




15.4. РЯДЫ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЕТНЫХ И НЕЧЕТНЫХ ФУНКЦИЙ

Разложение в ряд Фурье возможно для функций, удовлетворяющих условию теоремы, сформулированной в предыдущем параграфе.

Для четных и нечетных функций разложение в ряд Фурье существенно упрощается.





Пусть функция $f(x)$ определена и является нечетной на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(-x) = -f(x)$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \end{aligned}$$



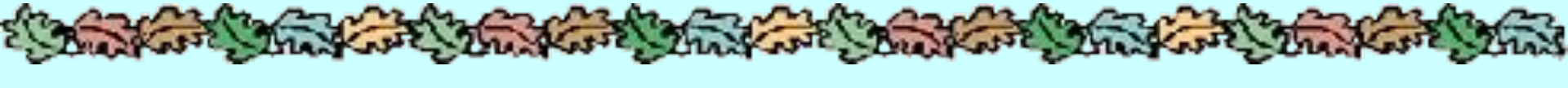


В первом интеграле делаем замену:

$$\left| \begin{array}{lll} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(t) \cdot \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx =$$

$$= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx = 0$$

$$a_n = 0$$





Тогда

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cdot \sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx =$$

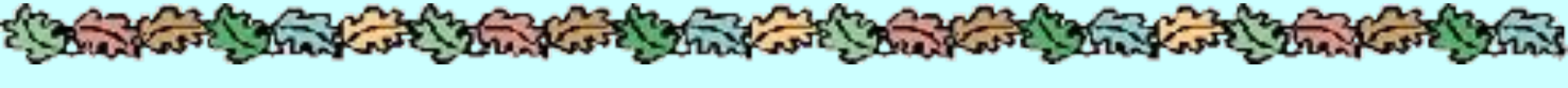
$$\left| \begin{array}{ccc} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 & t_1 = 0 & x_2 = -\pi & t_2 = \pi \end{array} \right|$$





$$= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(t) \cdot \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx$$


$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx$$




**Таким образом, нечетная на
отрезке
[-П,П] функция $f(x)$ будет
разлагаться в ряд Фурье
следующим образом:**

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx$$





Пусть функция $f(x)$ определена и является четной на отрезке $[-\pi, \pi]$:

$$f(-x) = f(x)$$

Найдем коэффициенты разложения:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cdot \sin nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nx dx = \end{aligned}$$






В первом интеграле делаем замену:

$$\left| \begin{array}{lll} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(t) \cdot \sin ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx = 0 \end{aligned}$$

$$b_n = 0$$





Тогда

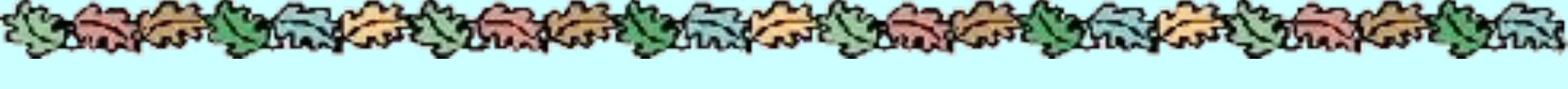
$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx =$$


$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(x) \cdot \cos nx dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx =$$

$$\left| \begin{array}{ccc} x = -t & dx = -dt & f(x) = -f(t) \\ x_1 = 0 \quad t_1 = 0 & & x_2 = -\pi \quad t_2 = \pi \end{array} \right|$$




$$\begin{aligned} &= -\frac{1}{\pi} \int_{\pi}^0 f(t) \cdot \cos ntdt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nxdx$$




Таким образом, четная на отрезке $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ будет разлагаться в ряд Фурье следующим образом:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx$$





ПРИМЕРЫ.

1

*Разложить в ряд Фурье
функцию*

$$f(x) = x$$



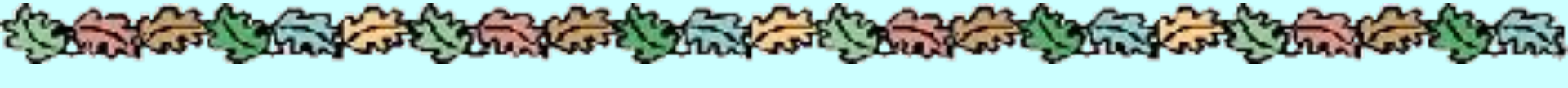


РЕШЕНИЕ.

Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Она является нечетной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поэтому

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin nxdx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nxdx =$$



Интеграл берем по частям:

$$\left| \begin{array}{l} u = x \quad dv = \sin nx dx \\ du = dx \quad v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(-\frac{1}{n} \cdot x \cdot \cos nx \Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

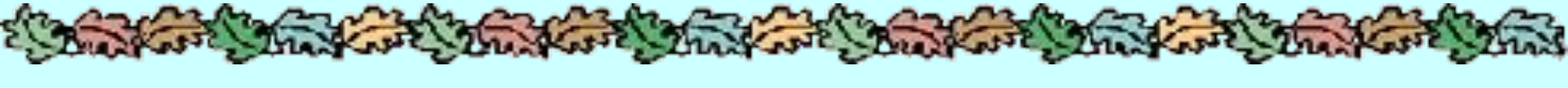
$$= \frac{2}{\pi \cdot n} \left((-1)^{n+1} \cdot \pi - \frac{1}{n} \sin nx \Big|_0^{\pi} \right) = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$$

0



Тогда ряд Фурье для данной функции будет
иметь вид:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin nx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\sin nx}{n}$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$




2

***Разложить в ряд Фурье
функцию***

$$f(x) = x^2$$



РЕШЕНИЕ.


Данная функция удовлетворяет всем условиям теоремы о разложении функции в ряд Фурье.

Она является четной на отрезке $[-\pi, \pi]$, поэтому $b_n = 0$

При $n=0$:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$





При $n=1, 2, 3\dots$:

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cdot \cos nx dx =$$

Интеграл берем по частям:

$$\left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right|$$




$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \cdot x^2 \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \cdot \sin nxdx \right) =$$

Оставшийся интеграл снова берем по частям:

$$\left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nxdx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n} \cos nx \end{array} \right|$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} \cdot x^2 \cdot \sin nx \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n} x \cos nx \Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nxdx \right) \right) =$$

0


$$= \frac{4}{\pi n^2} \left(x \cos nx \Big|_0^\pi + \frac{1}{n^2} \sin nx \Big|_0^\pi \right) = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

0

Тогда ряд Фурье для данной функции будет иметь вид:

$$x^2 = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos nx = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{\sin nx}{n^2}$$
