

Лекция 3.10. Ряды Фурье.

Определение:

Выражение вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

называется

тригонометрическим многочленом степени k .

Множество $\{1, \{\cos nx\}_{n=1}^{\infty}, \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty}\}$ называется тригонометрической системой.

Ряд вида $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$

называется рядом по тригонометрической системе или (чаще всего) тригонометрическим рядом.

Лемма (ортогональность тригонометрической системы):

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \pi \quad \forall n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0 \quad \forall n \neq m, \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = 0 \quad \forall n \neq m \quad n, m \in \mathbb{N}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0 \quad \forall n \neq m \quad n \in \mathbb{N} \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Теорема:

Пусть $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \rightrightarrows S(x)$

на $[-\pi, \pi]$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx \, dx, n = 0, 1, \dots \\ b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx \, dx, n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Определение: Пусть \exists

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

(неважно, собственный или несобственный).

Тогда $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ и $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cos nx dx, n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots$$

называются коэффициентами Фурье,

а ряд $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ называется рядом

Фурье функции $f(x)$.

Замечание:

$$\text{Если } \exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx, \text{ то } \exists \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)| dx$$

Теорема (минимальное свойство коэффициентов Фурье):

Пусть $\exists \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$.

$$T_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^n (A_k \cos kx + B_k \sin kx)$$

– тригонометрический многочлен степени n

Пусть $S_n(x)$ – частичная сумма ряда Фурье $f(x)$:

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

Тогда
$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S_n(x))^2 dx = \min_{\substack{T_n(x) \\ \deg T_n(x) \leq n}} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - T_n(x))^2 dx$$

Следствие 1 (неравенство Бесселя):

В условиях теоремы $\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx$

Следствие 2:

В условиях теоремы $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Определение:

Функция $D_n(t)$
 $= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt$ называется ядром Дирихле.

Лемма:

$D_n(t)$ – непрерывная на R , чётная,
 2π – периодичная функция,

$$D_n(0) = n + \frac{1}{2}, \quad \text{при } t \neq 2\pi k, k \in Z$$

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1 \quad \forall n.$$