



Геометрия

Сечение

*Вдохновение в геометрии
нужно также как и в поэзии*

**МОУ Серковская СОШ
Цитович Алексей
Федорова Ирина Юрьевна**

Цели:

- **Показать свои знания основного теоретического материала по темам «Аксиомы стереометрии», «Параллельность прямой и плоскости», «Параллельность плоскостей», «Перпендикулярность прямой и плоскости»;**
- **Научиться работать с инструментами: вставка объекта и надписи, прямые, тип линий, тип штриха, цвет линий, эллипс, группировка объектов, эффекты и настройка анимации, управляющие кнопки, WordArt;**
- **Развитие способности практического применения основных теорем и аксиом стереометрии при построении сечений;**
- **научиться планировать свою деятельность.**



Содержание:

- **Список применяемых теорем**
- **Проектное задание №1**
- **Проектное задание №2**
- **Проектное задание №3**
- **Проектное задание №4**
- **Проектное задание №5**
- **Проектное задание №6**
- **Проектное задание №7**
- **Проектное задание №8**
- **Проектное задание №9**
- **Мои инструменты**
- **Выводы**

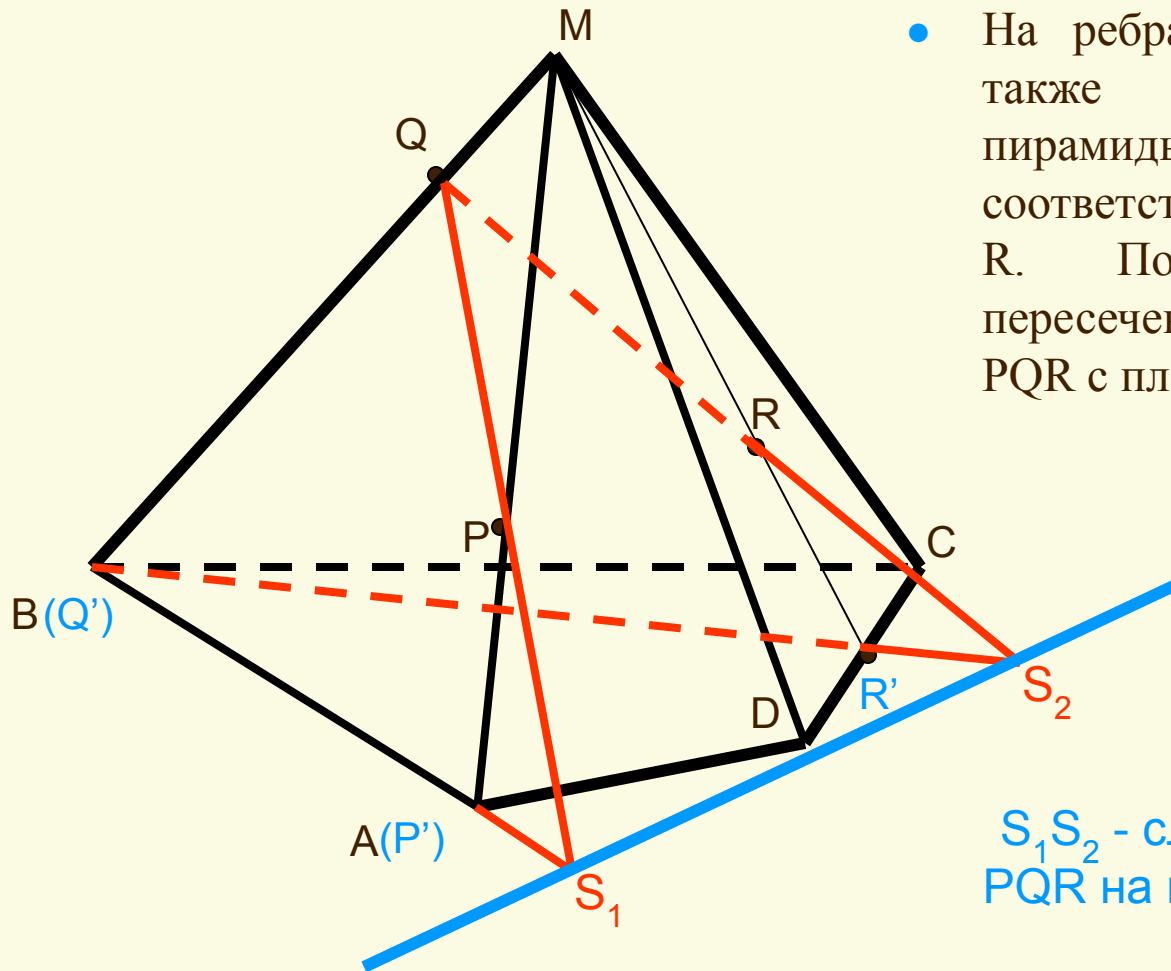


Сводный список применявшихся теорем:



- C_2 : Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.
- C_3 : Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.
- **Теорема 15.1** : Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.
- **Теорема 15.2** : Если две точки прямой принадлежат этой плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.
- **Теорема 15.3** : Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.
- **Теорема 16.1** : Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.
- **Теорема 16.2** : Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.
- **Теорема 16.3** : Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-ни будь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.
- **Свойство параллельных плоскостей**: Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.
- **Свойство перпендикулярных прямой и плоскости**: Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.
- **Признак перпендикулярности прямой и плоскости**: Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Проектное задание №1:



- На ребрах MA и MB, а также в грани MCD взяты соответственно точки P, Q и R. Построить линию пересечения плоскости PQR с плоскостью ABC.

Решение:

S_1S_2 - след плоскости PQR на плоскости ABC

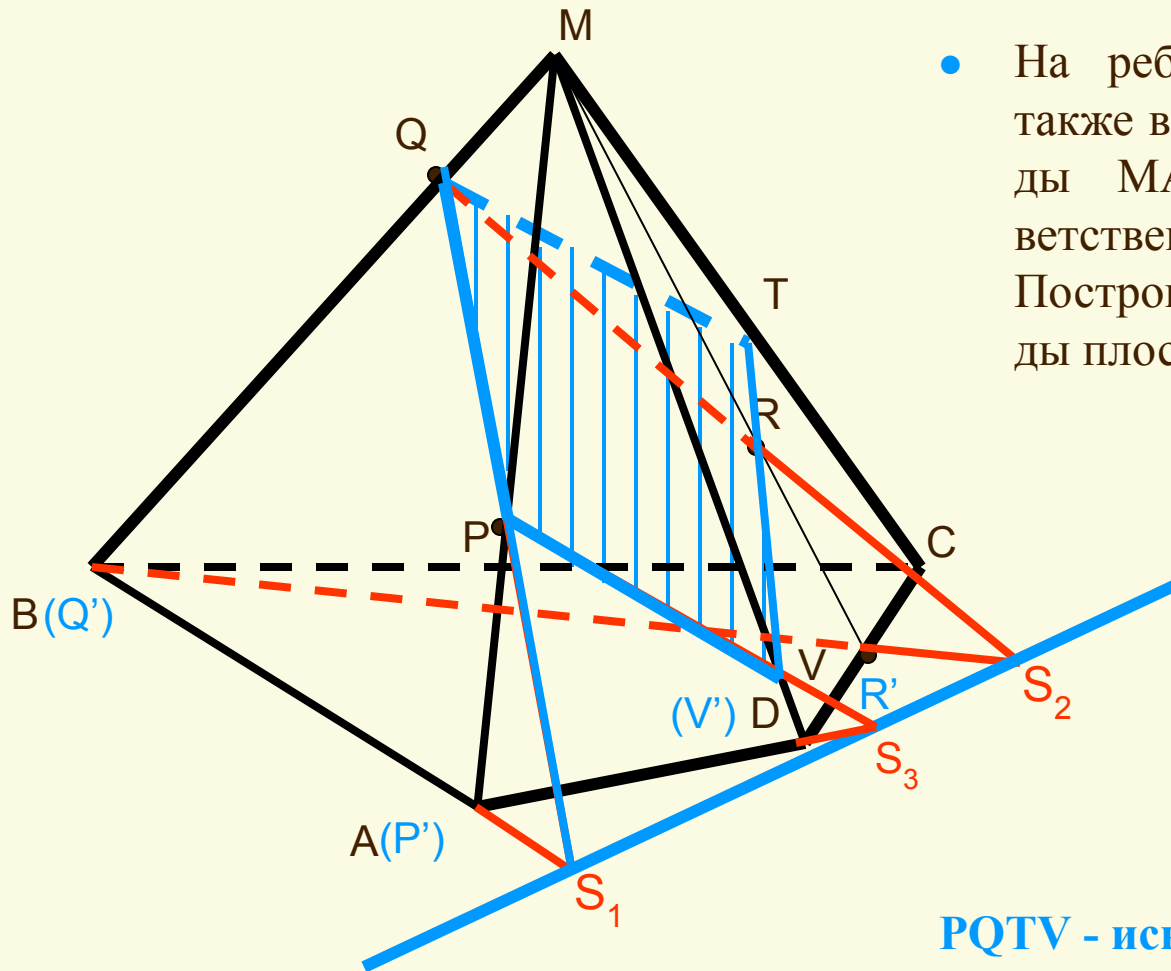
Решение:



- Построим точки P' , Q' , R' - проекции соответственно точек P , Q , R на плоскость ABC .
- Прямые PQ и $P'Q'$ лежат в одной плоскости. Найдем точку S_1 , в которой пересекаются эти прямые. По теореме 15.2. точка S_1 является общей точкой плоскостей PQR и ABC . По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_1 .
- Аналогично найдем точку S_2 , в которой пересекаются прямые QR и $Q'R'$ и которая является общей для плоскостей PQR и ABC . По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_2 .
- Проведём прямую $S_1 S_2$. По теореме 15.2. Эта прямая лежит как в плоскости ABC , так и в плоскости PQR . Таким образом, прямая $S_1 S_2$ - это искомая линия пересечения.

Линию пересечения двух плоскостей называют также *следом* одной из них на другой.

Проектное задание №2:



- На ребрах MA и MB , а также в грани MCD пирамиды $MABCD$ взяты соответственно точки P , Q и R . Построить сечение пирамиды плоскостью PQR .

Решение:

$PQTV$ - искомое сечение

Решение:



- Построим прямую S_1S_2 - след плоскости PQR на плоскости ABC.
- Линия пересечения плоскости PQR с плоскостью MAB - прямая QS_1 , а отрезок QR - это пересечение плоскости PQR с гранью MAB.
- Точка R является общей точкой плоскостей PQR и MAD. Эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку R (по Т 15.2.). Проекция точки пересечения прямой MD с плоскостью PQR на плоскость ABC совпадает с точкой D. Пересечение $P'V'$ с прямой S_1S_2 дает точку S_3 . Точка S_3 является общей точкой плоскостей PQR и MAD. Эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_3 (по Т 15.2.).
- Точки R и S_3 являются общими для плоскостей PQR и MAD. Значит, прямая PS_3 - это линия пересечения этих плоскостей. Проведем её и найдём точку V, в которой прямая PS_3 пересекает MD. Отрезок PV является пересечением плоскости PQR с гранью MAD.
- Точки R и V являются общими для плоскостей PQR и MCD. Значит, прямая RV - это линия пересечения этих плоскостей. Найдём точку T, в которой прямая RV пересекает MC. Отрезок VT является пересечением плоскости PQR с гранью MCD.
- Отрезок QT - это пересечение плоскости PQR с гранью MBC

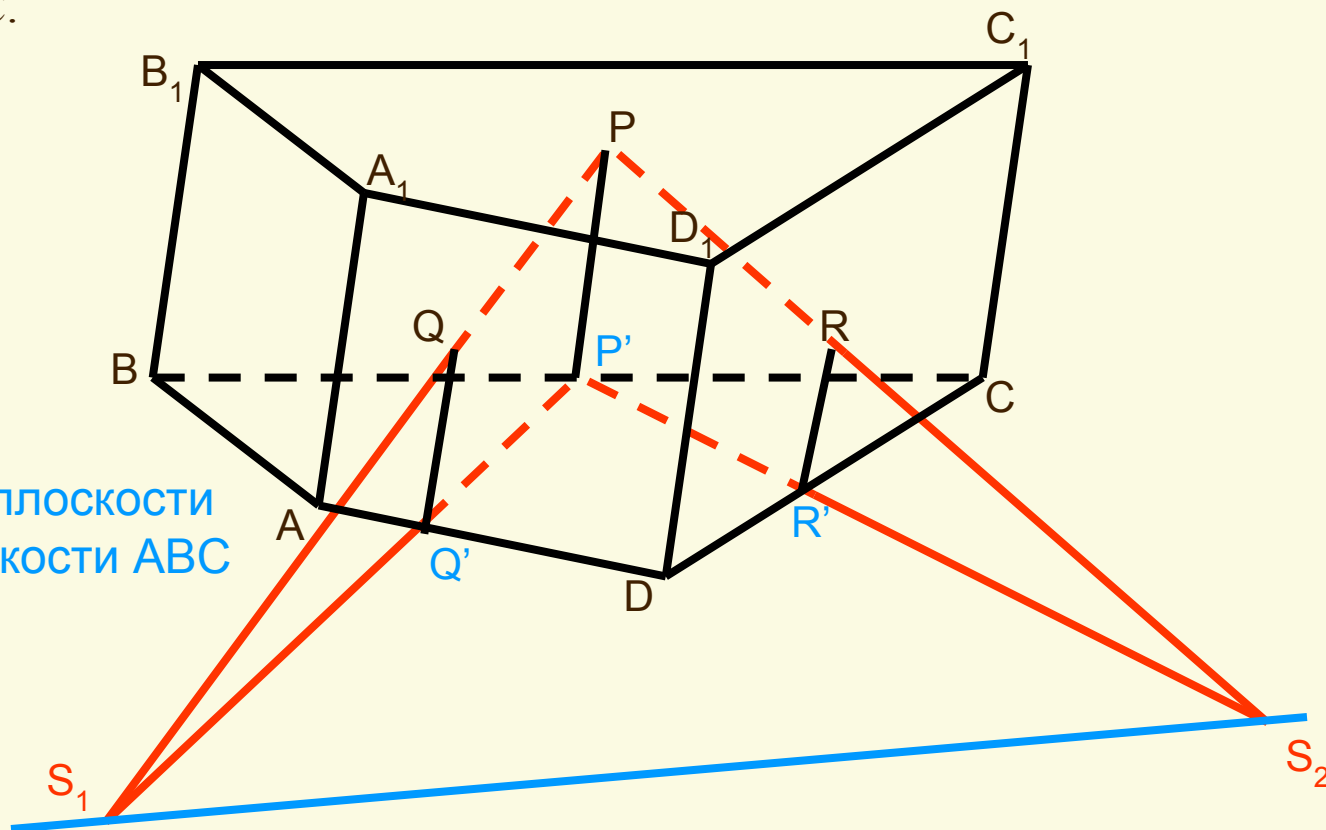
РQTV - искомое сечение

Проектное задание №3:

- В гранях BCC_1B_1 , ADD_1A_1 и CDD_1C_1 призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P , Q , R . Построим линию пересечения плоскостей PQR и ABC .

Решение:

S_1S_2 - след плоскости PQR на плоскости ABC



Решение:

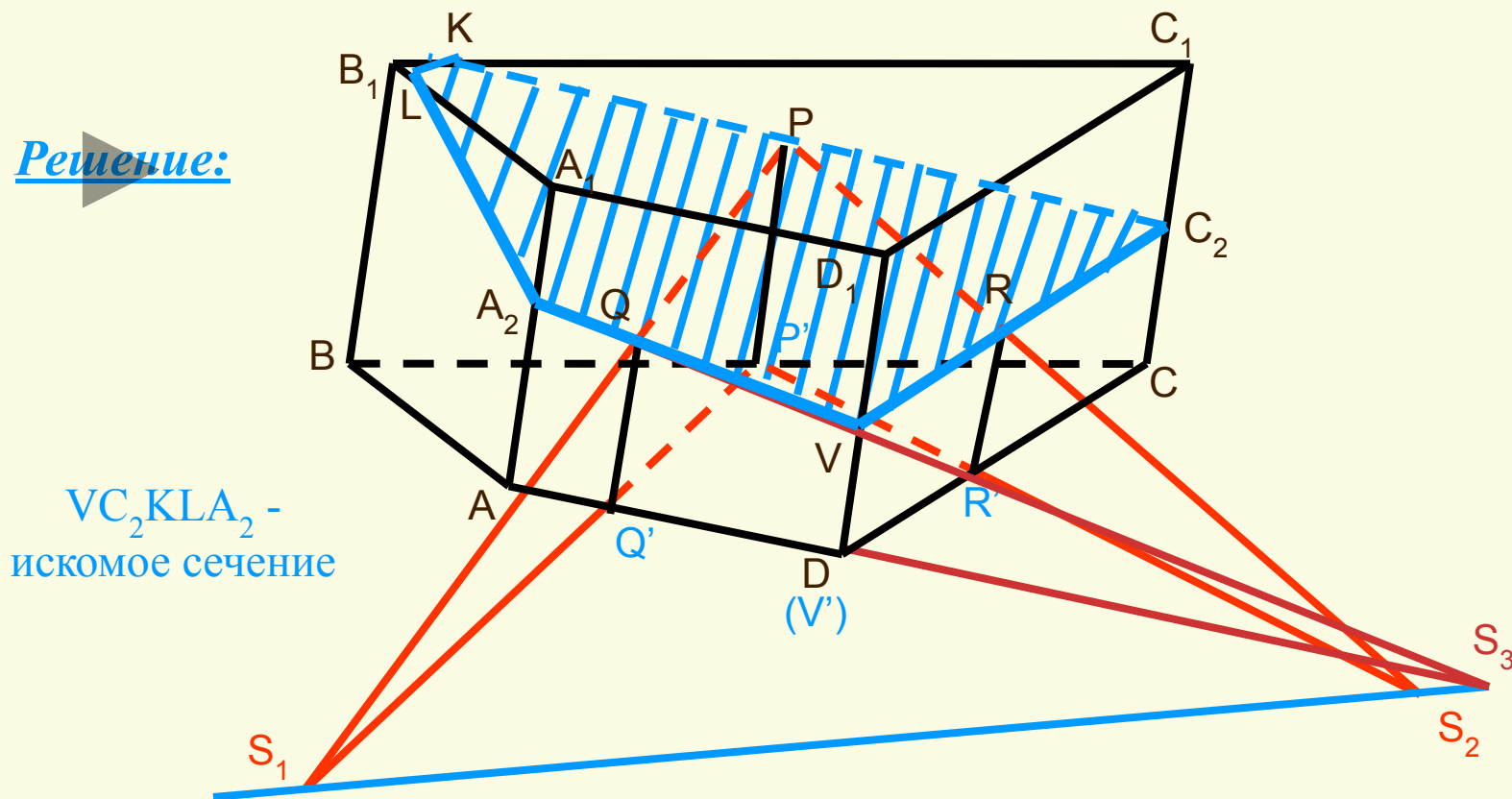


- Построим точки P' , Q' , R' - проекции соответственно точек P , Q , R на плоскость ABC .
- Так как $BB_1 \parallel AA_1$, $BB_1 \parallel PP'$, $AA_1 \parallel QQ'$, то $PP' \parallel QQ'$ и, значит, определяют плоскость. Прямые PQ и $P'Q'$ лежат в одной плоскости. Найдем точку S_1 , в которой пересекаются эти прямые. По теореме 15.2. точка S_1 является общей точкой плоскостей PQR и ABC . По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_1 .
- Так как $CC_1 \parallel PP'$, $CC_1 \parallel RR'$, то $PP' \parallel RR'$ и, значит, определяют плоскость. Аналогично найдем точку S_2 , в которой пересекаются прямые QR и $Q'R'$ и которая является общей для плоскостей PQR и ABC . По аксиоме C_2 эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_2 .
- Проведём прямую $S_1 S_2$. По теореме 15.2. Эта прямая лежит как в плоскости ABC , так и в плоскости PQR . Таким образом, прямая $S_1 S_2$ - это искомая линия пересечения.

Проектное задание №4:

- В гранях BCC_1B_1 , ADD_1A_1 и CDD_1C_1 призмы $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки P , Q , R . Построим сечение призмы плоскостью PQR .

Решение:



Решение:

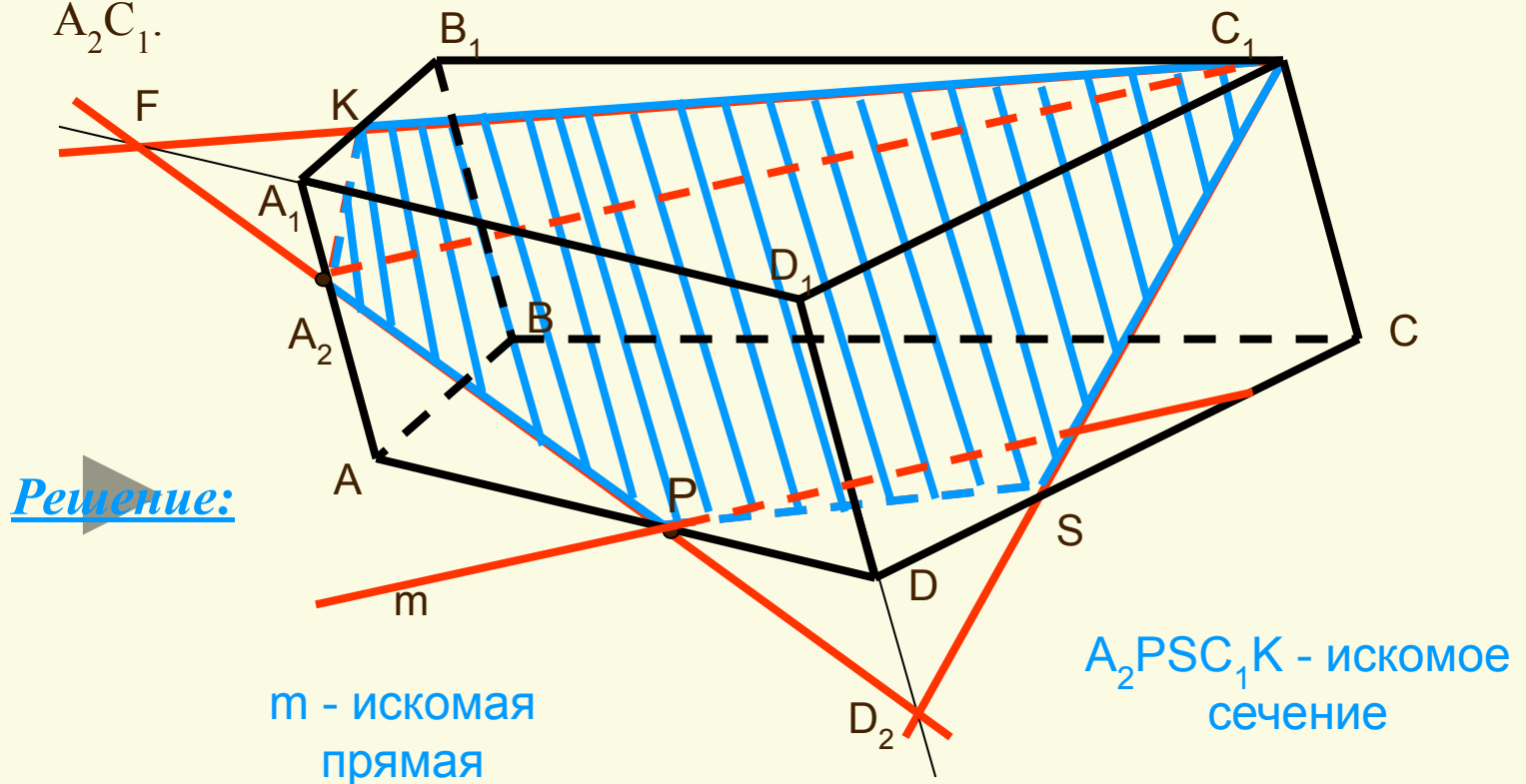


- Построим прямую S_1S_2 - след плоскости PQR на плоскости ABC.
- Точка Q является общей для плоскостей PQR и ADD_1 . Они пересекаются по прямой, проходящей через точку Q (по Т 15.2.). Проекция точки пересечения прямой DD_1 с плоскостью PQR на плоскость ABC совпадает с точкой D. Пересечение $Q'V'$ с прямой S_1S_2 дает точку S_3 . Точка S_3 является общей для плоскостей PQR и ADD_1 . Эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через точку S_3 (по Т 15.2.).
- Точки Q и S_3 являются общими для плоскостей PQR и ADD_1 . Значит, прямая QS_3 - это линия пересечения этих плоскостей. Проведем её и найдём точки V (точка пересечения прямых QS_3 и DD_1) и A_2 (точка пересечения прямых QS_3 и AA_1). Отрезок A_2V является пересечением плоскости PQR с гранью ADD_1A_1 .
- Точки R и V являются общими для плоскостей PQR и C_1CD . Значит, прямая RV - это линия пересечения этих плоскостей. Найдём точку C_2 , в которой прямая RV пересекает CC_1 . Отрезок VC_2 является пересечением плоскости PQR с гранью C_1CDD_1 .
- Рассуждая аналогично найдем отрезок C_2K , который является пересечением плоскости PQR с гранью C_1CBB_1 .
- По свойству параллельных плоскостей прямые $S_1S_2 \parallel KL$, где K - это точка пересечения ребра B_1A_1 с плоскостью PQR.

VC_2KLA_2 - искомое сечение

Проектное задание №5:

- На ребрах AA_1 и AD призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки A_2 и P . Через точку P проведем прямую m , параллельную прямой $A_2 C_1$.



Решение:



- Проведём прямую A_2P и найдем точки пересечения A_2P с DD_1 и A_1D_1 (D_2 и F соответственно).
- Проведем прямую D_2C_1 и найдем S - точку пересечения прямых D_2C_1 и CD .
- Проведём прямую SP .
- Проведём прямую C_1F и найдём K - точку пересечения C_1F и A_1B_1 .
- Соединим точку A_2 с точкой K

A_2PSC_1K - сечение призмы

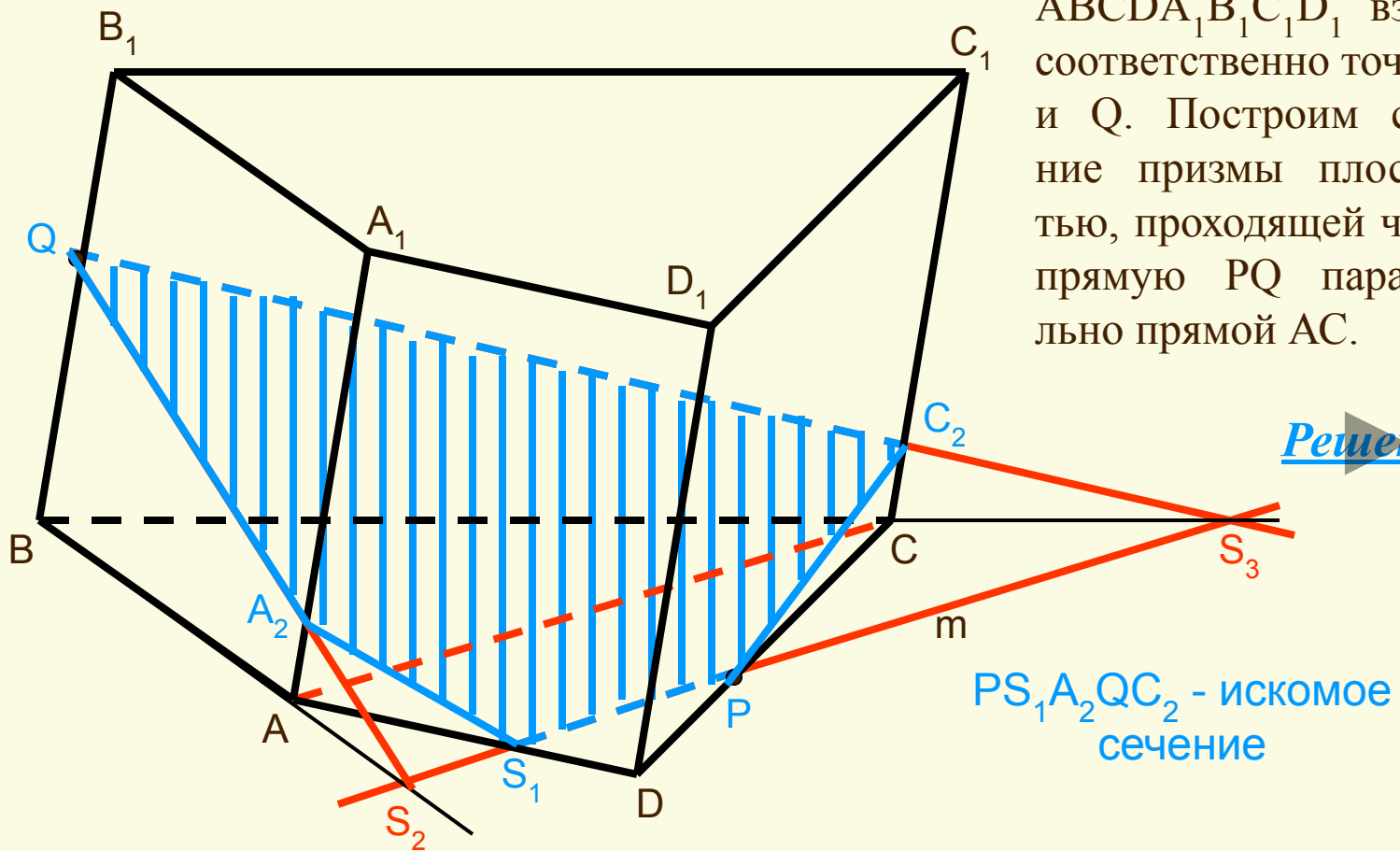
- В плоскости A_2C_1P через точку P проведем прямую $m \parallel A_2C_1$ и найдем Y - точка пересечение прямых m и D_2C_1 .

PY -искомая прямая

- Замечание: Прямые PS и KC_1 получились параллельными. Закономерность этого факта обосновывается свойством параллельных плоскостей ABC и $A_1B_1C_1$.

Проектное задание №6:

- На ребрах CD и BB_1 призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки P и Q . Построим сечение призмы плоскостью, проходящей через прямую PQ параллельно прямой AC .



Решение:

Решение:

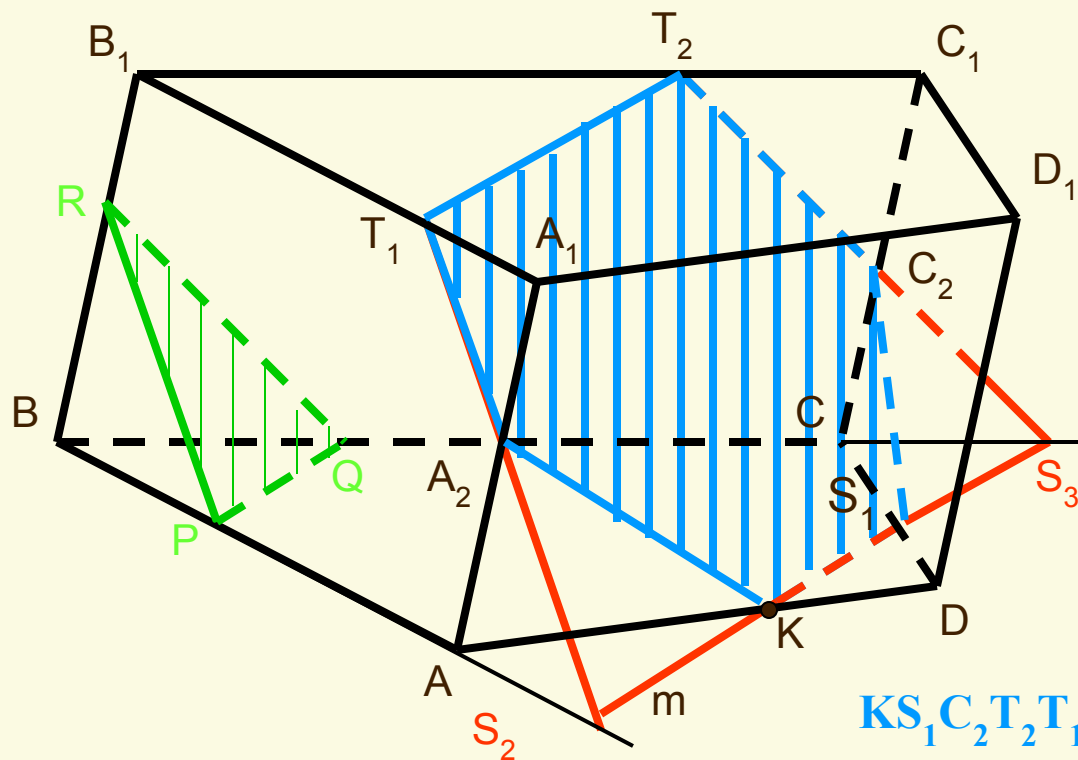


- В плоскости ABC проведём прямую $m \parallel AC$.
- Найдём S_1, S_2, S_3 - точки пересечения прямой m с прямыми AD, AB, BC соответственно.
- Прямая QS_2 - линия пересечения секущей плоскости с плоскостью ABB_1 . Найдём A_2 - точку пересечения прямых AA_1 и QS_2 . Отрезок QA_2 является пересечением секущей плоскости с гранью ABB_1A_1 .
- Прямая QS_3 - линия пересечения секущей плоскости с плоскостью BCC_1 . Найдём C_2 - точку пересечения прямых CC_1 и QS_3 . Отрезок QC_2 является пересечением секущей плоскости с гранью BCC_1C_1 .
- Соединим точку A_2 с точкой S_1 и точку C_2 с точкой P . Отрезки A_2S_1 и C_2P являются пересечениями секущей плоскости соответственно с гранями ADD_1A_1 и CDD_1C_1 .

$PS_1A_2QC_2$ - искомое сечение

Проектное задание №7:

- На ребрах AB , BC и BB_1 призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ взяты соответственно точки P , Q и R . Построим сечение призмы плоскостью, параллельной плоскости PQR и проходящей через точку K взятую на ребре AD .



Решение:

$KS_1C_2T_2T_1A_2$ - искомое сечение

Решение:



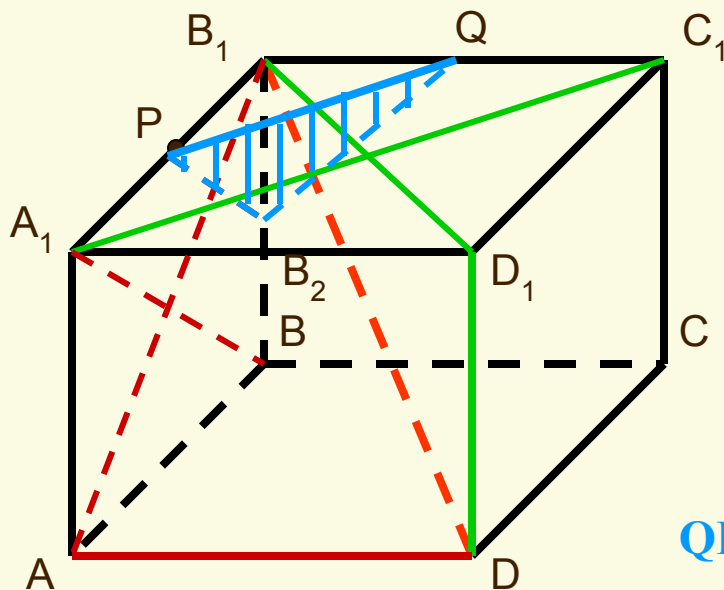
- В плоскости ABC через точку K проведём прямую $m \parallel PQ$.
- Найдем S_1, S_2, S_3 - точки пересечения прямой m с прямыми CD, AB, BC соответственно.
- В плоскости ABV_1 через точку S_2 прямую $n \parallel PR$.
- Найдем A_2, T_1 - точки пересечения прямой n с прямыми AA_1, V_1A_1 соответственно.
- В плоскости CBV_1 через точку S_3 прямую $k \parallel QR$.
- Найдем C_2, T_2 - точки пересечения прямой k с прямыми CC_1, V_1C_1 соответственно.
- Соединим точку T_1 с точкой T_2 , точку S_1 с точкой C_2 , точку A_2 с точкой K .

$KS_1C_2T_2T_1A_2$ - искомое сечение

- Замечание: Прямые KS_1 и T_1T_2 получились параллельными. Закономерность этого факта обосновывается свойством параллельных плоскостей ABC и $A_1V_1C_1$.

Проектное задание №8:

- На ребре A_1B_1 куба $ABCD A_1B_1C_1D_1$ взята точка P - середина этого ребра. Построим сечение куба плоскостью, проходящей через точку P перпендикулярно прямой B_1D .



Решение:

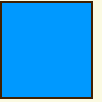
$QP B_2$ - искомое сечение

Решение:



- Так как A_1C_1 перпендикулярна V_1D_1 и A_1C_1 перпендикулярна DD_1 , то по признаку перпендикулярности прямой и плоскости прямая A_1C_1 перпендикулярна плоскости DD_1V_1 .
- Проведём в плоскости $A_1V_1C_1$ через точку P прямую $PQ \parallel A_1C_1$. По свойству перпендикулярных прямой и плоскости прямая PQ перпендикулярна плоскости DD_1V_1 , и, следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, PQ перпендикулярна V_1D .
- Рассуждая аналогично, проведём через точку P в плоскости ABV_1 прямую $PV_2 \parallel A_1B$. Тогда PV_2 перпендикулярна V_1D .
- Так как прямая V_1D (по построению) перпендикулярна двум пересекающимся прямым PQ и PV_2 , то плоскость, определяемая этими прямыми, перпендикулярна прямой V_1D .

QPV_2 - искомое сечение

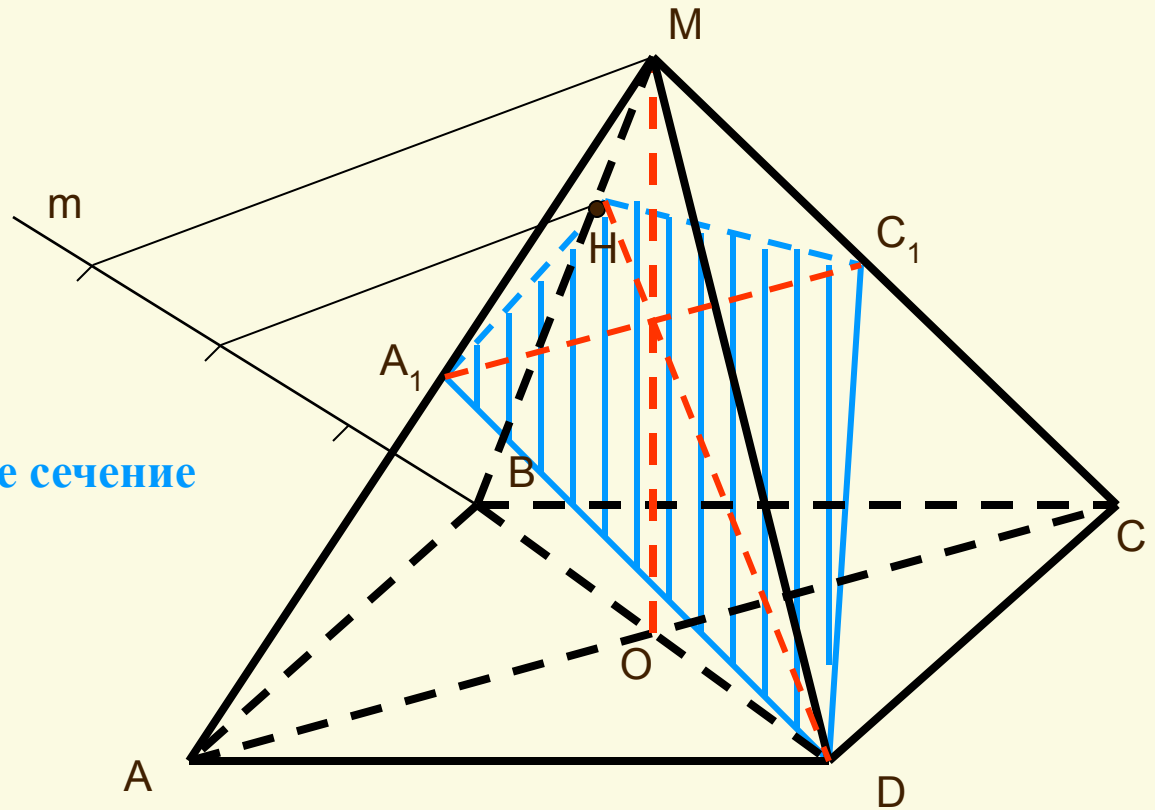


Проектное задание №9:

- Высота MO правильной пирамиды $MABCD$ равна стороне ее основания. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину D перпендикулярно прямой MB .

Решение:

DA_1HC_1 - искомое сечение



Решение:



$$MO = a, BD = a\sqrt{2}, BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$MB = MD = \sqrt{MO^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$DB^2 - BH^2 = DM^2 - MH^2, \text{ или}$$

$$2a^2 - BH^2 = \frac{6a^2}{4} - MH^2, \text{ т.к. } MH = MB - BH$$

$$\text{получим } 2a^2 - BH^2 = \frac{6a^2}{6} - \left(\frac{a\sqrt{6}}{2} - BH\right)^2,$$

$$\text{находим } BH = \frac{2a}{\sqrt{6}}.$$

$$BH : BM = \frac{2a}{\sqrt{6}} : \frac{a\sqrt{6}}{2} = 2 : 3.$$

- В плоскости BMD опустим перпендикуляр из точки D на прямую MB. Выполним это построение вычислительным способом. Для построения точки H подсчитаем, что отношение BH:BM=2:3. Зная это отношение параллельных отрезков BH и BM, построим с помощью вспомогательного луча m точку H и проведем затем прямую DH.
- Проведем в плоскости MAC через точку пересечения прямых DH и MO прямую $A_1C_1 \parallel AC$. По свойству перпендикулярных прямой и плоскости AC перпендикулярна плоскости BDM. Следовательно, она перпендикулярна любой прямой, лежащей в этой плоскости. В частности, A_1C_1 перпендикулярна MB.
- Пересекающимися прямыми A_1C_1 и DH определяется плоскость, проходящая через точку D перпендикулярно прямой MB.

DA_1HC_1 - искомое сечение

МОИ ИНСТРУМЕНТЫ:

При выполнении данного проекта мою деятельность можно разделить на три этапа:

- работа с текстом;
- геометрические построения;
- анимация.



При работе с текстом я использовала: вставку надписи, цвет текста, нижний индекс, шрифт, размер шрифта.

Для геометрического построения мне были необходимы инструменты: линии, цвет линии, тип линии, тип штриха, овал.

Для того чтобы выполнить анимацию мне был нужен инструмент-группировка. Без него анимация была бы трудоемкой.

Я старалась выдержать проект в едином стиле.

ВЫВОДЫ:



Создавая проект, я поняла:

- технологию применения основных аксиом и теорем стереометрии;***
- за чем нужен и как пользоваться инструментом группировка.***

Этот проект научил меня:

- строить сечение многогранников;***
- делать выноски и пользоваться управляющими кнопками.***

Из опыта работы по этому проекту в дальнейшем мне пригодится:

- способности планировать свою деятельность и оформлять наглядно и стильно любую работу;***
- навык работы с инструментами: группировка и управляющие кнопки.***