Лекция 3.10. **Ряды Фурье.**

Определение:

Выражение вида $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{k}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ называется

тригонометрическим многочленом степени k.

Множество $\{1,\{\cos nx\}_{n=1}^{\infty},\{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется тригонометрической системой.

Ряд вида $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$

называется рядом по тригонометрической системе или (чаще всего) тригонометрическим рядом.

Лемма (ортогональность тригонометрической системы):

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi, \ \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi \quad \forall n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall n \neq m, \qquad n, m \in N$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = 0 \quad \forall n \neq m \quad n, m \in N$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx \, dx = 0 \quad \forall n \neq m \quad n \in N \quad m \in N \cup \{0\}$$

<u>Теорема:</u>

Пусть $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows S(x)$

на $[-\pi, \pi]$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx \, dx \,, n = 0,1, \dots \\ b_n = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx \, dx \,, n = 1,2, \dots \end{cases}$$

Определение: Пусть $\exists$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$$

(неважно, собственный или несобственный).

Тогда $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx$ и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos nx\,dx\,, n = 0,1,\dots} \quad \boxed{b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin nx\,dx\,, n = 1,2,\dots}$$

называются коэффициентами Фурье,

а ряд $\dfrac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$ называется рядом

Фурье функции $f(x)$.

Замечание:

Если $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$, то $\exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|dx$

<u>Теорема (минимальное свойство коэффициентов Фурье):</u>

Пусть $\exists \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$.

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

$-$ тригометрический многочлен степени n

Пусть $S_n(x)$ $-$ частичная сумма ряда Фурье $f(x)$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Тогда $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - S_n(x)\big)^2 dx = \min\limits_{\substack{T_n(x) \\ \deg\, T_n(x) \le n}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \big(f(x) - T_n(x)\big)^2 dx$

<u>Следствие 1 (неравенство Бесселя):</u>

В условиях теоремы $$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)\le\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)dx$$

<u>Следствие 2:</u>

В условиях теоремы $a_k\to 0, b_k\to 0$ при $k\to\infty$.

<u>Определение:</u>

Функция $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$ называется ядром Дирихле.

<u>Лемма:</u>

$D_n(t)$ – непрерывная на R, чётная,

2π – периодичная функция,

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}, \qquad \text{при } t \neq 2\pi k, k \in Z$$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = 1 \quad \forall n.$$