Презентация

на тему:

«Ряды Фурье»

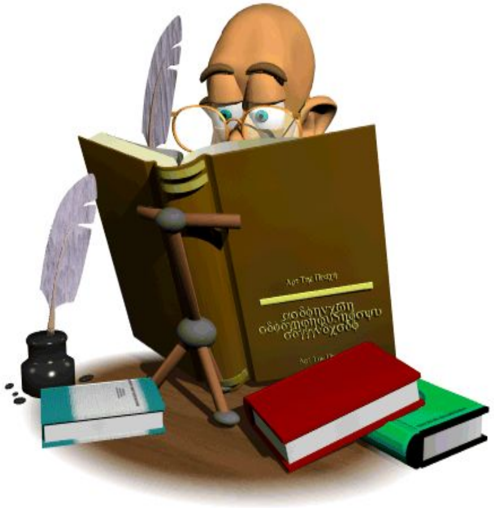
Разработала
студентка
группы Со-11
Одинцова Т.П.

Содержание:

Жан Батист Жозеф Фурье

(1768-1830)

— французский математик и физик, иностранный почетный член Петербургской академии наук. Писал труды по алгебре, дифференциальным уравнениям и математической физике. Его «Аналитическая теория тепла» явилась основой в создании теории тригонометрических рядов то есть рядов Фурье.



Ряд Фурье — способ представления произвольной сложной функции суммой более простых. В общем случае количество таких функций может быть бесконечным, при этом чем больше таких функций учитывается при расчете, тем выше оказывается конечная точность представления исходной функции. В большинстве случаев в качестве простейших используются тригонометрические функции синуса и косинуса, в этом случае ряд Фурье называется *тригонометрическим*, а вычисление такого ряда часто называют *разложением на гармоники*.

Тригонометрический ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + \ldots$$

или, более сжато

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Коэффициентами тригонометрического ряда – называют постоянные

числа , a_0,a_n и b_n(n=1,2,3…)

a_0, a_n и $b_n (n=1,2,3\dots)$ можно рассчитать по таким формулам :

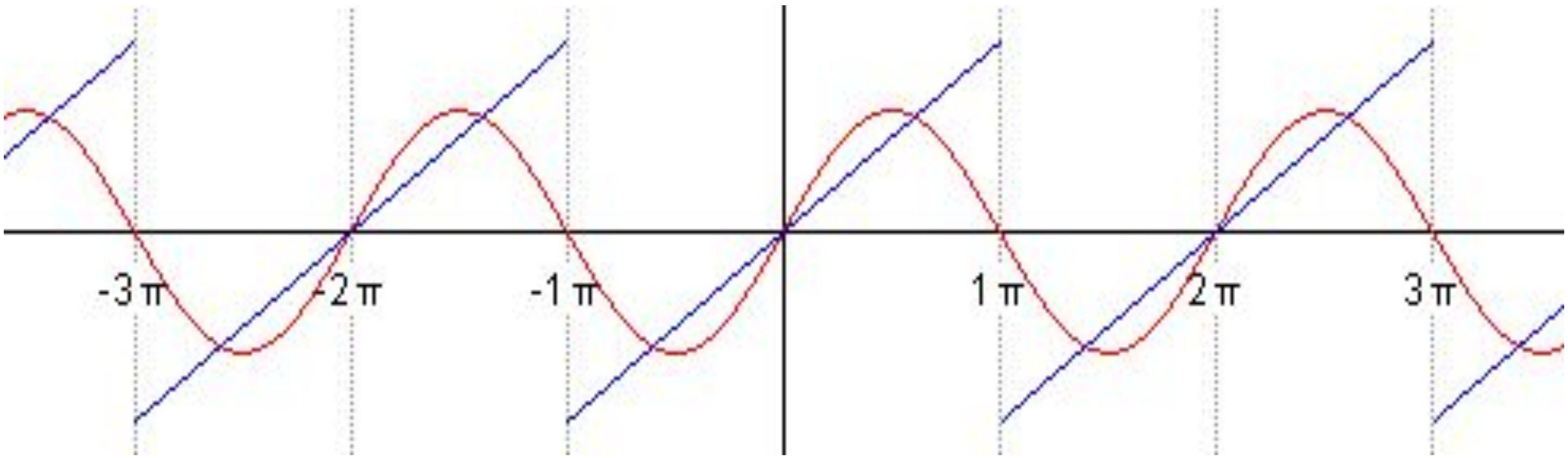
$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx,$$

Если обозначить $S_N(f,x)$ частичные суммы ряда Фурье f(x) .

$$S_N(f,x) := \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}_k e^{ikx}$$

сходимость последовательности функций $S_N(f,x)$ к функции f(x) в различных смыслах. Функция f предполагается 2π - периодической (если она задана только на промежутке , её можно периодически продолжить). Если f є (- **π**, **π**), то последовательность SN (f,x) сходится к функции.



ТЕОРЕМА ДИРИХЛЕ

- Определение 1. Функция f (x) называется кусочно-непрерывной на [a;b], если она непрерывна на этом промежутке или имеет на нем конечное число разрывов I рода.
- Определение 2. Функция f (x) называется кусочно-непрерывной на [a;b], если она монотонна на всем отрезке, либо этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов так, что на каждом из них функция монотонна (т.е. функция на [a;b] имеет конечное число экстремумов).
- Определение 3. Говорят, что f (x) удовлетворяет условиям Дирихле на [a;b], если f (x) на [a;b] является кусочно-непрерывной и кусочно- монотонной.

Пример 1. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию f(x) с периодом 2 **π**, , заданную следующим образом:

$$f(x)=\begin{cases}2x & при -\pi < x \le 0,\\ 0 & при\ 0 < x \le \pi.\end{cases}$$

Данная функция является кусочно-монотонной и ограниченной, следовательно, она допускает разложение в ряд Фурье.
Вычислим коэффициенты Фурье для заданной функции. Поскольку функция равна нулю на промежутке от 0 до **π** то для нахождения коэффициентов Фурье интегрирование будем производить только в пределах от – **π** до 0

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2x\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0}x\,dx=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{0}=\frac{1}{\pi}\left(0-(-\pi)^2\right)=-\frac{1}{\pi}\pi^2=-\pi$$

Y=cosx , y=sinx

$$u=x;\quad dv=\cos(kx)dx;$$

$$du=dx;\quad v=\frac{1}{k}\sin(kx)dx;$$

$$a=-\pi;\quad b=0.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}2x\cos(kx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{1}{k}\sin(kx)\bigg|_{-\pi}^{0}-\int_{-\pi}^{0}\frac{1}{k}\sin(kx)\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0\cdot\frac{1}{k}\sin(k\cdot 0)-(-\pi)\cdot\frac{1}{k}\sin(-k\pi)-\frac{1}{k^2}(-\cos(kx))\bigg|_{-\pi}^{0}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left((-\pi)\cdot\frac{1}{k}\sin(k\pi)+\frac{1}{k^2}(\cos(k\cdot 0)-\cos(-k\pi))\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left((-\pi)\cdot\frac{1}{k}\sin(k\pi)+\frac{1}{k^2}(1-\cos(k\pi))\right).$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\left(0+\frac{1}{k^2}\left(1-(-1)^k\right)\right)=\frac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)=\begin{cases}\frac{2}{\pi k^2}\cdot 2 & \text{при нечетном } k,\\ 0 & \text{при четном } k;\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{4}{\pi k^2} & \text{при нечетном } k,\\ 0 & \text{при четном } k.\end{cases}$$

$$\int_a^b u\,dv=uv\Big|_a^b-\int_a^b v\,du$$

$$u=x;\quad dv=\sin(kx)dx;$$

$$du=dx;\quad v=-\frac{1}{k}\cos(kx)dx;$$

$$a=-\pi;\quad b=0.$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 2x\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left(x\left(-\frac{1}{k}\right)\cos(kx)\Big|_{-\pi}^{0} - \int_{-\pi}^{0}\left(-\frac{1}{k}\cos(kx)\right)dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)\cos(k\cdot 0) - (-\pi)\cdot\left(-\frac{1}{k}\right)\cos(-k\pi) + \frac{1}{k^2}\sin(kx)\Big|_{-\pi}^{0} \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((-\pi)\cdot\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2}(\sin(k\cdot 0) - \sin(-k\pi)) \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left((-\pi)\cdot\frac{1}{k}\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2}(0 + \sin(k\pi)) \right) = \frac{2}{k}(-1)(-1)^k = \frac{2}{k}(-1)^{k+1} =$$

$$= \begin{cases} 2/k & \text{при нечетном } k, \\ -2/k & \text{при четном } k. \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\right) =$$

$$= \frac{-\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)\cos(kx) + \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx) \right) =$$

$$= \frac{-\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2}\ldots \right) + 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \ldots \right).$$

Ответ:

$$f(x)=\frac{-\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi k^2}\left(1-(-1)^k\right)\cos(kx)+\frac{2}{k}(-1)^{k+1}\sin(kx)\right)=$$

$$=\frac{-\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos(3x)}{3^2}+\frac{\cos(5x)}{5^2}\ldots\right)+2\left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin(2x)}{2}+\frac{\sin(3x)}{3}-\frac{\sin(4x)}{4}+\ldots\right).$$

РЯДЫ ФУРЬЕ И ИХ ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ В ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Расмотрим ряд Фурье по ортогональной системе функций .

Пусть функция f(x) непрерывна на отрезке (а,в) или имеет на этом отрезке конечное число точек разрыва первого рода. Рядом Фурье такой функции f(x) на отрезке (а,в) по ортогональной системе $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$

называется ряд коэффициенты которого определяются равенствами

$$a_n = \frac{\int_a^b f(x)\varphi_n(x)dx}{\int_a^b [\varphi_n(x)]^2(x)dx}, n = 1, 2, \dots$$

Вид ряда Фурье в электротехнике

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right).$$

Коэффициенты a_n и b_n рассчитываются по формулам:

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\cos\frac{n\pi x}{l}dx, n=0,1,2,3,\ldots \qquad b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n=1,2,3,\ldots$$

Кроме всего этого, стоит сказать о сумме тригонометрического ряда Фурье. Все
функции системы являются периодическими с общим периодом $T=2l$
Поэтому если ряд сходится на отрезке $[-l,l]$ то он сходится и на всей числовой оси, а его сумма периодически повторяет те
значения, которые она принимала на отрезке. Таким образом, можно говорить не только о разложении в тригонометрический ряд Фурье функции f(x) на отрезки .

$$[-l,l]$$

Пример2.

Вычислить суммарный ток в схеме на рис. 1.

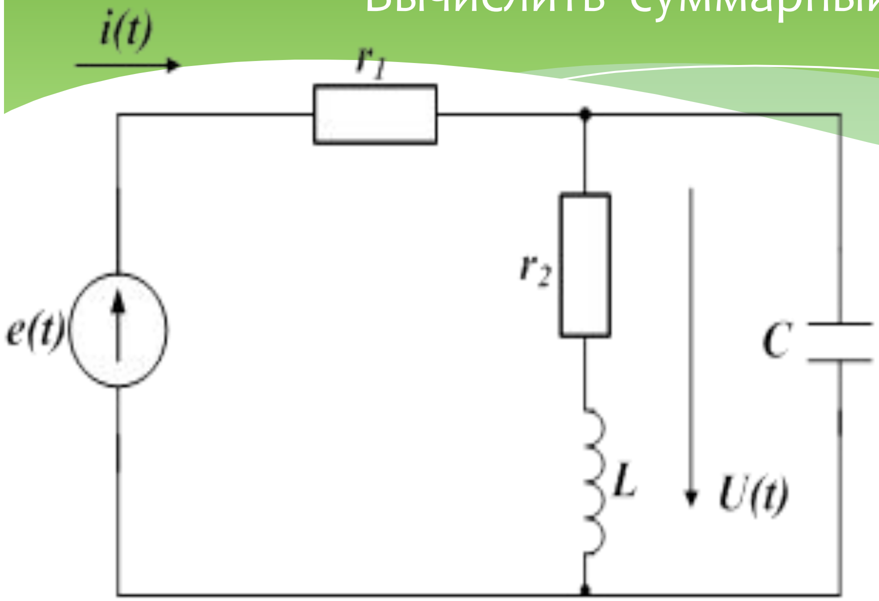


Рисунок 1. Электрическая цепь

Дано:

$$e(t) = 40 + 25\sin\omega t + 30\sin 2\omega t$$

$r_1 = 1 Ом$ $\quad$ $r_2 = 1{,}5 Ом$

$\omega L = 1 Ом$ $\quad$ $1/\omega C = 14 Ом.$

Решение:

Сопротивление постоянному току $z(0) = r_1 + r_2 = 2,5 Ом.$

Постоянная слагающая тока: $I_0 = \dfrac{E_0}{z(0)} = \dfrac{40}{2,5} = 16 A.$

Комплексное сопротивление цепи для основной частоты: $z(j\omega) = 2,72 + j0,88 Ом.$

Комплексная амплитуда тока основной частоты: $I_{1m} = \dfrac{25}{2,72 + j0,88} = 8,74\angle -17,9^{\circ} A.$

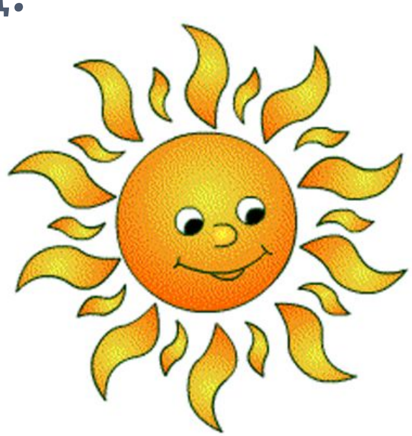
Комплексное сопротивление цепи для утроенной частоты:

$$z(j2\omega) = r_1 + \frac{(r_2 + j2\omega L)\left(-j\dfrac{1}{2\omega C}\right)}{r_2 + j\left(2\omega L - \dfrac{1}{2\omega C}\right)} = 3,7 + j2 Ом.$$

Комплексная амплитуда тока третьей гармоники:

$$I_{2m} = \frac{30}{3,7 + j2} = 7,13\angle -28,4^\circ A.$$

Таким образом, искомое значение суммарного тока будет иметь вид:



$$i(t) = 16 + 8,74\sin(\omega t - 17,9^\circ) + 7,13\sin(2\omega t - 28,4^\circ)A.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ =)