Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 8.

Тема: Ряды Тейлора (Маклорена).

Цель: Рассмотреть ряды данного вида.

Ряд вида

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

называется рядом Тейлора для функции $f(x)$ в точке a. В частном случае при $a=0$ ряд принимает вид

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

и называется рядом Маклорена.

Условие сходимости ряда Тейлора

Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке a функция $f(x)$ являлась суммой составленного для неё ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$

Можно показать, что остаточный член можно представить в форме Лагранжа:

,

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

где c – некоторое число из интервала $(a; x)$.

Разложение некоторых элементарных функций в ряды Тейлора и Маклорена

Показательная функция

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \ldots + \frac{x^{n}}{n!} + \ldots.$$

Этот ряд сходится на всей числовой прямой.

Разложение синуса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots$$

Этот ряд также сходится на всей числовой прямой.

Разложение косинуса

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots$$

И этот ряд также сходится на всей числовой прямой.

Биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$$

Этот ряд называется биномиальным. Он сходится в интервале (-1,1). Это разложение имеет место для $m \neq -1$.

Вопросы:

1) Условие сходимости ряда Тейлора?

2)Какой ряд называется биномиальным?