Симметрические системы уравнений

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Автор: Гончаровская Алина
учащаяся 11 класса
МОУ Рощинской СОШ
«Образовательный центр»

Руководитель: Пятовская Людмила Петровна – учитель математики высшей категории

2008-2009 учебный год

Оглавление

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Введение

Проблема моего проекта заключается в том, что для успешной сдачи ЕГЭ требуется умение решать различные системы уравнений, а в курсе средней школы им отведено недостаточно времени, необходимого познать этот вопрос глубже.

Цель работы: подготовиться к успешной сдачи ЕГЭ.

Задачи работы:

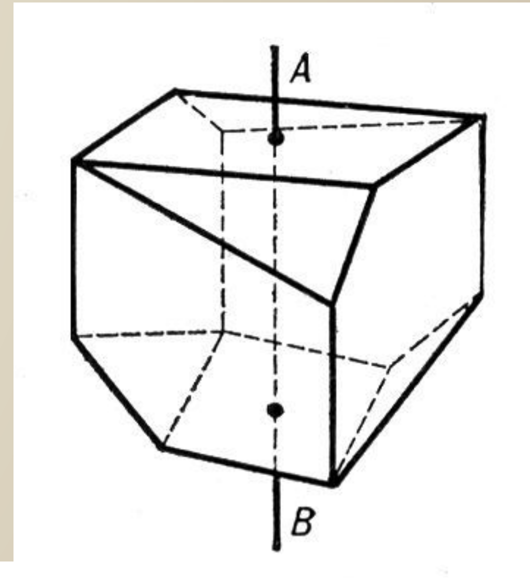
- Расширить свои знания в области математики, связанные с понятием «симметрия».
- Повысить свою математическую культуру, используя понятие «симметрия» при решении систем уравнений, называемых симметрическими, а также других задач математики.

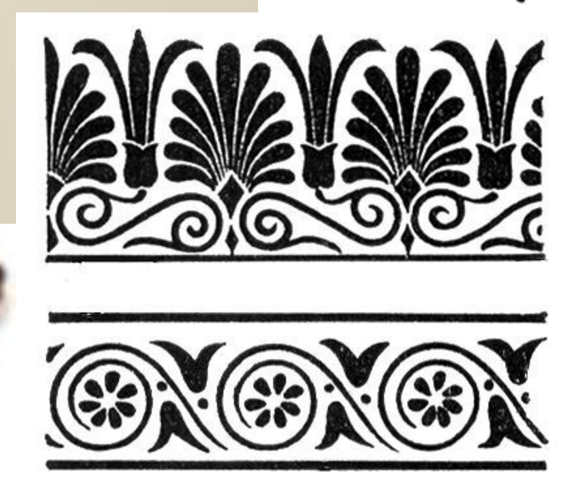
Понятие симметрии.

- **Симме́три́я** — (др.-греч. συμμετρία), в широком смысле — неизменность при каких-либо преобразованиях. Так, например, сферическая симметрия тела означает, что вид тела не изменится, если его вращать в пространстве на произвольные углы. Двусторонняя симметрия означает, что право и лево относительно какой-либо плоскости выглядят одинаково.

Симметрия бывает:

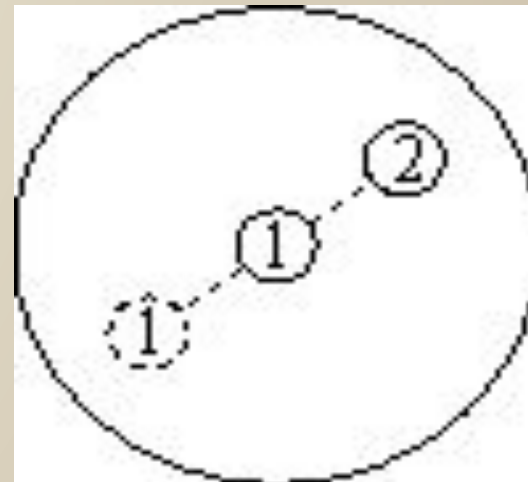
- двусторонняя;
- симметрия n-порядка;
- аксиальная;
- сферическая;
- трансляционная





Решение задач при помощи симметрии.
Задача №1

Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол, причём монеты не должны накрывать друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Иначе говоря, у какого из игроков есть выигрышная стратегия?)

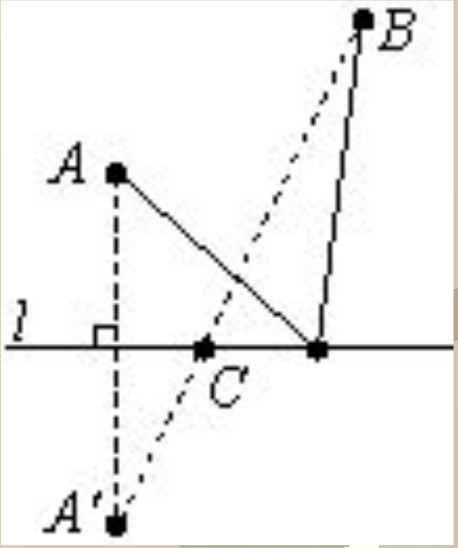


Решение. При правильной игре выигрывает тот, кто начинает - первый игрок. Вот его стратегия. Первым ходом он кладёт монету в центр стола. Затем после каждого хода второго первый кладёт монету симметрично монете, только что положенной вторым, относительно центра стола (рис. 1). Очевидно, если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, первый игрок побеждает.

Задача №2

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

На плоскости дана прямая *l* и точки *A* и *B* по одну сторону от неё. Нужно найти на прямой такую точку *C*, чтобы сумма длин отрезков *AC* и *BC* была минимальна.



Решение. Построим точку *A'*, симметричную *A* относительно прямой *l*. Заметим, что для любой точки *C*, лежащей на прямой *l*, *AC=A'C*. Поэтому

AC+BC=A'C+BC.

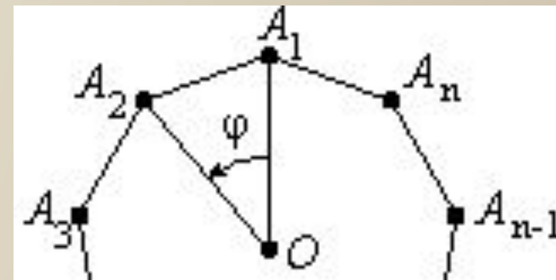
В силу неравенства треугольника сумма *A'C+BC* минимальна тогда и только тогда, когда точка *C* лежит на отрезке *A'B* (рис. 2). Итак, *C=A'B l*.

Задача №3

На плоскости дан правильный *n*-угольник *A1A2... An*, точка *O* - его центр (рис. 3). Найти вектор .

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n}$$

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011



Решение. Введём обозначения: φ= *A1OA2*, R_φ- поворот на угол φ с центром в точке *O* (т. е. $R_\varphi \vec{c}$ есть вектор, полученный из вектора $\vec{c}$ указанным поворотом). Тогда, поскольку многоугольник *A1A2... An* правильный, $R_\varphi\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA_2},\ R_\varphi\overrightarrow{OA_2} = \overrightarrow{OA_3},\ \ldots,\ R_\varphi\overrightarrow{OA_n} = \overrightarrow{OA_1}.$

Как известно, сложение векторов и поворот перестановочны: если сумму нескольких векторов повернуть на угол φ и, наоборот, каждый из векторов-слагаемых повернуть на тот же угол, а затем сложить, результат будет один и тот же. Кроме того, сумма векторов не зависит от их порядка. Поэтому:

$$R_\varphi \vec{a} = R_\varphi\overrightarrow{OA_1} + R_\varphi\overrightarrow{OA_2} + \ldots + R_\varphi\overrightarrow{OA_{n-1}} + R_\varphi\overrightarrow{OA_n} =$$
$$= \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} + \overrightarrow{OA_1} = \vec{a}$$

Итак, вектор $\vec{a}$ не меняется при повороте на угол *0o<φ <360o*. Значит, $\vec{a} = \vec{0}$

Задача №4

- При каких *a* и *b* система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=a, \\ x^3+y^3+z^3=b \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

Если тройка чисел (x_0, y_0, z_0) - решение системы, то решениями будут и тройки, полученные из неё всевозможными перестановками: (x_0, z_0, y_0), (y_0, x_0, z_0), (y_0, z_0, x_0), (z_0, x_0, y_0), (z_0, y_0, x_0). Решение может быть единственным только в том случае, когда $x_0 = y_0 = z_0$. Из первого уравнения $x_0 = y_0 = z_0 = 1$. Подставляя эти значения *x*, *y* и *z* во второе и третье уравнения, получаем, что $a = b = 3$. Осталось только проверить, что при этих *a* и *b* у системы действительно нет других решений, кроме $(1,1,1)$.

Последняя задача и является примером *симметрической системы*.

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Функция f (x;y) называется *симметрической*, если для всех *x* и *y* выполнено равенство

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Например: Многочлен от двух переменных вида $f(x,y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 15$ является симметрической функцией. В самом деле,

$$f(y, x) = 3y^2 - 2yx + 3x^2 + 15 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 15 = f(x, y).$$

Примеры симметрических функций:

- $u = x + y$;
- $u = 2x^2 - 3xy + 2y^2$,
- $v = xy$;
- $u = x^2 + y^2$;

Способы решения симметрических систем.

- Симметрические системы можно решать *методом замены переменных*, в роли которых выступают основные симметрические многочлены. Симметрическая система двух уравнений с двумя неизвестными x и y решается подстановкой $u = x + y$, $v = xy$.

$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$

$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u (u^2 - 2v - v) = u^3 - 3uv,$

$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$

$x^2 + xy + y^2 = u^2 - 2v + v = u^2 - v$ и т.д.

Пример №1:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

Пусть $x + y = u$, $xy = v$.

$$\begin{cases} u^2 - v = 13, \\ u = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16 - v = 13, \\ u = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = 3, \\ u = 4; \end{cases}$$

Произведем обратную замену.

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ (4 - y)\, y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ y_1 = 3;\ y_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1,\ x_2 = 3, \\ y_1 = 3,\ y_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3); (3; 1).

Пример №2

$$\begin{cases} 3x^2y - 2xy + 3xy^2 = 78, \\ 2x - 3xy + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

С помощью основных симметрических многочленов система может записана в следующем виде

$$\begin{cases} 3uv - 2v = 78, \\ 2u - 3v = -8. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения $u = \frac{3v-8}{2}$ и подставляя его в первое уравнение, получим $9v^2 - 28v - 156 = 0$. Корни этого уравнения $v_1 = 6$ и $v_2 = -\frac{26}{9}$ позволяют найти соответствующие им значения $u_1 = 5$, $u_2 = -\frac{25}{3}$ из выражения $u = \frac{3v-8}{2}$.

Решим теперь следующую совокупность систем

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -\frac{25}{3}, \\ xy = -\frac{26}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x - \frac{25}{3}, \\ xy = -\frac{26}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ y(5 - y) = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x - \frac{25}{3}, \\ x\left(-x - \frac{25}{3}\right) = -\frac{26}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ y_1 = 3,\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x - \frac{25}{3}, \\ x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2,\ x_2 = 3, \\ y_1 = 3,\ y_2 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = -\frac{26}{3} \\ y_1 = -\frac{26}{3},\ y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 3), (3; 2), \left(\frac{1}{3}; -\frac{26}{3}\right), \left(-\frac{26}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

Пример №3:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 4, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Решение:

Возведем второе уравнение в куб, получим: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 4, \\ x^3y^3 = 1. \end{cases}$

Таким образом, по теореме Виета, x^3 и y^3 являются корнями квадратного уравнения $t^2 - 4t + 1 = 0$. Отсюда $t_1 = 2 - \sqrt{3}$ и $t_2 = 2 + \sqrt{3}$.

Значит, $x_1 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$, $y_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$; $x_2 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$, $y_2 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$.

Заметим, что мы нашли один из корней уравнения $u^3 - 3u - 4 = 0$:

$$u = x + y = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}.$$

Ответ: $\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}};\ \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}\right)$, $\left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}};\ \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}\right)$.

Теоремы, используемые при решении симметрических систем.

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Теорема 1. (о симметрических многочленах)

- Любой симметрический многочлен от двух переменных представим в виде функции от двух основных симметрических многочленов

$$u(x, y) = x + y,$$
$$v(x, y) = xy.$$

- Другими словами, для любого симметрического многочлена $f(x, y)$ существует такая функция двух переменных $\varphi(u, v)$, что

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y)).$$

Теорема 2. (о симметрических многочленах)

- Любой симметрический многочлен от трёх переменных представим в виде функции от трёх основных симметрических многочленов:

$$u(x, y, z) = x + y + z,$$
$$v(x, y, z) = xy + yz + zx,$$
$$w(x, y, z) = xyz.$$

- Другими словами, для любого симметрического многочлена $f(x, y)$ существует такая функция трёх переменных $\theta(u, v, w)$, что

$$f(x, y) = \theta(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$

Более сложные симметрические системы – системы, содержащие **модуль**:

$$\begin{cases} |x - y| + y^2 = 3, \\ |x - 1| + |y - 1| = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим данную систему отдельно при $x < 1$ и при $x \geq 1$.

Если $x < 1$, то:

а) при $y < x$ система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ -x + 1 - y + 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = -3$, $y_2 = 3$. Эти пары чисел *не принадлежат* к рассматриваемой области;

б) при $x \le y < 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ -x + 1 - y + 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 3$, $y_1 = -3$; $x_2 = -1$, $y_2 = 1$.

Эти пары чисел *не принадлежат* к рассматриваемой области;

в) при $y \ge 1$ (тогда $y > x$) система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ -x + 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x - y = -2, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = -3$, $y_1 = -1$, $x_2 = -1$, $y_2 = 1$. Вторая пара чисел *принадлежит* рассматриваемой области, т. е. является решением данной системы.

Если $x \geq 1$, то:

а) $x > y$ и $y < 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - 1 - y = 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 1$, $y_1 = -1$, $x_2 = 4$, $y_2 = 2$. Первая пара чисел *принадлежит* рассматриваемой области, т. Е. является решением данной системы;

б) при $x > y$ и $y \geq 1$ система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x + y = 4, \end{cases}$$

откуда находим $x = 1$, $y = 3$. Эта пара чисел *не принадлежит* рассматриваемой области;

в) при $x \le y$ (тогда $y \ge 1$) система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x - 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x + y = 4, \end{cases}$$

откуда находим $x_1 = 5 + \sqrt{8}$, $y_1 = -1 - \sqrt{8}$;

$x_2 = 5 - \sqrt{8}$, $y_2 = -1 + \sqrt{8}$. Эти пары чисел *не принадлежат* рассматриваемой области.

Таким образом, $x_1 = -1$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = -1$.

Ответ: $(-1; 1)$; $(1; -1)$.

Заключение

- Математика развивает мышление человека, учит посредством логики находить разные пути решения. Так, научившись решать симметрические системы, я поняла, что использовать их можно не только для выполнения конкретных примеров, но я для решения разного рода задач.
- Я думаю, что проект может принести пользу не только мне. Для тех, кто так же захочет ознакомиться с этой темой, моя работа будет являться хорошим помощником.

Список используемой литературы:

- Башмаков М. И., «Алгебра и начала анализа», 2-е издание, Москва, «Просвещение», 1992, 350 стр.
- Рудченко П. А., Яремчук Ф. П., «Алгебра и элементарные функции», справочник; издание третье, переработанное и дополненное; Киев, Наукова, Думка, 1987, 648 стр.
- Шарыгин И. Ф., « Математика для школьников старших классов», Москва, издательский дом «Дрофа», 1995, 490 стр.
- Интернет-ресурсы: http://www.college.ru/