Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 7.

Тема: Ряды. Определение и свойства.

Цель: Рассмотреть понятие ряда и основные свойства.

Определение числового ряда

- Рассмотрим некоторую числовую последовательность $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$. Составим из членов этой последовательности бесконечную сумму $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$
- Выражение вида $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$
- называется числовым рядом.

Сходимость рядов с положительными членами

Конечные суммы $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n$ называют частичными суммами ряда.

Ряд называют сходящимся, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, при этом

число S называют суммой ряда.

Расходящиеся ряды

- Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ равен бесконечности или вообще не существует, то ряд называется расходящимся.
- Ряд $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n+1}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$
- является расходящимся, так как его частичные суммы $S_1=1$, $S_2=1-1=0$,
- $S_3=1-1+1=1$ очевидно, при $n\to\infty$ не имеют конечного предела.

Необходимый признак сходимости ряда

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится, то его общий член стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд расходится.

Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Признак №1

Пусть даны ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$.

Если ряд с большими членами сходится, то сходится и ряд с меньшими членами. Если же ряд с меньшими членами расходится, то расходится и ряд с большими членами.

Признак сравнения 2, или признак сравнения в предельной форме.

Пусть даны два ряда с положительными

членами $\sum\limits_{n-1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n-1}^{\infty} V_n$ и пусть существует

конечный и не равный нулю $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{V_n}$.

Тогда оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Признак Даламбера

Если для знакоположительного ряда существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=L,$$

то ряд сходится при *L*<1 и расходится при *L*>l..

Признак Коши

Если для знакоположительного ряда существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L\ ,$$

то при *L*<1 ряд сходится, при *L*>1 ряд расходится.

Интегральный признак

Если при x $\geq$ 1 - $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая функция, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,

где $u_n = f(n)$, сходится или расходится в зависимости от того, сходится или расходится интеграл

$$\int_{1}^{\infty} f(x)dx.$$

Сходимость знакочередующихся рядов.

Знакочередующимся рядом называют ряд вида:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

где $u_n > 0$.

Признак Лейбница

Знакочередующийся ряд

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n,$$

сходится, если абсолютные величины его членов убывают, а общий член стремится к нулю, то есть если выполняются условия:

1) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots$,

2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$

Примеры

- Исследовать на сходимость ряды:
- 1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n+1}$, 2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$.
- 1) члены знакочередующегося ряда

$$u_1=\frac{1}{2},u_2=\frac{1}{3},u_3=\frac{1}{4},\dots,u_{n+1}=\frac{1}{n+1},\dots$$

- монотонно убывают и $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.
- Согласно признаку Лейбница ряд сходится.

- 2) общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n+2}$
- не стремится к нулю, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=1$$

- Следовательно, ряд расходится согласно необходимому признаку.

Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов.

Понятие знакопеременного ряда включает в себя как знакочередующиеся ряды, так и ряды с произвольным чередованием знаков своих членов.

Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то

знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ также сходится.

Абсолютно сходящийся ряд

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся.

Условно сходящийся ряд

Если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится, то знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется условно сходящимся.

Степенные ряды

- Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$
- называется степенным по степеням *x*.
- Ряд
- $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + ... + a_n (x - x_0)^n + ...$$
- является степенным по степеням $(x - x_0)$. С помощью замены $x - x_0 = x$ такой ряд сводится к ряду по степеням *x* .

Интервал сходимости

Интервал $(a-R;a+R)$, называется интервалом сходимости степенного ряда, а половина его длины R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Вопросы:

1)Определение рядов?

2)Сходимость числовых рядов?

3)Область сходимости степенного ряда?