

# **Решение заданий С5 ЕГЭ**

**ege**

**Разработал учитель  
математики  
МОУ «Лицей № 83»  
Приволжского района г.  
Казани  
Чикрин Евгений  
Александрович**



**ВЫХОД ЕСТЬ**



1. Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система  
$$\begin{cases} |a|^{x-y} = \log_2 x - 6, \\ x - \log_2 x = y - 6 \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.



Найдите все значения параметра , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$



Найдите все значения , при каждом из которых система

не имеет решений.

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$$



4. Найдите значения параметра  $a$ , для каждого из которых при любом значении параметра  $b$  имеет хотя бы одно решение

система уравнений

$$\begin{cases} (1 + 3x^2)^a + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2 y^2 + (b - 2)xy + a^2 + 2a = 3 \end{cases}$$



Найдите все значения параметра , при которых система

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1} = (x^2 - 6x)^2, \\ x^2 + y = 6x \end{cases}$$
 имеет ровно два решения.



## ПРИМЕР 1.

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} |a|^{x-y} = \log_2 x - 6, \\ x - \log_2 x = y - 6 \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

**Решение.** Перепишем систему в виде 
$$\begin{cases} |a|^{x-y} = \log_2 x - 6, \\ x - y = \log_2 x - 6 \end{cases}$$

Тогда сможем получить уравнение  $|a|^{x-y} = x - y$  или,

после замены  $x - y = t$ , имеем  $|a^t| = t$ .

Так как  $x$  и  $y$  монотонно зависимы, то система будет иметь два решения тогда и только тогда, когда два корня имеет уравнение  $|a^t| = t$ .



Рассмотрим возможные варианты  
расположения графиков функций

$$y = |a|^t \text{ и } y = t$$

при различных значениях параметра  $a$



$$y = |a|^t$$
$$0 < |a| < 1$$

$y$

$t$

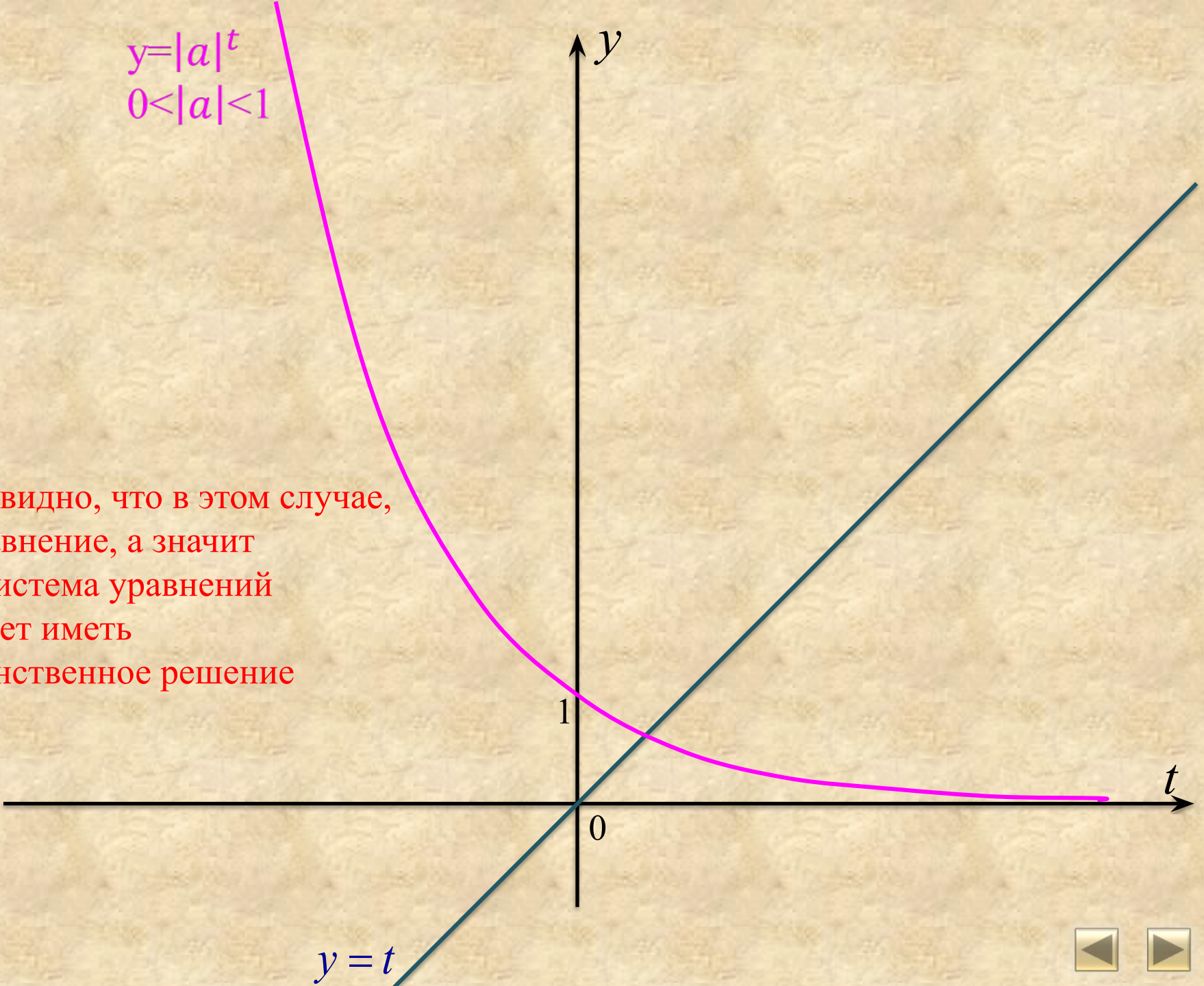
1

0

$$y = t$$



Очевидно, что в этом случае,  
уравнение, а значит  
и система уравнений  
будет иметь  
единственное решение



При  $|a| > 1$  возможны следующие варианты

1. Общих точек

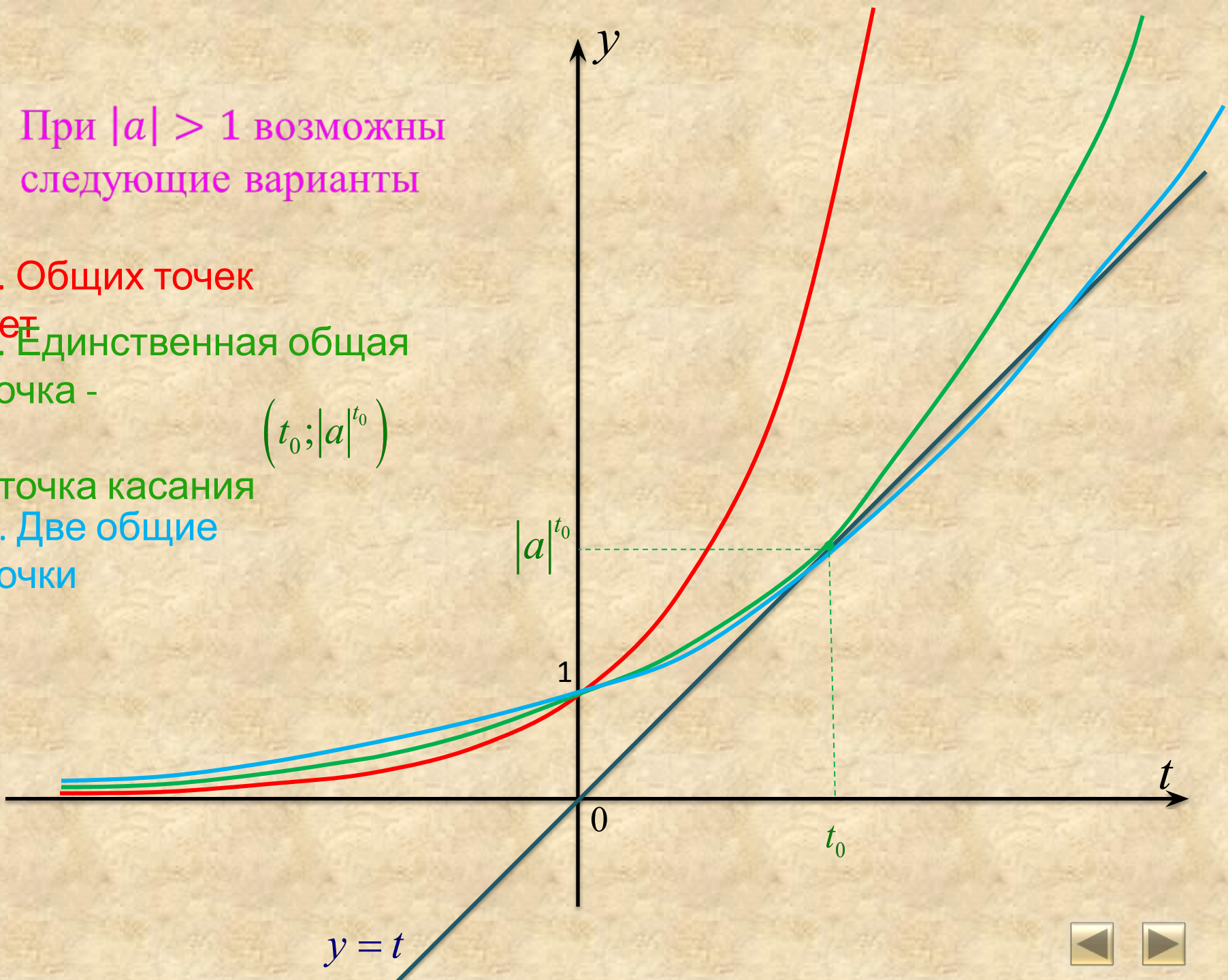
нет

2. Единственная общая точка -

$$(t_0; |a|^{t_0})$$

- точка касания

3. Две общие точки



Выясним при каком значении  $a$  прямая  $y=t$  является касательной к графику функции  $y=a^t$

Запишем общий вид уравнения касательной к графику функции  $y=a^t$ .

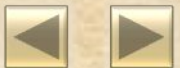
$$y = a^{t_0} + a^{t_0} \ln a (t - t_0)$$

Оно совпадет с уравнением прямой  $y = t$  при условии, что

$$\begin{cases} a^{t_0} - a^{t_0} \ln a \cdot t_0 = 0, \\ a^{t_0} \ln a = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 1 - \ln a \cdot t_0 = 0, \\ a^{t_0} = \frac{1}{\ln a} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = \frac{1}{\ln a}, \\ a^{\frac{1}{\ln a}} = \frac{1}{\ln a} \end{cases} \begin{array}{l} \text{Прологарифмируем второе уравнение системы} \\ \text{по основанию } a \\ \ln \left( a^{\frac{1}{\ln a}} \right) = \ln \left( \frac{1}{\ln a} \right), \quad 1 = \ln \left( \frac{1}{\ln a} \right), \end{array}$$

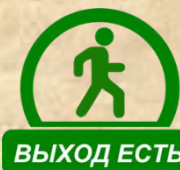
$$\frac{1}{\ln a} = e, \quad \ln a = \frac{1}{e}, \quad a = e^{\frac{1}{e}}$$



Таким образом при  $1 < |a| < e^{\frac{1}{e}}$

наши графики будут иметь  
две точки пересечения, а значит  
система уравнений будет иметь  
ровно два решения.

*Ответ:*  $\left(-e^{\frac{1}{e}}; -1\right) \cup \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$





## ПРИМЕР 2.

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых имеет единственное решение система уравнений

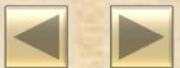
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

**Решение.** Заметим, что оба уравнения системы являются четными относительно  $x$ .

Это означает, что, если пара чисел  $(x_0; y_0)$  является решением исходной системы, то решением системы будет также и пара чисел  $(-x_0; y_0)$ .

Следовательно система уравнений может иметь единственное решение только в случае, когда решением является значение  $x = 0$ .

Рассмотрим возможные варианты.



1)  $x = 0; y = -1.$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

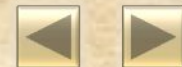
Из первого уравнения системы имеем

$$3 \cdot 2^0 + 4 = -3 + 3a, \quad 3a = 10; \quad a = \frac{10}{3}.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 10, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| = 3y - 5y^2 + 11, \\ x^2 = 1 - y^2 \end{cases}$$

Нетрудно заметить, что решением данной системы помимо  $(0; -1)$  являются еще пары чисел  $(-1; 0)$  и  $(1; 0)$ , т.е. найденное значение параметра не удовлетворяет решению задачи.



$$2) x = 0; y = 1.$$

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 3a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$3 \cdot 2^0 + 4 = 3 + 3a, \quad 3a = 4; \quad a = \frac{4}{3}.$$

Система примет вид

$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5|x| + 4 = 3y + 5x^2 + 4, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot (|x| - x^2) = 3y, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Так как  $0 \leq |x| \leq 1$  и  $0 \leq |y| \leq 1$ , то  $2^{|x|} \geq 1$ ,  $|x - x^2| \geq 0$ , следовательно  $3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot (|x| - x^2) \geq 3$ , а  $3y \leq 3$ .

Приходим к выводу, что 
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^{|x|} + 5 \cdot (|x| - x^2) = 3, \\ 3y = 3 \end{cases}$$

Это означает, что  $x = 0; y = 1$ , а значит исходная система уравнений имеет единственное решение.

Ответ:  $a = \frac{4}{3}$



### ПРИМЕР 3

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases} \quad \text{не имеет решений.}$$

Решение. Пусть  $a < 0$

Тогда систему можно переписать

в виде 
$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \geq 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе неравенство системы.

$$(x-a)(ax-2a-3) = 0 \quad \text{или} \quad x = a \quad x = \frac{2a+3}{a}$$

Выясним, как располагаются относительно друг друга найденные значения в зависимости от параметра.



$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \geq 0 \end{cases}$$

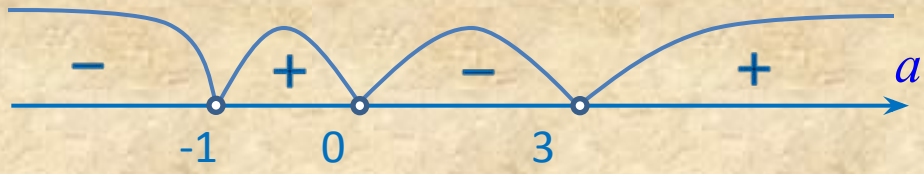
Определим знаки разности  $a - \frac{2a+3}{a}$ .

Для этого найдем корни уравнения  $a - \frac{2a+3}{a} = 0$

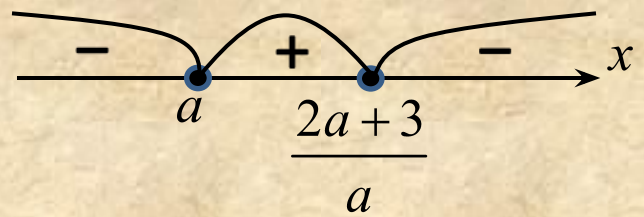
$$a^2 - 2a - 3 = 0; \begin{cases} a = -1, \\ a = 3, \end{cases}$$

Нанесем найденные числа на числовую прямую и определим знаки выражения

$$a - \frac{2a+3}{a}$$



а) При  $a < -1$



Решением неравенства

$$(x-a)(ax-2a-3) \geq 0$$

служит промежуток  $\left[ a; \frac{2a+3}{a} \right]$

Система неравенств не будет иметь решений в случае, если

$$\frac{4}{a} < a \text{ т.е. } a^2 < 4, \quad |a| < 2, \quad -2 < a < -1$$



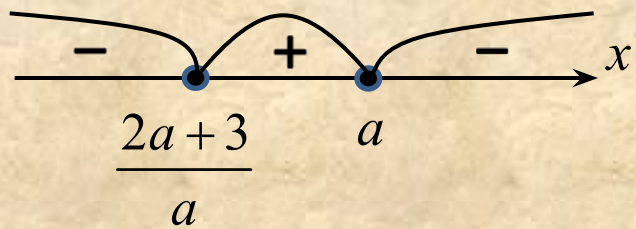
$$\begin{cases} x \leq \frac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \geq 0 \end{cases}$$

б) При  $a = -1$  получаем систему

$$\begin{cases} x \leq -4, \\ (x+1)^2 \leq 0 \end{cases}$$

которая также не имеет решений.

в) При  $-1 < a < 0$



В этом случае решением неравенства

$$(x-a)(ax-2a-3) \geq 0$$

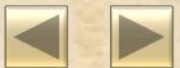
служит промежуток  $\left[ \frac{2a+3}{a}; a \right]$

Система неравенств не будет иметь решений в случае, если

$$\frac{4}{a} < \frac{2a+3}{a} \text{ а значит } 4 < 2a+3, 2a < 1, a < \frac{1}{2},$$

удовлетворяет условию задачи.

**Таким образом, при  $-2 < a < 0$  система неравенств не имеет решений.**



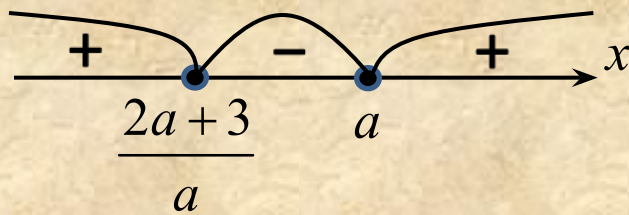
Пусть  $a > 0$

Тогда систему можно переписать

в виде 
$$\begin{cases} x \geq \frac{4}{a}, \\ (x-a)(ax-2a-3) \geq 0 \end{cases}$$

Решим второе неравенство системы.

а) При  $0 < a < 3$



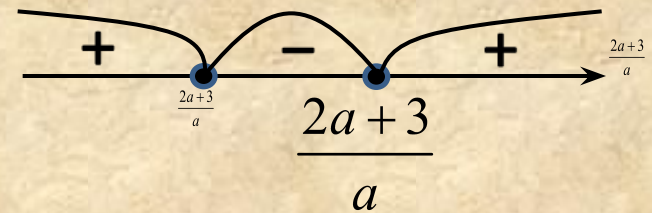
$$x \in \left(-\infty; \frac{2a+3}{a}\right] \cup [a; +\infty)$$

б) При  $a = 3$

$$\begin{cases} x \geq \frac{4}{3}, \\ 3(x-3)^2 \geq 0 \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{4}{3}; +\infty\right)$$

в) При  $a > 3$



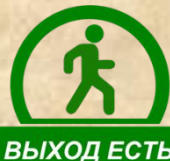
$$x \in (-\infty; a] \cup \left[\frac{2a+3}{a}; +\infty\right)$$

Нетрудно заметить, что независимо от того какие значения будет

принимать выражение  $\frac{4}{a}$ , в каждом из этих случаев

система неравенств будет иметь решения.

Ответ:  $a \in (-2; 0)$



#### ПРИМЕР 4.

Найдите значения параметра  $a$ , для каждого из которых при любом значении параметра  $b$  имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} (1 + 3x^2)^a + (b^2 - 4b + 5)^y = 2, \\ x^2y^2 + (b - 2)xy + a^2 + 2a = 3 \end{cases}$$

**Решение.** Рассмотрим второе уравнение системы.

Введем новую переменную  $t = xy$ .

Получаем квадратное уравнение

$$t^2 + (b - 2)t + a^2 + 2a - 3 = 0$$

Так как система должна иметь решения при любом значении параметра  $b$ , то дискриминант полученного уравнения должен быть неотрицательным также при любом значении  $b$ .

$$D = (b - 2)^2 - 4(a^2 + 2a - 3). \quad \text{Если } b = 2, \text{ то } D = -4(a^2 + 2a - 3).$$

$$a^2 + 2a - 3 \leq 0, \quad (a + 3)(a - 1) \leq 0, \quad -3 \leq a \leq 1$$





Кроме того, при  $b = 2$  первое уравнение системы приобретает вид

$$(1 + 3(x^2)^3 + 1) = 21 + x^{2a} =$$

Это равенство возможно лишь в двух случаях,

если  $0$  или  $0 = a =$

При  $x = 0$  второе уравнение переписывается в виде

$$откуда  $a + 2a - 3 = 0$ ,  $1. a = -$   $a =$$$

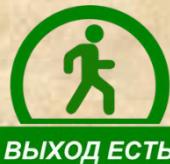
При  $a = 0$  первое уравнение системы примет вид

$$(b^2 - 4b + 5)^y = 1.$$

Учитывая, что  $b^2 - 4b + 5 = (b - 2)^2 + 1 \geq 1$  приходим к выводу, что это равенство будет выполняться при любых  $b$  только в случае  $y = 0$ .

Но тогда и в этом случае мы приходим к уравнению  $a^2 + 2a - 3 = 0$ , из чего делаем вывод, что не существует других значений параметра  $a$ , удовлетворяющих условию задачи.

Ответ:  $a = -3; a = 1$



**ПРИМЕР 5.** Найдите все значения параметра  $a$  при которых система

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1} = (x^2 - 6x)^2, \\ x^2 + y = 6x \end{cases} \text{ имеет ровно два решения.}$$

**Решение.** Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \log_a \sqrt{y+1} = (6x - x^2)^2, \\ y = 6x - x^2 \end{cases}$$

В результате получаем уравнение  $\log_a \sqrt{y+1} = y^2$ , откуда

$$\sqrt{y+1} = a^{y^2} \quad y+1 = a^{2y^2}$$

Рассмотрим различные варианты расположения графиков функций

$z = y+1$  и  $z = a^{2y^2}$  в зависимости от различных значений параметра  $a$ .



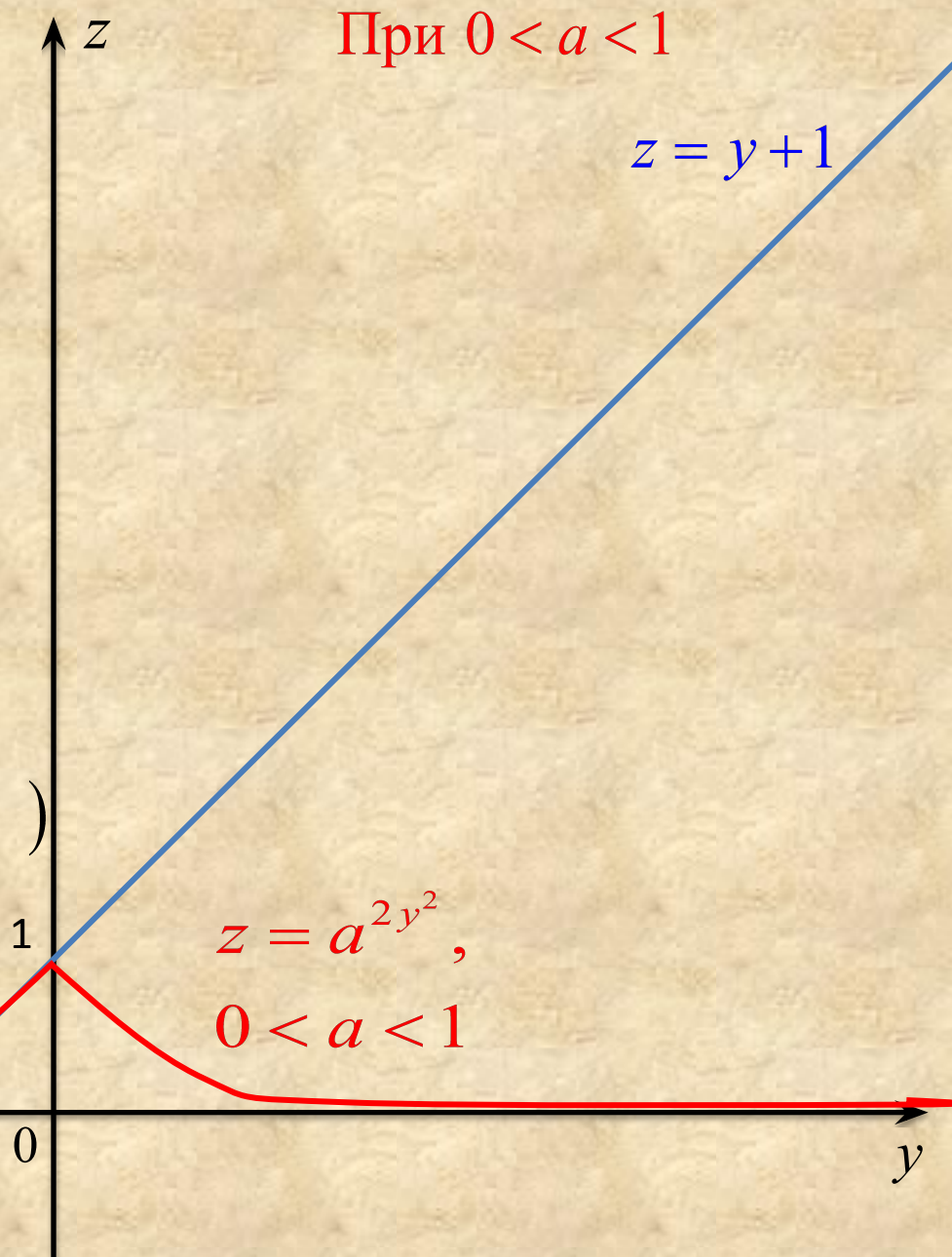
В этом случае уравнение  
будет иметь единственный  
корень  $y = 0$

Подставим это значение  
во второе уравнение системы.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } 6x - x^2 &= 0, \\ x(6 - x) &= 0, \\ x &= 0 \text{ или } x = 6. \end{aligned}$$

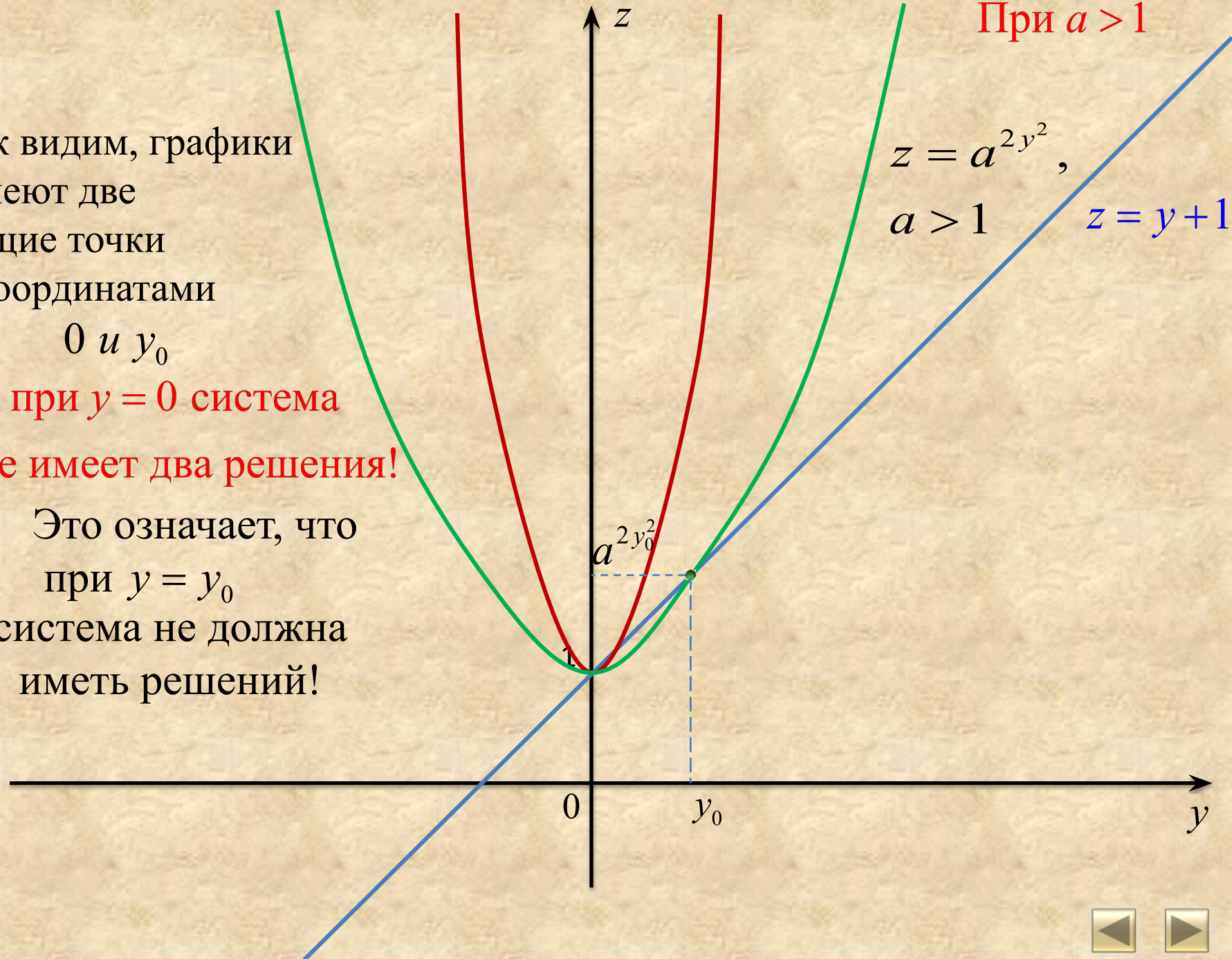
Таким образом система имеет  
ровно два решения  $(0; 0; 0)$  и  $(6; 0; 0)$

Следовательно при  $0 < a < 1$   
условие задачи  
выполнено



При  $a > 1$

$$z = a^{2y^2},$$
$$a > 1$$
$$z = y + 1$$



Как видим, графики  
имеют две  
общие точки  
с координатами

$0$  и  $y_0$

Но при  $y = 0$  система  
уже имеет два решения!

Это означает, что  
при  $y = y_0$   
система не должна  
иметь решений!



Мы помним, что  $x^2 + y = 6x$  или, по-другому,

$$x^2 - 6x + y = 0.$$

Это уравнение является квадратным относительно  $x$ ,

следовательно оно не будет иметь корней,  
если его дискриминант меньше нуля.

$$D = 36 - 4y; \quad 36 - 4y < 0 \quad y > 9$$

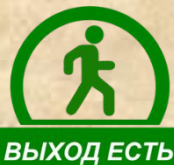
Выясним при каком значении параметра  $y = 9$

Так как  $y + 1 = a^{2y^2}$ , то, подставив 9, получим

$$10 = a^{162} \quad 10 a = \sqrt[162]{10}$$

Таким образом при  $1 < a < \sqrt[162]{10}$  будет выполняться условие  $y > 9$ , следовательно исходная система уравнений также будет иметь только два решения.

Ответ:  $(0; 1) \cup (1; \sqrt[162]{10})$





# Используемая литература и ссылки на рисунки

ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Яценко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 1)

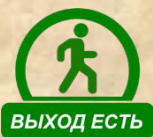
ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Яценко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 2)

ЕГЭ 2011. Математика. Типовые тестовые задания. Под ред. Семенова А.Л., Яценко И.В., М.: Экзамен, 2011.(сборник 3)

Математика. Диагностические работы в формате ЕГЭ., М.: МЦНМО, 2011 - 36 с.

Математика. Всё для ЕГЭ 2011. Часть 1. Мальцев Д.А., Мальцев А.А., Мальцева Л.И. (2010, 221с.)

Математика. Подготовка к ЕГЭ- 2011. Под ред. Ф., Кулабухова С.Ю. (2010, 416с.)



[http://metrit.ru/img/logo\\_megapne](http://metrit.ru/img/logo_megapne)



[http://toprekord.ru/proverka/img/button\\_enter.gif](http://toprekord.ru/proverka/img/button_enter.gif)



[http://t3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRA59ONv8oQtDQXpiWg00d\\_0AMw7BO1t2U9Ao8qU6laCQ-vKLLzRg](http://t3.gstatic.com/images?q=tbn:ANd9GcRA59ONv8oQtDQXpiWg00d_0AMw7BO1t2U9Ao8qU6laCQ-vKLLzRg)

[http://www.egecarpet.com/files/billeder/Pictures%20%20col/ege\\_buildi ng.jpg](http://www.egecarpet.com/files/billeder/Pictures%20%20col/ege_buildi ng.jpg)