

Лекция 7.

Тема: Ряды. Определение и свойства.

Цель: Рассмотреть понятие ряда и основные свойства.

Определение числового ряда

- Рассмотрим некоторую числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$. Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots$
- Выражение вида $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- называется числовым рядом.

Сходимость рядов с положительными членами

Конечные суммы $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$
называют частичными суммами ряда.

Ряд называют сходящимся, если существует
конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, при этом

число S называют суммой ряда.

Расходящиеся ряды

- Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ равен бесконечности или вообще не существует, то ряд называется расходящимся.
- Ряд $1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$
- является расходящимся, так как его частичные суммы $S_1 = 1$, $S_2 = 1 - 1 = 0$,
- $S_3 = 1 - 1 + 1 = 1$ очевидно, при $n \rightarrow \infty$ не имеют конечного предела.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его

общий член стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Таким образом, если $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд
расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Признак №1

Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

Признак сравнения 2, или признак сравнения в предельной форме.

Пусть даны два ряда с положительными

членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} V_n$ и пусть существует

конечный и не равный нулю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{V_n}$

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L,$$

то ряд сходится при $L < 1$ и расходится при $L > 1$.

Признак Коши

Если для знакоположительного ряда существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L,$$

то при $L < 1$ ряд сходится, при $L > 1$ ряд расходится.

Интегральный признак

Если при $x \geq 1$ - $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

где $u_n = f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_1^{\infty} f(x) dx.$$

Сходимость знакочередующихся рядов.

Знакочередующимся рядом называют ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

где $u_n > 0$.

Признак Лейбница

Знакопередающийся ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

сходится, если абсолютные величины его членов убывают, а общий член стремится к нулю, то есть если выполняются условия:

- 1) $u_1 > u_2 > u_3 > \dots > u_n > \dots$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$

Примеры

- Исследовать на сходимость ряды:

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$.

- 1) члены знакочередующегося ряда

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{1}{4}, \dots, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \dots$$

- монотонно убывают и $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

- Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

- 2) общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$
- не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = 1$$

- Следовательно, ряд расходится согласно необходимому признаку.

Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Понятие знакопеременного ряда включает в себя как знакочередующиеся ряды, так и ряды с произвольным чередованием знаков своих членов.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то

знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также
сходится.

Абсолютно сходящийся ряд

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

Условно сходящийся ряд

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.

Степенные ряды

- Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$

- называется степенным по степеням x .

- Ряд

- $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots + a_n (x - x_0)^n + \dots$

- является степенным по степеням $(x - x_0)$.

С помощью замены $x - x_0 = x$ такой ряд сводится к ряду по степеням x .

Интервал сходимости

Интервал $(a - R; a + R)$,
называется интервалом сходимости
степенного ряда, а половина его длины
 R называется радиусом сходимости
степенного ряда.

Вопросы:

- 1) Определение рядов?
- 2) Сходимость числовых рядов?
- 3) Область сходимости степенного ряда?