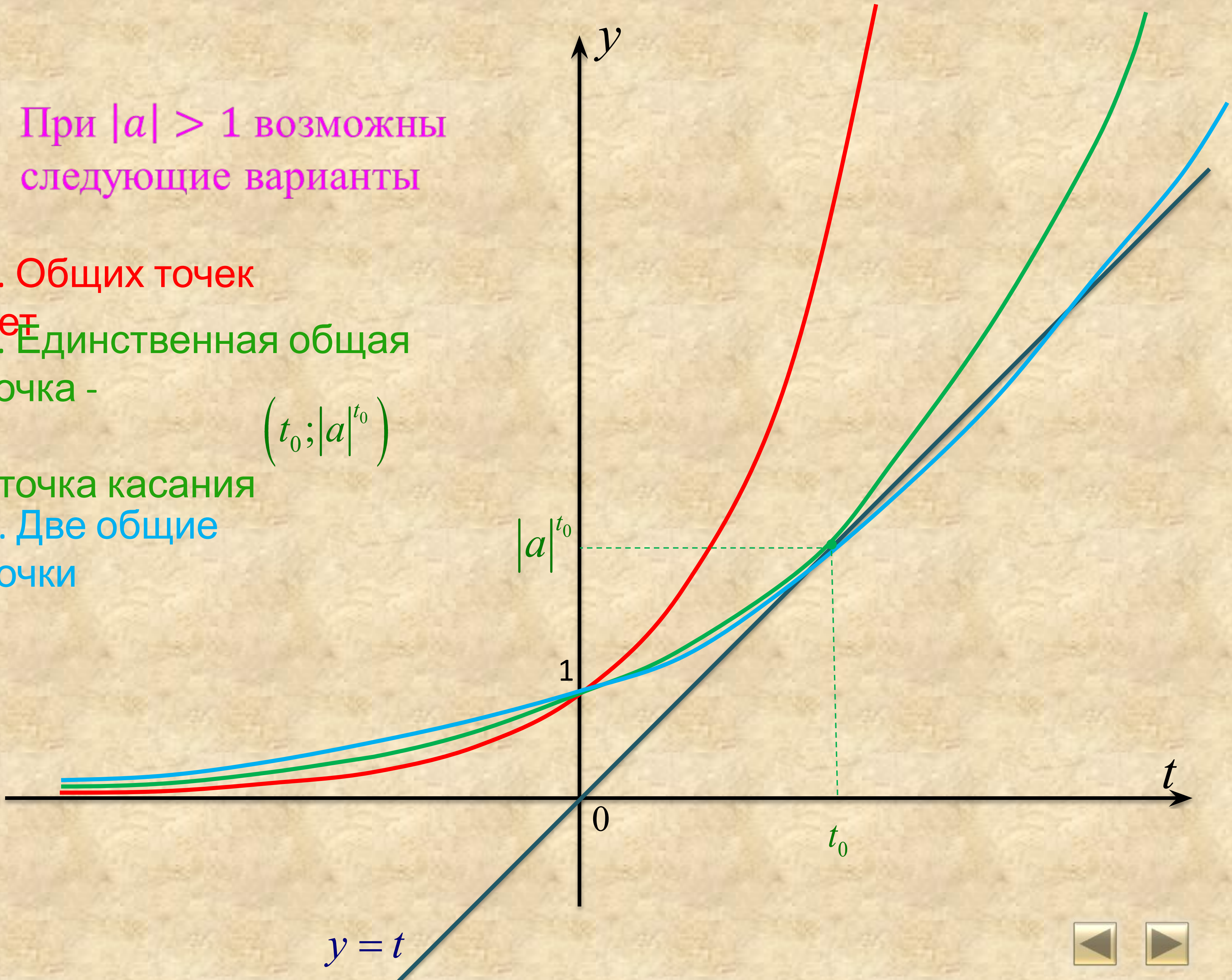
1. Общих точек нет

2. Единственная общая точка -

$\left(t_0; |a|^{t_0}\right)$

- точка касания

3. Две общие точки



Выясним при каком значении a прямая $y=t$ является касательной к графику функции $y=a^t$

Запишем общий вид уравнения касательной к графику функции $y=a^t$.

$$y = a^{t_0} + a^{t_0}\ln a\left(t - t_0\right)$$

Оно совпадет с уравнением прямой $y = t$ при условии, что

$$\begin{cases} a^{t_0} - a^{t_0}\ln a\cdot t_0 = 0, \\ a^{t_0}\ln a = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 1 - \ln a\cdot t_0 = 0, \\ a^{t_0} = \dfrac{1}{\ln a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_0 == \dfrac{1}{\ln a}, \\ a^{\frac{1}{\ln a}} = \dfrac{1}{\ln a} \end{cases}$$

Прологарифмируем второе уравнение системы по основанию a

$$\ln\left(a^{\frac{1}{\ln a}}\right) = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right),\ 1 = \ln\left(\frac{1}{\ln a}\right),$$

$$\frac{1}{\ln a} = e,\ \ln a = \frac{1}{e},\ a = e^{\frac{1}{e}}$$

Таким образом при $1 < |a| < e^{\frac{1}{e}}$

наши графики будут иметь две точки пересечения, а значит система уравнений будет иметь ровно два решения.

$$\textit{Ответ}: \left(-e^{\frac{1}{e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$$

ВЫХОД ЕСТЬ

ПРИМЕР 2.

Найдите все значения параметра a,при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Решение. Заметим, что оба уравнения системы являются четными относительно x.

Это означает, что, если пара чисел $(x_0; y_0)$ является решением исходной системы, то решением системы будет также и пара чисел чисел $(-x_0; y_0)$.

Следовательно система уравнений может иметь единственное решение только в случае, когда решением является значение $x = 0$.

Рассмотрим возможные варианты.

1) $x = 0$; $y = -1$.

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$3\cdot 2^0 + 4 = -3 + 3a,\ 3a = 10;\ a = \frac{10}{3}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \text{или} \begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y - 5y^2 + 11, \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что решением данной системы помимо $(0; -1)$ являются еще пары чисел $(-1; 0)$и $(1; 0)$, т.е. найденное значение параметра не удовлетворяет решению задачи.

2) $x = 0$; $y = 1$.

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$3\cdot 2^0 + 4 = 3 + 3a,\ 3a = 4;\ a = \frac{4}{3}.$$

Система примет вид

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5\cdot\left(|x| - x^2\right) = 3y, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Так как $0 \le |x| \le 1$ и $0 \le |y| \le 1$, то $2^x \ge 1, \left|x - x^2\right| \ge 0,$ следовательно

$3\cdot 2^{|x|} + 5\cdot\left(|x| - x^2\right) \ge 3,$ а $3y \le 3.$

Приходим к выводу, что $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|} + 5\cdot\left(|x| - x^2\right) = 3, \\ 3y = 3 \end{cases}$

Это означает, что $x = 0$; $y = 1$, а значит исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ: $a = \frac{4}{3}$

ВЫХОД ЕСТЬ

ПРИМЕР 3

Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(x-a)(ax-2a-3)\ge 0,\\ ax\ge 4\end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. 1) Пусть $a<0$.

Тогда систему можно переписать

в виде $\begin{cases}x\le \dfrac{4}{a},\\ (x-a)(ax-2a-3)\ge 0\end{cases}$

Рассмотрим второе неравенство системы.

$(x-a)(ax-2a-3)=0$ при $x=a$ или $x=\dfrac{2a+3}{a}$

Выясним, как располагаются относительно друг друга найденные значения в зависимости от параметра.

$$\begin{cases} x \le \dfrac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \ge 0 \end{cases}$$

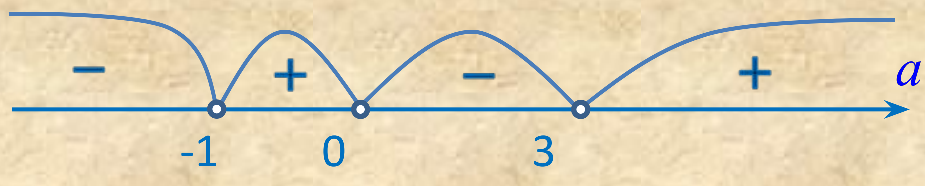
Определим знаки разности $a - \dfrac{2a+3}{a}$.

Для этого найдем корни уравнения $a - \dfrac{2a+3}{a} = 0$

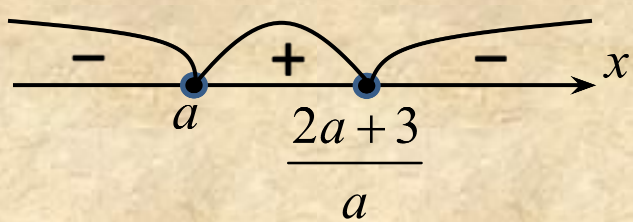
$a^2 - 2a - 3 = 0;$ $\left[\begin{array}{l} a = -1, \\ a = 3, \end{array}\right.$

Нанесем найденные числа на числовую прямую и определим знаки выражения

$a - \dfrac{2a+3}{a}$.



а) При $a < -1$



Решением неравенства

$(x-a)(ax-2a-3) \ge 0$

служит промежуток $\left[a; \dfrac{2a+3}{a}\right]$

Система неравенств не будет иметь решений в случае, если

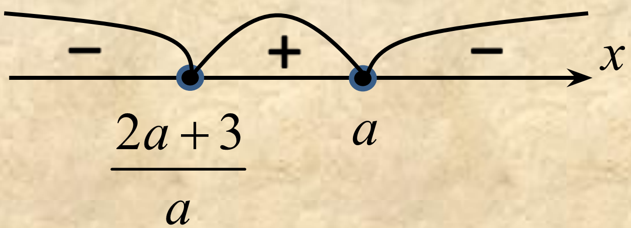
$\dfrac{4}{a} < a$, т.е. $4 > a^2$, $|a| < 2$, $-2 < a < -1$

$$\begin{cases} x \le \dfrac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \ge 0 \end{cases}$$

б) При $a = -1$ получаем систему $\begin{cases} x \le -4, \\ (x+1)^2 \le 0 \end{cases}$

которая также не имеет решений.

в) При $-1 < a < 0$



В этом случае решением неравенства

$$(x-a)(ax-2a-3) \ge 0$$

служит промежуток $\left[\dfrac{2a+3}{a}; a\right]$

Система неравенств не будет иметь решений в случае, если

$$\frac{4}{a} < \frac{2a+3}{a}, \text{ а значит } 4 > 2a+3,\ 2a < 1,\ a < \frac{1}{2},$$

$(-1;0)$ удовлетворяет условию задачи.

Таким образом, при $-2 < a < 0$ система неравенств не имеет решений.

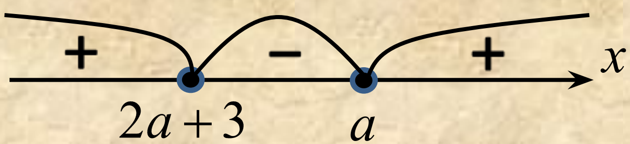
2) Пусть $a > 0$

Тогда систему можно переписать

в виде $\begin{cases} x \ge \dfrac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \ge 0 \end{cases}$

Решим второе неравенство системы.

а) При $0 < a < 3$



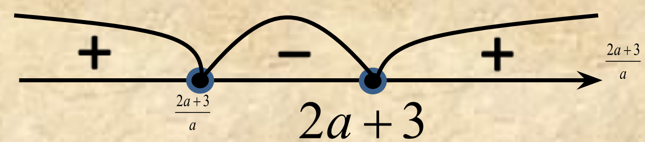
$x \in \left(-\infty; \dfrac{2a+3}{a}\right] \cup [a; +\infty)$

б) При $a = 3$

$\begin{cases} x \ge \dfrac{4}{3}, \\ 3(x-3)^2 \ge 0 \end{cases}$

$x \in \left(\dfrac{4}{3}; +\infty\right)$

в) При $a > 3$



$x \in (-\infty; a] \cup \left[\dfrac{2a+3}{a}; +\infty\right)$

Нетрудно заметить, что независимо от того какие значения будет принимать выражение $\dfrac{4}{a}$, в каждом из этих случаев система неравенств будет иметь решения.

Ответ: $a \in (-2; 0)$

ВЫХОД ЕСТЬ

ПРИМЕР 4. Найдите значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases}(1+3x^2)^a+(b^2-4b+5)^y=2,\\ x^2y^2+(b-2)xy+a^2+2a=3\end{cases}$$

Решение. Рассмотрим второе уравнение системы.

Введем новую переменную $t=xy$.

Получаем квадратное уравнение

$$t^2+(b-2)t+a^2+2a-3=0$$

Так как система должна иметь решения при любом значении параметра b, то дискриминант полученного уравнения должен быть неотрицательным также при любом значении b.

$D=(b-2)^2-4(a^2+2a-3).$ Если $b=2$, то $D=-4(a^2+2a-3).$

$$a^2+2a-3\le 0,\ (a+3)(a-1)\le 0,\ -3\le a\le 1$$

Кроме того, при $b = 2$ первое уравнение системы приобретает вид

$$(1+3(1+x^2)^a 3+1) = 21 \quad + \quad x^2 \; a =$$

Это равенство возможно лишь в двух случаях,

если $x = 0$ или $a = 0$.

При $x = 0$ второе уравнение перепишется в виде

откуда $a^2 + 2a - 3 = 0$, или $a = -3$, или $a = 1$.

При $a = 0$ первое уравнение системы примет вид

$$(b^2 - 4b + 5)^y = 1.$$

Учитывая, что $b^2 - 4b + 5 = (b-2)^2 + 1 \ge 1$, приходим к выводу, что

это равенство будет выполняться при любых b только в случае $y = 0$.

Но тогда и в этом случае мы приходим к уравнению $a^2 + 2a - 3 = 0$,

из чего делаем вывод, что не существует других значений

параметра a, удовлетворяющих условию задачи.

Ответ: $a = -3$; $a = 1$

ПРИМЕР 5. Найдите все значения параметра a, при ко торых система

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1} = \left(x^2 - 6x\right)^2, \\ x^2 + y = 6x \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1} = \left(6x - x^2\right)^2, \\ y = 6x - x^2 \end{cases}$$

В результате получаем уравнение $\log_a \sqrt{y+1} = y^2$, откуда

$\sqrt{y+1} = a^{y^2}$ или $y+1 = a^{2y^2}$

Рассмотрим различные варианты расположения графиков функций

$z = y+1$ и $z = a^{2y^2}$ в зависимости от различных значений параметра a.

В этом случае уравнение будет иметь единственный корень $y = 0$

Подставим это значение во второе уравнение системы.

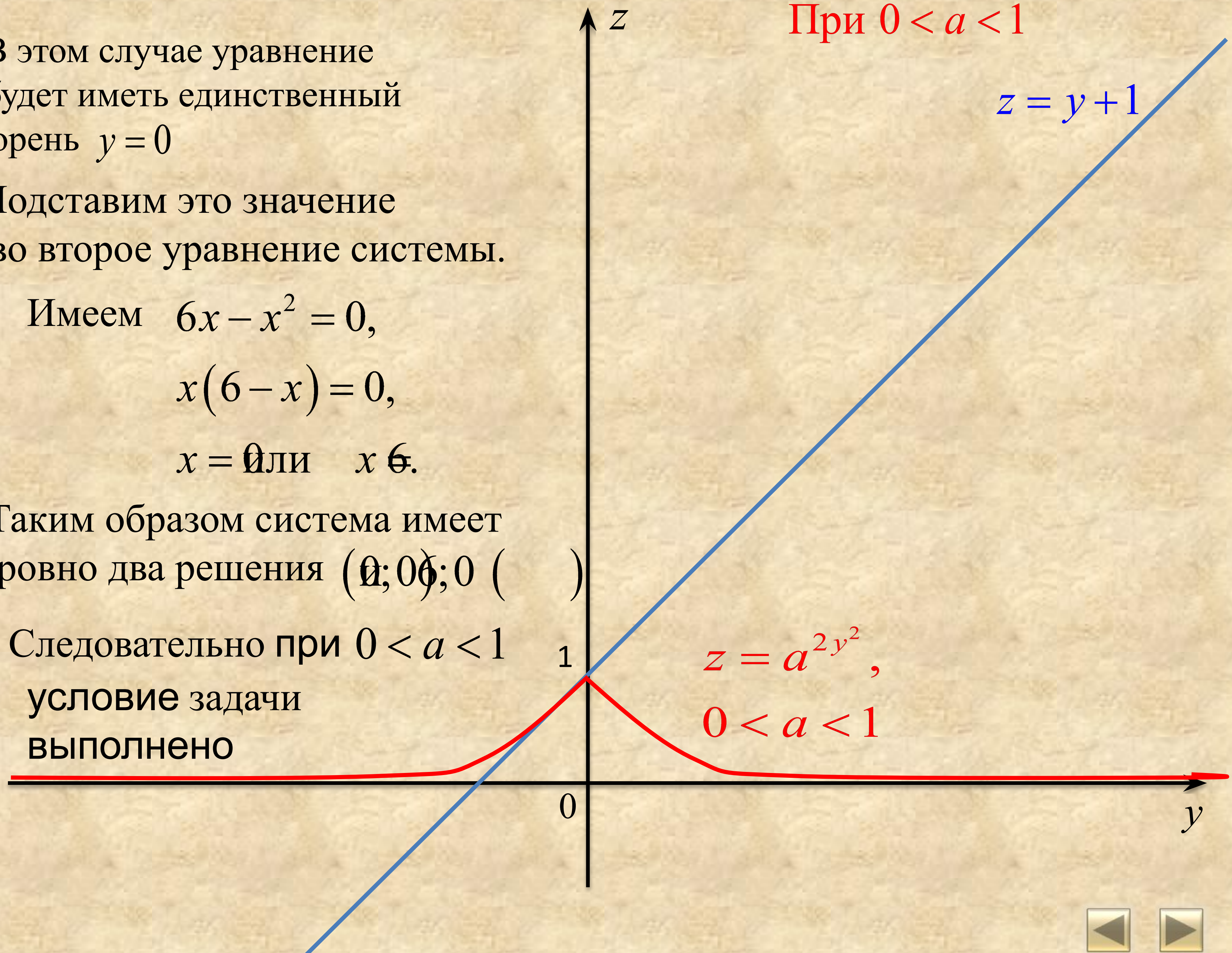
Имеем $6x - x^2 = 0,$

$x(6 - x) = 0,$

$x = 0$ или $x = 6.$

Таким образом система имеет ровно два решения $(0;0)$ и $(6;0)$

Следовательно при $0 < a < 1$ условие задачи выполнено



При $a > 1$

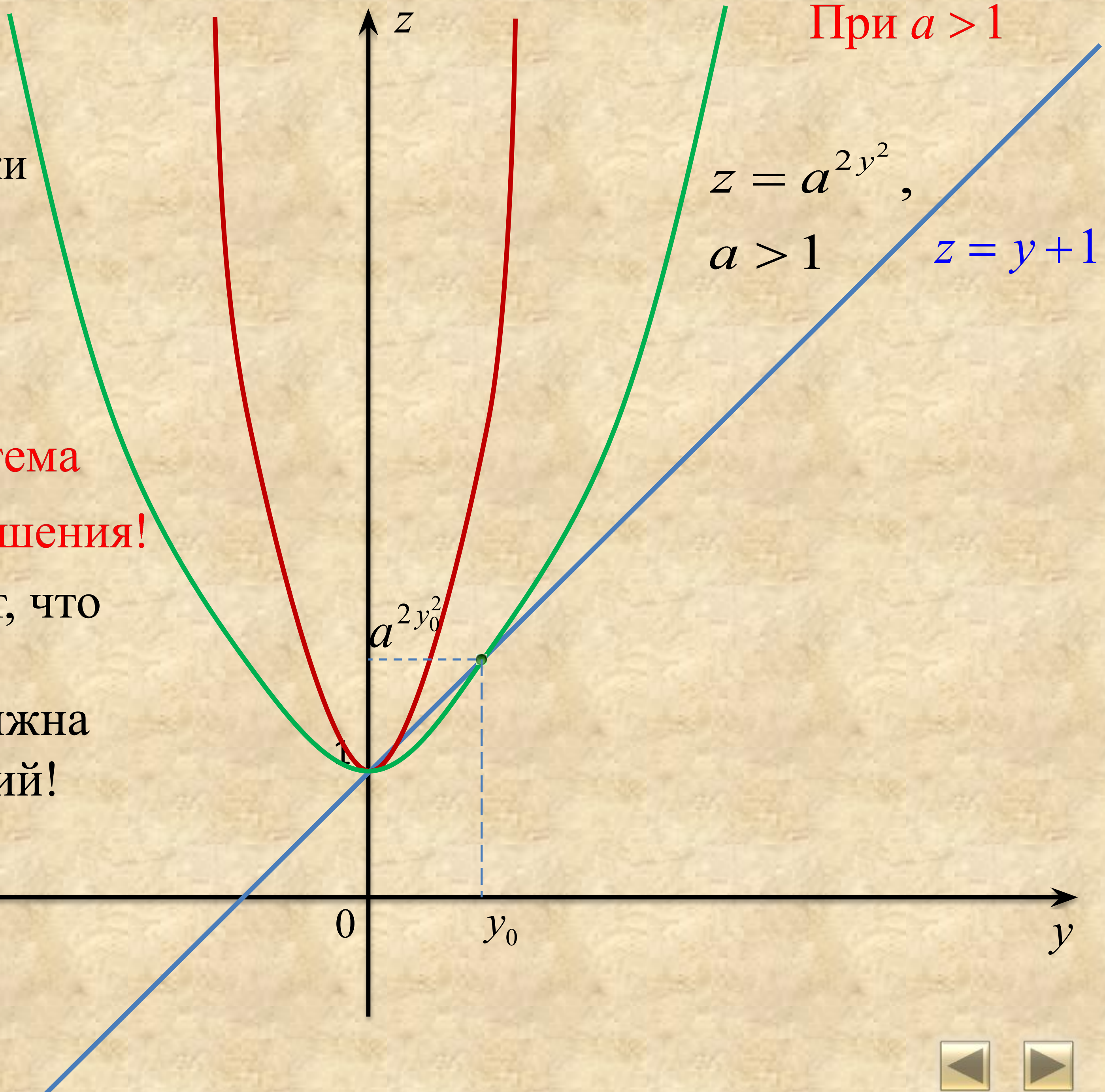
Как видим, графики
 имеют две
общие точки
с координатами

$0 \; и \; y_0$

Но при $y = 0$ система

уже имеет два решения!

Это означает, что
при $y = y_0$
система не должна
иметь решений!



Мы помним, что $x^2 + y = 6x$ или, по-другому,

$$x^2 - 6x + y = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно x,

следовательно оно не будет иметь корней,
если его дискриминант меньше нуля.

$D = 9 - y$; при $9 - y < 0$ $\quad y >$ 9

Выясним при каком значении параметра $y = 9$

Так как $y + 1 = a^{2y^2}$, то, подставив 9, получим

$10 = a^{162}$ или 10 $a = \sqrt[162]{}$

Таким образом при $1 < a < \sqrt[162]{10}$ будет выполняться условие $y > 9$, следовательно исходная система уравненийтакже будет иметь только два решения.

Ответ: $(0;1) \cup \left(1; \sqrt[162]{10}\right)$

Используемая литература и ссылки на рисунки

Литература

ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 1)

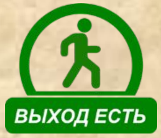
ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 2)

ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Ященко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 3)

Математика. Диагностические работы в формате ЕГЭ., М.: МЦНМО, 2011 - 36 с.

Математика. Всё для ЕГЭ 2011. Часть 1. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. (2010, 221с.)

Математика. Подготовка к ЕГЭ- 2011. Под ре… Ф. Ф., Кулабухова С.Ю. (2010, 416с.)



http://metro.zap-it.ru/img/logo_mega.png

http://toprekord.ru/proverka/img/button_enter.gif

http://www.egecarpet.com/files/billeder/Pictures%202%20col/ege_building.jpg

http://t3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRA59ONv8oQtDQXpiWg00d_0AMw7BO1t2U9Ao8qU6laCQ-vKLlzRg