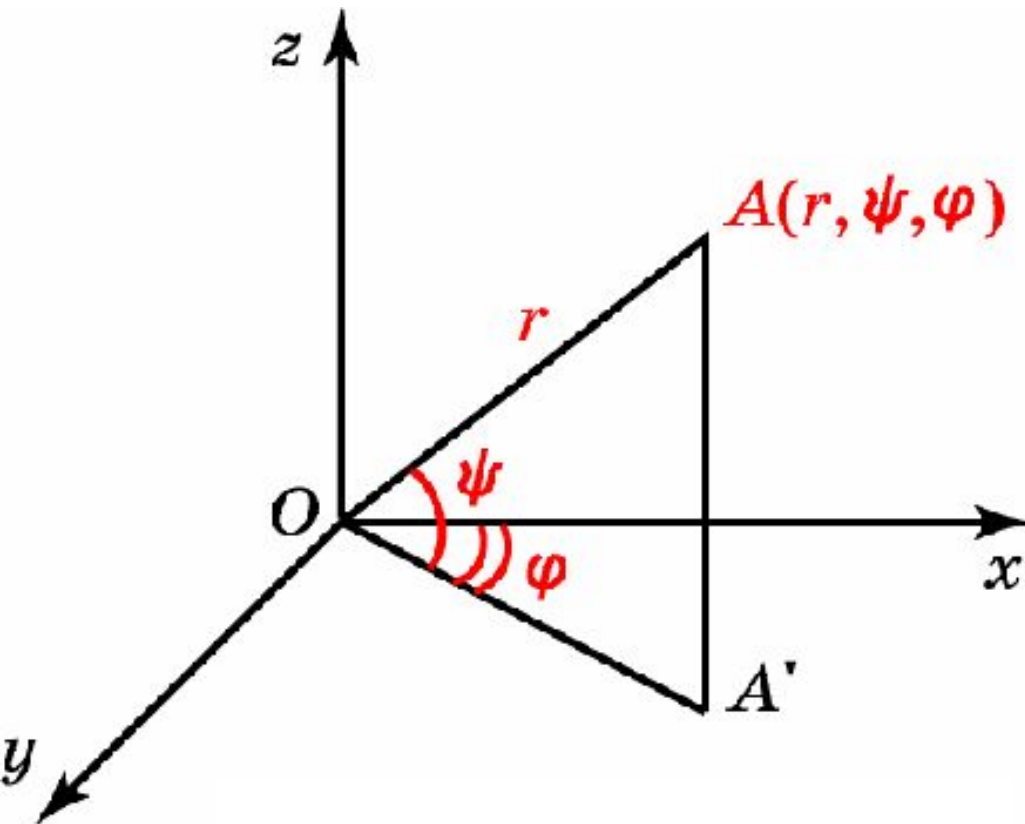


Сферические координаты

Пусть A – точка в пространстве с заданной системой координат. Ортогональную проекцию точки A на плоскость Oxy обозначим A' , а длину вектора OA – через r . Угол наклона вектора к плоскости Oxy обозначим ψ , причем будем считать его изменяющимся от -90° до $+90^\circ$.



Если точка A расположена в верхнем полупространстве, то угол ψ считается положительным, а если в нижнем, то отрицательным. Угол между вектором и осью Ox обозначим φ . Тройка (r, ψ, φ) называется **сферическими координатами** точки A в пространстве.

Сферические координаты

Декартовы координаты (x, y, z) точки в пространстве выражаются через ее сферические координаты по формулам

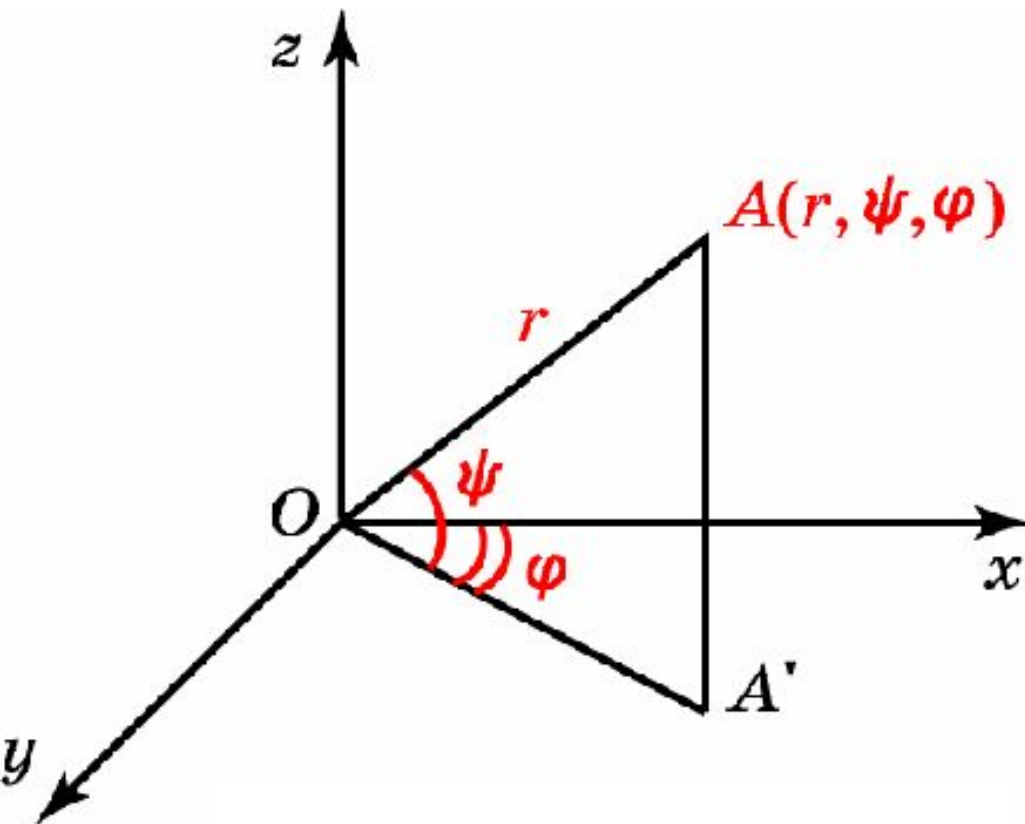
$$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \varphi, \\ y = r \cos \psi \sin \varphi, \\ z = r \sin \psi, \end{cases}$$

и, наоборот, если заданы декартовы координаты, то по ним можно найти сферические координаты по формулам

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

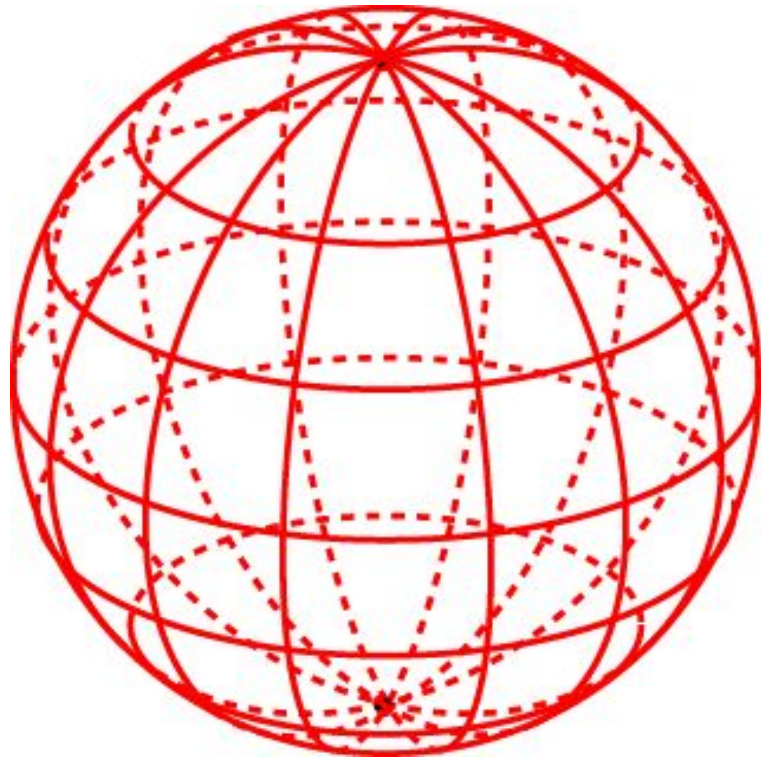
$$\sin \psi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$



Сферические координаты

Точки на сфере, имеющие одинаковый угол ψ , образуют окружность, которая называется **параллелью**. Точки, имеющие одинаковый угол φ , образуют полуокружность, называемую **меридианом**.



Дуга большой окружности, соединяющая две точки сферы, является кратчайшим путем на сфере между этими двумя точками. Такой путь называют **ортодромией**, что в переводе с греческого означает "прямой бег".

Кривая, образующая равные углы с разными меридианами, называется **локсодромия**, что в переводе с греческого означает "косой бег".

Упражнение 1

Найдите декартовы координаты следующих точек пространства, заданных своими сферическими координатами:
 $(1, 45^\circ, 120^\circ)$, $(2, -30^\circ, -90^\circ)$, $(1, 90^\circ, 60^\circ)$.

Ответ: $(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(0, -\sqrt{3}, -1)$, $(0, 0, 1)$.

Упражнение 2

Найдите сферические координаты следующих точек пространства, заданных своими декартовыми координатами:
 $A(1,1,1)$, $B(-1,0,1)$, $C(0,0,2)$.

Ответ: A : $r = \sqrt{3}$, $\sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$B(\sqrt{2}, 45^\circ, 180^\circ)$; $C(2, 90^\circ, 0^\circ)$.

Упражнение 3

Найдите сферические координаты вершин куба, задаваемого в декартовых координатах системой неравенств

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1, \\ 0 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Ответ: $(0, 0^\circ, 0^\circ)$; $(1, 0^\circ, 0^\circ)$; $(\sqrt{2}, 0^\circ, 45^\circ)$; $(1, 0^\circ, 90^\circ)$; $(1, 90^\circ, 0^\circ)$; $(\sqrt{2}, 45^\circ, 0^\circ)$; $(\sqrt{3}, \psi, \phi)$, $\sin \psi = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\sin \phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $(\sqrt{2}, 45^\circ, 90^\circ)$.

Упражнение 4

Точка A имеет сферические координаты (r, ψ, ϕ) . Найдите сферические координаты точки, симметричной данной, относительно: а) координатных плоскостей; б) осей координат; в) начала координат.

Ответ: а) $(r, -\psi, \phi)$, $(r, \psi, 180^\circ - \phi)$, $(r, \psi, -\phi)$;

б) $(r, -\psi, -\phi)$, $(r, -\psi, 180^\circ - \phi)$, $(r, \psi, 180^\circ + \phi)$;

в) $(r, -\psi, 180^\circ + \phi)$.

Упражнение 5

Найдите геометрическое место точек пространства, сферические координаты которых удовлетворяют условиям: а) r постоянно; б) ψ постоянно; в) ϕ постоянно.

Ответ: а) Сфера;

б) коническая поверхность;

в) полуплоскость.

Упражнение 6

Какая фигура в пространстве задается неравенствами: а) $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi$; б) $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi$; в) $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \psi, 0 \leq \phi \leq \pi$?

Ответ: а) Полушар;

б) полушар;

в) четверть шара.

Упражнение 7

Найдите расстояние между точками, заданными своими сферическими координатами: $A(\sqrt{2}, 0^\circ, 45^\circ)$, $B(2, 60^\circ, 0^\circ)$.

Ответ: 2.

Упражнение 8

Где закончится локсодромия, образующая острый угол с меридианами, при ее продолжении в обе стороны?

Ответ: На полюсах.

Упражнение 9

Напишите уравнение сферы в сферических координатах

Ответ: $r = 1$.

Упражнение 10

Найдите длины дуг локсодромии и ортодромии, соединяющих точки $A_1(R, 45^\circ, 0^\circ)$, $A_2(R, 45^\circ, 180^\circ)$ на сфере.

Ответ: $\pi R \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\pi R}{2}$.