

Лекция 8.

Тема: Ряды Тейлора (Маклорена).

Цель: Рассмотреть ряды данного вида.

Ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \dots$$

называется рядом Тейлора для функции

$f(x)$ в точке a . В частном случае

при $a = 0$ ряд принимает вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots$$

и называется рядом Маклорена.

Условие сходимости ряда Тейлора

Для того чтобы бесконечно дифференцируемая в точке a функция $f(x)$ являлась суммой составленного для неё ряда Тейлора, необходимо и достаточно, чтобы ~~можно показать~~ остаточный член можно представить в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

где c – некоторое число из интервала $(a; x)$.

***Разложение некоторых
элементарных функций
в ряды Тейлора и
Маклорена***

Показательная функция

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Этот ряд сходится на всей числовой прямой.

Разложение синуса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$$

Этот ряд также сходится на всей числовой прямой.

Разложение косинуса

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \dots$$

И этот ряд также сходится на всей числовой прямой.

Биномиальный ряд

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

Этот ряд называется биномиальным. Он сходится в интервале $(-1, 1)$. Это разложение имеет место для $m \neq -1$.

Вопросы:

- 1) Условие сходимости ряда Тейлора?
- 2) Какой ряд называется биномиальным?