15.4. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющих условию теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе.

Для четных и нечетный функций разложение в ряд Фурье существенно упрощается.

Пусть функция f(x) определена и является нечетной на отрезке [-П,П]:

$$f(-x) = -f(x)$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

В первом интеграле делаем замену:

$$\left| \begin{array}{lll} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx = 0$$

$$\boxed{a_n = 0}$$

Тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$\left| \begin{array}{lll} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\sin nt dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx$$

$$\boxed{b_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx dx}$$

Таким образом, нечетная на отрезке [-П,П] функция f(x) будет разлагаться в ряд Фурье следующим образом:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$

Пусть функция f(x) определена и является четной на отрезке [-П,П]:

$$f(-x) = f(x)$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx =$$

В первом интеграле делаем замену:

$$\left| \begin{matrix} x=-t & dx=-dt & f(x)=-f(t) \\ x_1=0 \quad t_1=0 & & x_2=-\pi \quad t_2=\pi \end{matrix} \right|$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\sin ntdt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\sin nxdx=0$$

$$\boxed{b_n=0}$$

Тогда

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\cdot\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx =$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{0} f(t)\cdot\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx$$

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\,dx}$$

Таким образом, четная на отрезке [-П,П] функция f(x) будет разлагаться в ряд Фурье следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$

ПРИМЕРЫ.

1

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x$$

РЕШЕНИЕ.

Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Она является нечетной на отрезке [-П,П], поэтому

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot \sin nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cdot \sin nx dx =$$

Интеграл берем по частям:

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cdot x \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{2}{\pi \cdot n}\left((-1)^{n+1}\cdot \pi - \underbrace{\frac{1}{n}\sin nx \Big|_0^{\pi}}_{0} \right) = (-1)^{n+1}\cdot \frac{2}{n}$$

Тогда ряд Фурье для данной функции будет иметь вид:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx = 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin nx}{n}$$

$$n = 1,2,3...$$

2

Разложить в ряд Фурье функцию

$$f(x) = x^2$$

РЕШЕНИЕ.

Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Она является четной на отрезке [-П,П], поэтому

$$b_n = 0$$

При n=0:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

При n=1, 2, 3…:

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cdot\cos nx dx =$$

Интеграл берем по частям:

$$\left| \begin{matrix} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{matrix} \right|$$

$$
= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}\cdot x^2 \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{\pi} x \cdot \sin nx dx \right) =
$$

Оставшийся интеграл снова берем по частям:

$$
\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\dfrac{1}{n}\cos nx \end{array} \right|
$$

$$
= \frac{2}{\pi}\left(\underbrace{\frac{1}{n}\cdot x^2 \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi}}_{0} - \frac{2}{n}\left(-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos nx dx \right)\right) =
$$

$$= \frac{4}{\pi n^2}\left(x\cos nx\Big|_0^{\pi} + \underbrace{\frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_0^{\pi}}_{0} \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

Тогда ряд Фурье для данной функции будет иметь вид:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin nx}{n^2}$$