Самоучитель решения неравенств первой и второй степени с параметрами при определенном условии

**Работу выполнил
ученик 11 класса
Афанасьев Алексей**

От автора.

Это небольшое пособие хочу предложить ребятам одиннадцатиклассникам для того, чтобы разобраться с решением неравенств с параметрами при определенном условии, упорядочить свои знания . Данная тема считается довольно сложной. Ее изучение идет на элективных курсах. Но ребятам, кто не может по каким – то причинам посещать эти курсы и считает себя достаточно сильным, чтобы разобраться в этой теме самим , я предлагаю мое пособие.

Здесь представлен алгоритм решения таких заданий и методические рекомендации по их выполнению». Рекомендую всем

11-классникам прочитать это пособие. Оно поможет вам разобраться с данным материалом, сэкономить свое время и проверить свои знания по данной теме.

Вместе с пособием прилагаются электронные тесты.

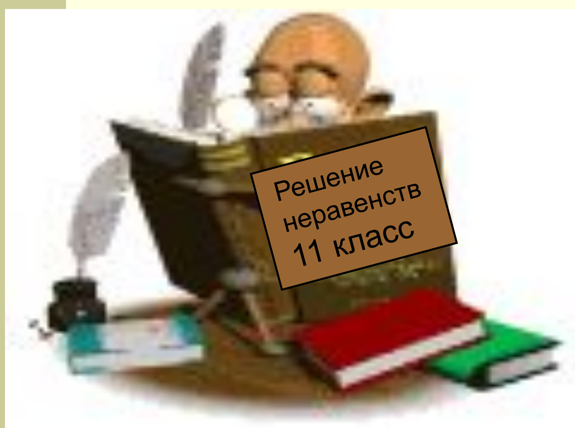
- При подготовке к ЕГЭ становится необходимостью изучать некоторые темы раздела курса «Алгебры и начала анализа» самостоятельно, так как в школьном курсе их не изучают вообще или затрагивают вскользь.
- Данная работа предназначена для самостоятельного изучения учащимися темы «решения неравенств первой и второй степени с параметрами при определенном условии »
- Работа написана на основе анализа материалов ЕГЭ по математике за последние годы. Данная тема содержит ключевые моменты теории (определения, основные понятия, формулы и. т. д.), описание методики решения типичных задач и некоторое количество подробно разобранных примеров.
- Нельзя дать универсальных указаний по решению задач с параметрами. Но для неравенств первой и второй степени с параметрами при заданном условии можно рекомендовать использовать **графический метод** решения, как более наглядный. При этом можно наглядно рассмотреть задачи, включающие несколько возможных случаев. Данный способ решения можно считать универсальным, так как он подходит для всех заданий такого типа.

- В самоучителе представлен алгоритм решения заданий для того , чтобы наиболее четко видеть «путь» решения. К пособию прилагаются тесты с электронной обработкой, созданные в программе Excel .

Афанасьев Алексей

Оглавление

Как понять «неравенства с параметрами» ???



Исходные понятия

Вспомним задачу нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ через его коэффициенты a, b, c, где $a \neq 0$. Рассматривая a, b, c как числа, выделяем полный квадрат $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0$ и получаем равенство $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Теперь рассуждаем так: поскольку квадрат любой величины неотрицателен, в случае, когда $b^2 - 4ac < 0$, последнее уравнение корней не имеет; в случае же, когда $b^2 - 4ac \geqslant 0$, получаем корни $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Следовательно, знак величины $D = b^2 - 4ac \geqslant 0$, называемой дискриминантом, является определяющим для решения нашего квадратного уравнения: если $D < 0$, то уравнение корней не имеет; если $D \geqslant 0$, то корни существуют и находятся по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

Так вот, оказывается, что рассмотренная задача — это типичная задача с параметрами, в которой требуется для каждого набора значений коэффициентов-параметров a, b, c, где $a \neq 0$, решить уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.

Истина не передается-
она добивается.
В.Ф. Одоевский

Определение. Функция вида $y = kx + b$, где k и b – произвольные числа, называется линейной функцией.
Графиком линейной функции является прямая с углом наклона к оси абсцисс равным β, где tg β $= k$. Если $k > 0$, то угол β острый; если $k < 0$, то угол β тупой; если $k = 0$, то график либо совпадает с осью абсцисс, либо параллелен ей.

Неравенства с параметрами

ВИД 1

$$KX+B>0$$
$$KX+B\leq 0$$
$$KX+B\geq 0$$
$$KX+B<0$$

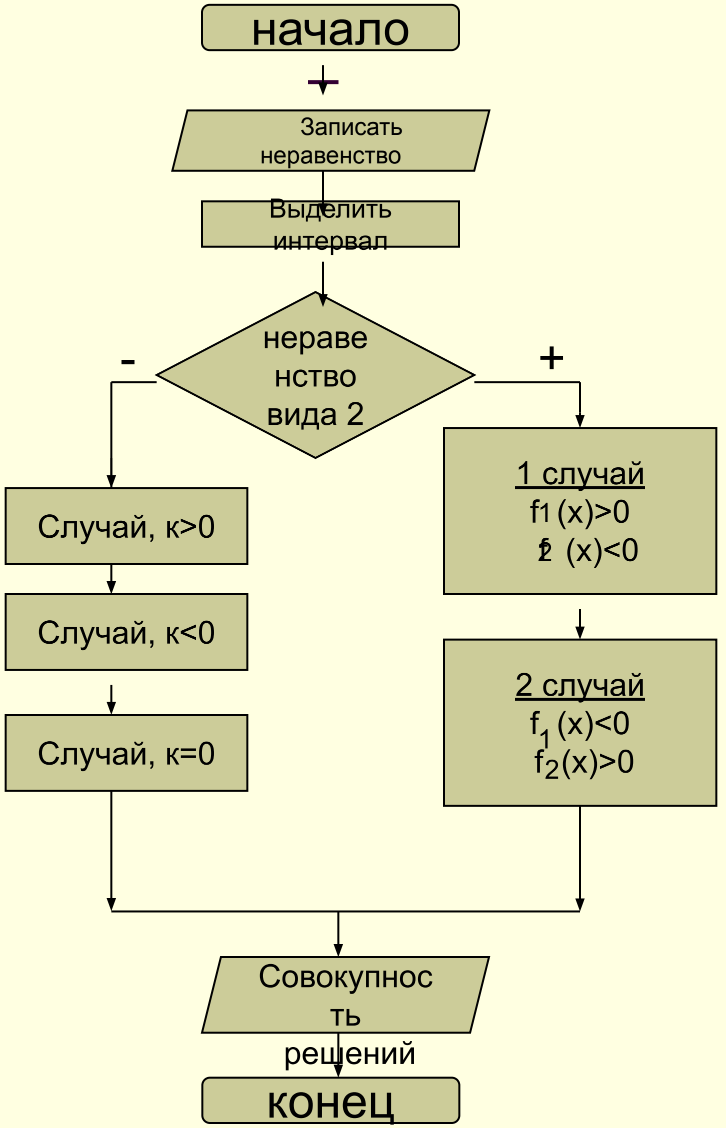
ВИД 2

$$\frac{f_1}{f_2}>0 \qquad \frac{f_1}{f_2}<0$$

$$\frac{f_1}{f_2}\geq 0 \qquad \frac{f_2}{f_1}\leq 0$$

f_1 и f_2 - линейные функции

Блок – схема алгоритма решения неравенств



- **Задача 1.** При каких значениях *k* неравенство $(k – 4)x + k – 5 < 0$ справедливо для всех *x*, удовлетворяющих условию $|x| < 3$?

Решение.

Пусть $f(x) = (\mathbf{k} – 4)x + k – 5$. $f(x) < 0$; k – ?

Случай, к>0

$$\begin{cases} f(-3) < 0, \\ f(3) < 0, \\ k - 4 > 0. \end{cases}$$

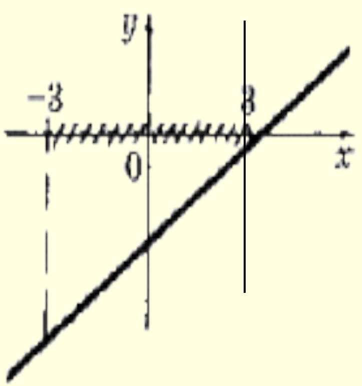
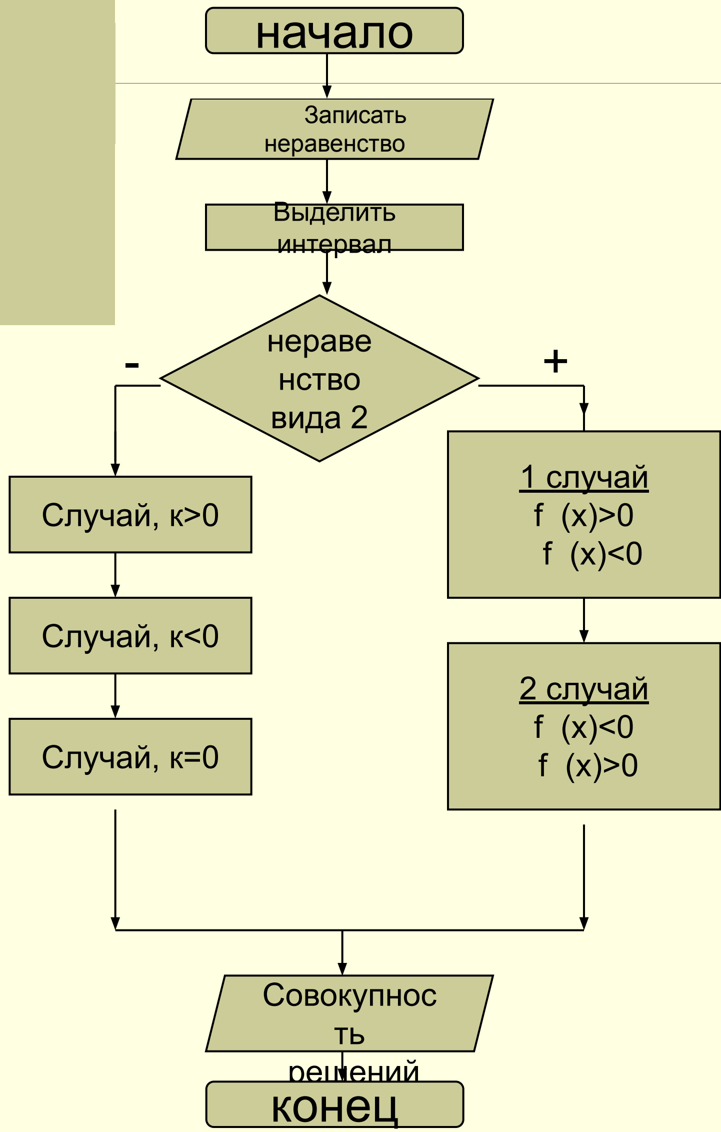


Рис. 1

$$\begin{cases} f(-3) = -3k + 12 + k - 5 = 7 - 2k, \\ f(3) = 3k - 12 + k - 5 = 4k - 17 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k + 7 < 0, \\ 4k - 17 < 0, \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 3,5, \\ k < 4,25, \\ k > 4 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < k < 4,25.$$

Блок – схема



Случай, к<0

$$\begin{cases} f(-3)<0,\\ f(3)<0,\\ k-4<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

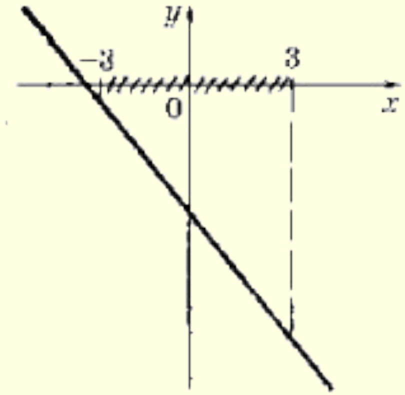


Рис. 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2k+7<0,\\ 4k-17<0,\\ k<4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k>3,5,\\ k<4,25,\\ k<4 \end{cases} \Leftrightarrow 3,5<k<4.$$

Случай, к=0

$$\begin{cases} k-5<0,\\ k-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} k<5,\\ k=4 \end{cases} \Leftrightarrow k=4.$$

Ответ: $3,5 < k < 4,25.$

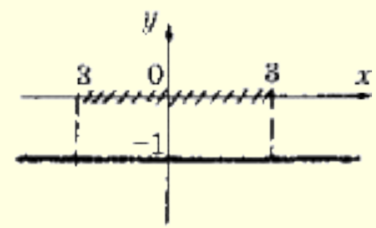
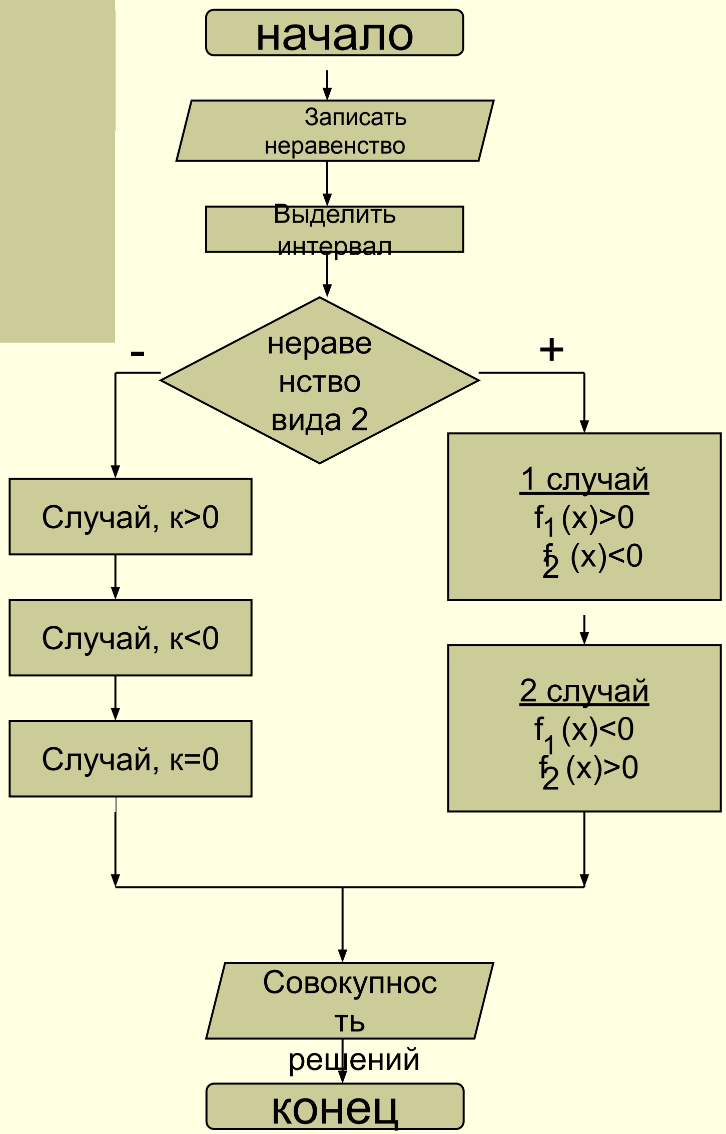


Рис. 3

Истина не передается-
она добивается.
В.Ф. Одоевский

Задача 2. Найти все значения a, при которых для всех x, удовлетворяющих условию $|x| < 1$, справедливо неравенство

$$\frac{2x + a + 9}{x^2 + (2 - a)x - 2a} < 0.$$



Решение.

Упростим

$$x^2 + (2 - a)x - 2a = 0,$$

$$x_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a - 2 \pm \sqrt{4 + 4a + a^2}\right) = \frac{a - 2 \pm (2 + a)}{2},$$

$$x_1 = a,\ x_2 = -2.$$

$\dfrac{2x + a + 9}{(x + 2)(x - a)} < 0.$ Но $x + 2 > 0$ на $[-1;\ 1]$, поэтому

$\dfrac{2x + a + 9}{x - a} < 0$ (рис. 4, 5).

1 случай

Пусть $f_1(x) = 2x + a + 9$ и $f_2(x) = x - a$.

$$\begin{cases} f_1(x) > 0, \\ f_2(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + a + 9 > 0, \\ x - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(-1) > 0, \\ f_2(1) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f_1(-1) = a + 7, \\ f_2(1) = 1 - a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 7 > 0, \\ 1 - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 1.$$

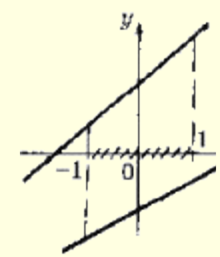


Рис. 4

2 случай

$$\begin{cases} f_1(x) < 0, \\ f_2(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + a + 9 < 0, \\ x - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(-1) > 0, \\ f_1(1) < 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} f_2(-1) = -1 - a, \\ f_1(1) = a + 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - a > 0, \\ a + 11 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -11.$$

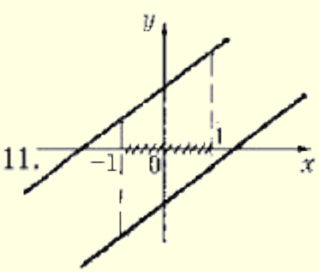


Рис. 5

Ответ: $a < -11;\ a > 1.$

Решение неравенств второй степени

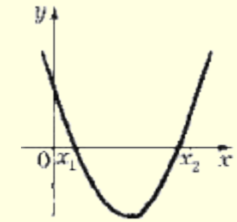


Рис. 6

Определение. Функция, задаваемая формулой $ax^2 + bx + c$, где $a = 0$, называется <u>квадратичной функцией.</u>

График квадратичной функции имеет вид, изображенный на рис. 6, и *называется* параболой. Точка графика с абсциссой $x_0 = -\frac{b}{2a}$ *называется* вершиной параболы, ордината этой точки равна

$$y = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}.$$

При $a > 0$ «ветви» параболы направлены вверх, а при $a < 0$ – вниз. Каждый из этих двух случаев разбивается на три подслучая в зависимости от числа корней уравнения.

При $D = b - 4ac > 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два действительных корня

При $D = 0$ уравнение имеет один корень , задаваемый и в том числе формулой (1).

При $D < 0$ уравнение не имеет действительных корней.

Рассмотрим расположение графика по отношению к оси абсцисс во всех шести случаях (рис. 7).

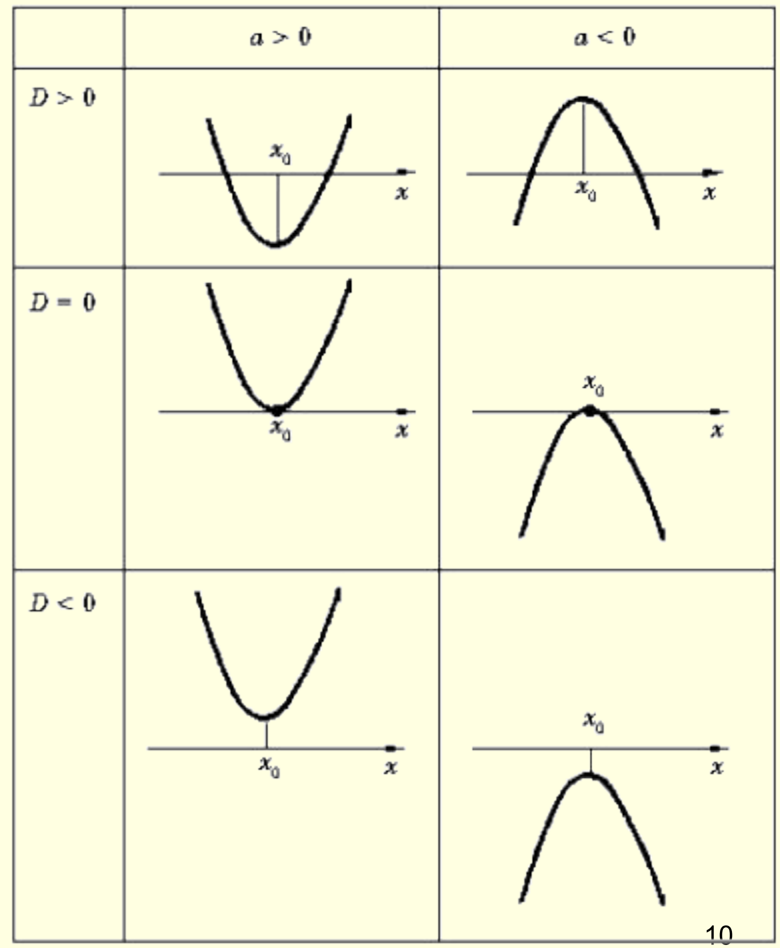


Рис. 7

Алгоритм решения неравенств второй степени (в частности см. задачу 1)

- Записать неравенство
- Выделить интервал, на котором будет рассматриваться решение данного неравенства
- Вычислить дискриминант, значение функции на концах интервала (т.е. D, f(-2), f(1) см. задачу 1)
- Рассмотреть всевозможные случаи расположения графиков для данного неравенства (случаев может быть разное количество)
- Составить систему неравенств для каждого случая, для этого рассмотреть :
  1) коэффициент перед x^2 (в данном случае m , см. задачу 1)
  2) дискриминант
  3) значения функций на концах интервала
- Решить системы неравенств
- В итоге записать совокупность решения систем каждого случая

Задача 1. При каких значениях *m* неравенство $mx^2 - 2(m + 3)x + m < 0$ верно при всех *x*, удовлетворяющих условию $-2 \le x \le 1$?

Решение.

Пусть $f(x) = mx^2 - 2(m + 3)x + m$. Тогда

$$\frac{D}{4} = (m+3)^2 - m^2 = 6m + 9 = 3(2m + 3),$$

$$f(-2) = 4m + 4(m+3) + m = 9m + 12,$$

$$x_0 = \frac{m+3}{m}, \quad m \neq 0.$$

(x- аргумент для вершины параболы)

$$f(1) = m - 2(m+3) + m = -6 < 0.$$

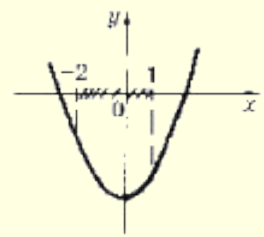


Рис. 8

$$1)\ (\text{рис. } 8.)\ \begin{cases} m > 0, \\ D > 0, \\ f(-2) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ 9m + 12 < 0, \\ -6 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0, \\ m > -1{,}5, \\ m < -\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

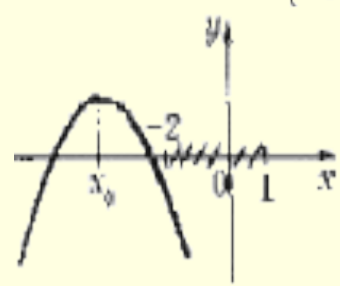


Рис. 9

$$2)\ (\text{рис. } 9.)\ \begin{cases} m < 0, \\ D > 0, \\ x_0 < -2, \\ f(-2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

1

Рубрика «Вопрос – ответ»

Вопрос. Какую нужно преследовать цель при изучении решения неравенств второй степени ?
Ответ. Изучить основные приемы решения.
Выработать умения нахождения приемов решения при решении неравенств смешанных типов.

Вопрос. С чего начинать рассмотрение каждого случая
Ответ. С графического изображения.

Вопрос . Каково минимальное количество случаев, которое может быть при рассмотрении данных неравенств?.
Ответ. Один случай
(см. задачу 2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ \dfrac{m+3}{m} < -2, \\ 9m + 12 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, \\ m > -1,5, \\ m + 3 > -2m, \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1,5 < m < 0, \\ m > -1, \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0, \\ m < -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

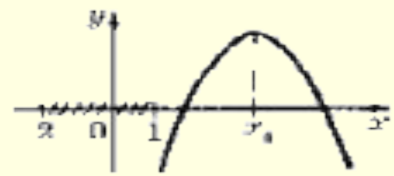


Рис. 10

$$3)\ (\text{рис. } 10.)\ \begin{cases} m < 0, \\ D > 0, \\ f(1) < 0, \\ x_0 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0, \\ 2m + 3 > 0, \\ -6 < 0, \\ m + 3 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1,5, \\ m + 3 < m, \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -1,5 < m < 0, \\ 3 < 0 \end{cases} \Rightarrow \varnothing.$$

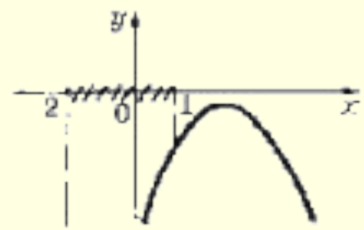


Рис. 11

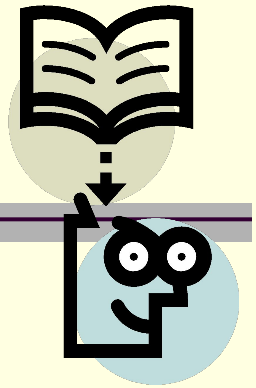
$$4)\ (\text{рис. } 11.)\ \begin{cases} m < 0, \\ D \le 0, \\ f(-2) < 0, \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m < -1,5.$$

Ответ: $m < -1,5$.

Задача 2.

При каких значениях *a* функция $f(x) = -x^3 + 4x^2 - ax - 8$ возрастает на (1; 2)?



Решение.

Напишем производную от $f(x)$ и воспользуемся критерием возрастания:

$f'(x) = -3x^2 + 8x - a > 0$, т. е. $3x^2 - 8x + a < 0$.

Пусть $f(x) = 3x^2 - 8x + a$. Тогда имеем

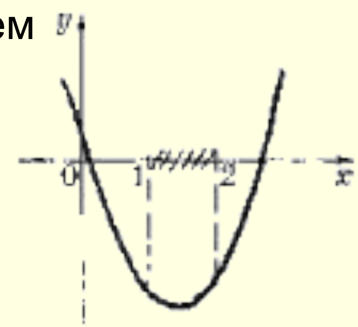


Рис. 12

$$\frac{D}{4} = 16 - 3a,$$

$$\varphi(1) = 3 - 8 + a = a - 5,$$

$$\varphi(2) = 12 - 16 + a = a - 4.$$

$$\begin{cases} D > 0, \\ \varphi(1) < 0, \\ \varphi(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 3a > 0, \\ a - 5 < 0, \\ a - 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < \frac{16}{3}, \\ a < 5, \\ a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a < 4.$$

В задаче 2 приводится как раз пример того задания, когда нужно рассматривать только один случай графического изображения

тест №1

Решение линейных неравенств с параметрами первой степени

1.Что является решением данного неравенства $3x - 6a + 5 < 0$, при $|x| < 3$

1) система решений каждого случая

2) совокупность решений каждого случая

Номер правильного ответа

2.При каких значениях к неравенство $к(x+1)-4x-5<0$, справедливо для $|x|\leq 3$

1) к>6 2) 3,5<к<4,25 3) 3,5<к<4,2 4) к>0

Номер правильного ответа

3.При каких значениях а неравенство $2x - a{*}a + 5 < 0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $| x | < 2$?

1) a<-3;a>3 2) lal<3 3)a>3 4) a<3

Номер правильного ответа

4.При каких значениях m неравенство $(m - 2)x + 2m - 16 < 0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $| x |\geq 5$?

1) m=3 2) m=1 3) m=7,5 4) m =2

Номер правильного ответа

При каких значениях b неравенство $\frac{2x - b - 6}{3x + b + 6} < 0$

верно при всех x, удовлетворяющих условию $| x | \leq 2$?

1) b<-11,b>1 2) b=1 3) b>1 4) b<0

Номер правильного ответа

Ваша оценка

Обработка результатов	
вопрос1	0
вопрос2	0
вопрос3	0
вопрос4	0
вопрос5	0
итого	0

тест N 2

Решение линейных неравенств с параметрами второй степени

1.Что является решением данного неравенства $2x^2- 4a +1 < 0$, при $|x| < 3$

1) система решений каждого случая

2) совокупность решений каждого случая

Номер правильного ответа

2.При каких значениях а неравенство $ax^2 + 2(3 - 2a)x - 24 > 0$, справедливо для $|x|<5$

1) a>6 2) $\varnothing$ 3) 3,5<a<4,2 4)a>0

Номер правильного ответа

3.При каких значениях а неравенство $ax^2 - 2x - a(a^2 + 2) > 0.$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $| x |\leq 3$?

1) a<-3 2) lal<3 3)a>3 4) a<3

Номер правильного ответа

4.При каких значениях а неравенство $ax^2 - x - a(a^2 + 1) > 0$ верно при всех значениях x, удовлетворяющих условию $| x |<2$?

1) a=3 2) a=1 3) a<2 4) a =2

Номер правильного ответа

5. При каких значениях а функция $f(x) = \frac{(a-1)x^3}{3} + (a-1)x^2 + 2x + 1$

возрастаетдля всех $x \in R$.

1) $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$. 2) a=1 3) a>0 4) a<0

Номер правильного ответа

Ваша оценка

Обработка результатов	
вопрос1	0
вопрос2	0
вопрос3	0
вопрос4	0
вопрос5	0
итого	0

Литература

- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2003 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2004 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2007 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2008 г.
- Пособие по подготовке. Математика. ЕГЭ. Централизованное тестирование. Санкт-Петербург.2008 г.
- Репетитор по математике. А.И. Замыслова.
- Задачи вступительных экзаменов по математике.

  В.С. Белоносов.
- Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа. В.С. Крамор.
- 1С-репетитор по математике .ЕГЭ .(Диск CD-R)