

# Симметрические системы уравнений

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Автор: Гончаровская Алина  
учащаяся 11 класса  
МОУ Рощинской СОШ  
«Образовательный центр»

Руководитель: Пятовская Людмила Петровна – учитель  
математики высшей категории

2008-2009 учебный год

# Оглавление

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- 1. Введение
- 2. Понятие симметрии, её основные виды
- 3. Решение задач при помощи симметрии
- 4. Симметрические системы
- 5. Способы решения симметрических систем.  
Метод замены переменных
- 6. Теоремы, используемые при решении симметрических систем
- 7. Заключение
- 8. Список используемой литературы



# Введение

**Проблема** моего проекта заключается в том, что для успешной сдачи ЕГЭ требуется умение решать различные системы уравнений, а в курсе средней школы им отведено недостаточно времени, необходимого познать этот вопрос глубже.

**Цель работы:** подготовиться к успешной сдачи ЕГЭ.

**Задачи работы:**

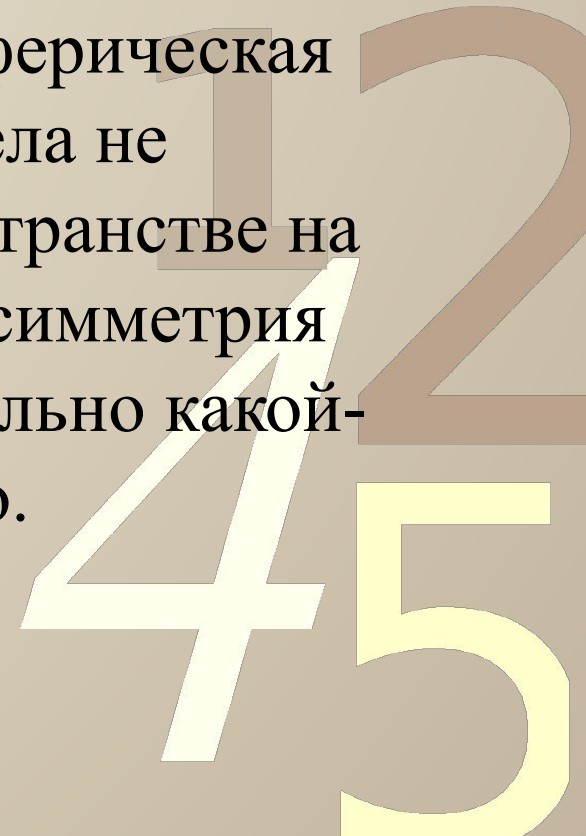
- Расширить свои знания в области математики, связанные с понятием «симметрия».
- Повысить свою математическую культуру, используя понятие «симметрия» при решении систем уравнений, называемых симметрическими, а также других задач математики.



# Понятие симметрии.

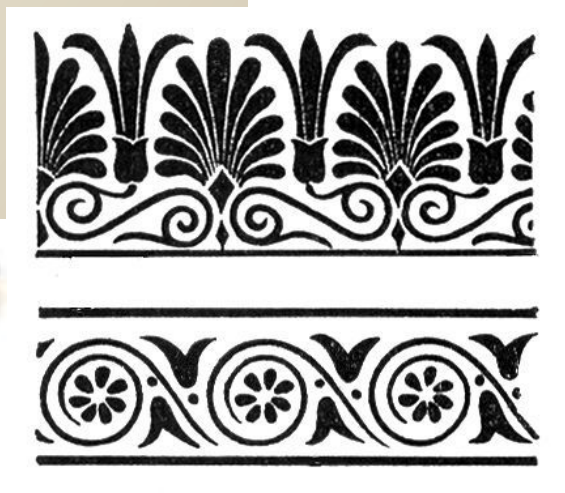
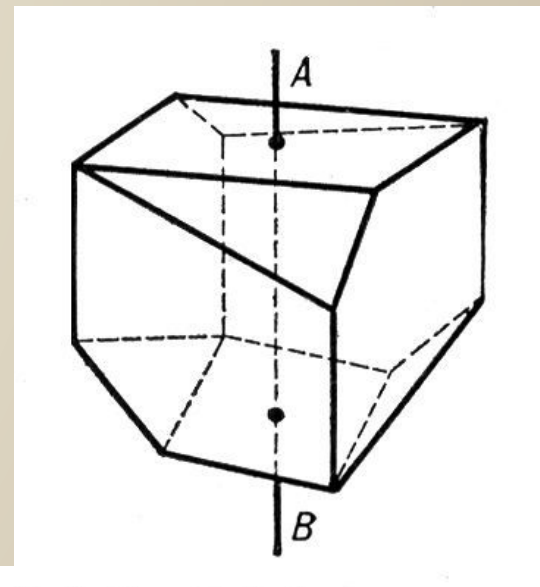
0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- **Симмétrия́** — (др.-греч. *συμμετρία*), в широком смысле — неизменность при каких-либо преобразованиях. Так, например, сферическая симметрия тела означает, что вид тела не изменится, если его вращать в пространстве на произвольные углы. Двусторонняя симметрия означает, что право и лево относительно какой-либо плоскости выглядят одинаково.



# Симметрия бывает:

- двусторонняя;
- симметрия n-порядка;
- аксиальная;
- сферическая;
- трансляционная

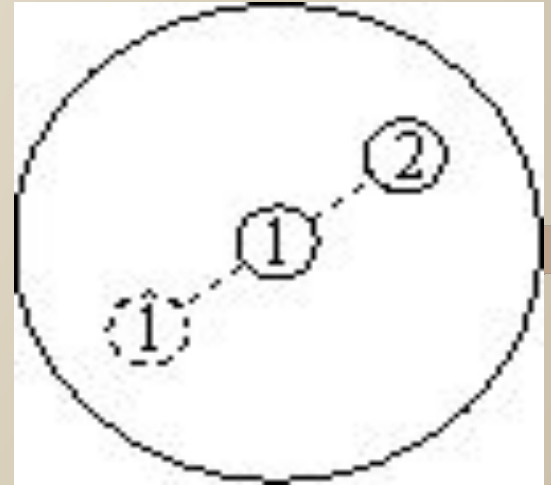


# Решение задач при помощи симметрии.

## Задача №1

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Двое по очереди кладут одинаковые монеты на круглый стол, причём монеты не должны накрывать друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (Иначе говоря, у какого из игроков есть выигрышная стратегия?)

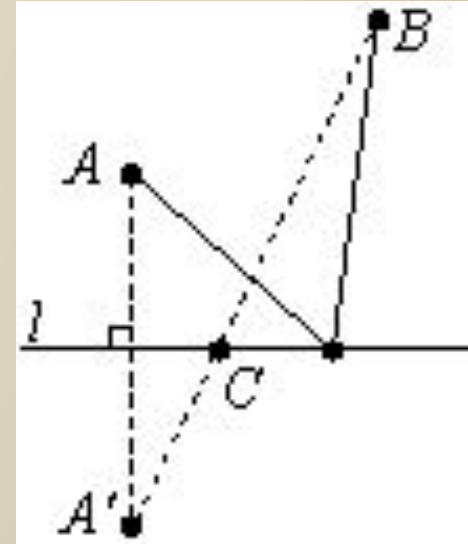


*Решение.* При правильной игре выигрывает тот, кто начинает - первый игрок. Вот его стратегия. Первым ходом он кладёт монету в центр стола. Затем после каждого хода второго первый кладёт монету симметрично монете, только что положенной вторым, относительно центра стола (рис. 1). Очевидно, если возможен очередной ход второго игрока, то возможен и симметричный ему ответный ход первого. Следовательно, первый игрок побеждает.

# Задача №2

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

На плоскости дана прямая  $l$  и точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от неё. Нужно найти на прямой такую точку  $C$ , чтобы сумма длин отрезков  $AC$  и  $BC$  была минимальна.



*Решение.* Построим точку  $A'$ , симметричную  $A$  относительно прямой  $l$ . Заметим, что для любой точки  $C$ , лежащей на прямой  $l$ ,  $AC = A'C$ .

Поэтому

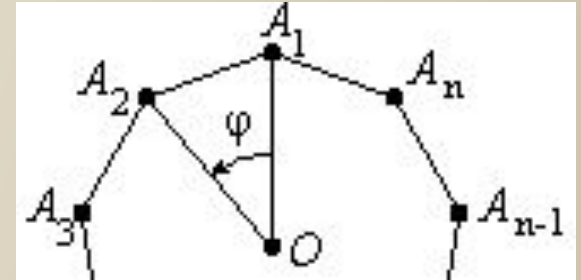
$$AC + BC = A'C + BC.$$

В силу неравенства треугольника сумма  $A'C + BC$  минимальна тогда и только тогда, когда точка  $C$  лежит на отрезке  $A'B$  (рис. 2). Итак,  $C = A'B \cap l$ .

# Задача №3

На плоскости дан правильный  $n$ -угольник  $A_1A_2\dots A_n$ , точка  $O$  - его центр (рис. 3). Найти вектор .

$$\vec{a} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2 + \dots + \vec{OA}_n$$



*Решение.* Введём обозначения:  $\varphi = \angle A_1OA_2$ ,  $R_\varphi$  поворот на угол  $\varphi$  с центром в точке  $O$  (т. е.  $R_\varphi \vec{c}$  есть вектор, полученный из вектора  $\vec{c}$  указанным поворотом). Тогда, поскольку многоугольник  $A_1A_2\dots A_n$  правильный,

$$R_\varphi \vec{OA}_1 = \vec{OA}_2, R_\varphi \vec{OA}_2 = \vec{OA}_3, \dots, R_\varphi \vec{OA}_n = \vec{OA}_1.$$

Как известно, сложение векторов и поворот перестановочны: если сумму нескольких векторов повернуть на угол  $\varphi$  и, наоборот, каждый из векторов-слагаемых повернуть на тот же угол, а затем сложить, результат будет один и тот же. Кроме того, сумма векторов не зависит от их порядка. Поэтому:

$$\begin{aligned} R_\varphi \vec{a} &= R_\varphi \vec{OA}_1 + R_\varphi \vec{OA}_2 + \dots + R_\varphi \vec{OA}_{n-1} + R_\varphi \vec{OA}_n = \\ &= \vec{OA}_2 + \vec{OA}_3 + \dots + \vec{OA}_n + \vec{OA}_1 = \vec{a} \end{aligned}$$

Итак, вектор  $\vec{a}$  не меняется при повороте на угол  $0^\circ < \varphi < 360^\circ$ . Значит,  $\vec{a} = \vec{0}$



# Задача №4

- При каких  $a$  и  $b$  система уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=a, \\ x^3+y^3+z^3=b \end{cases}$$

имеет ровно одно решение?

Если тройка чисел  $(x_0, y_0, z_0)$  - решение системы, то решениями будут и тройки, полученные из неё всевозможными перестановками:  $(x_0, z_0, y_0)$ ,

$(y_0, x_0, z_0)$ ,  $(y_0, z_0, x_0)$ ,  $(z_0, x_0, y_0)$ ,  $(z_0, y_0, x_0)$ . Решение может быть единственным только в том случае, когда  $x_0 = y_0 = z_0$ . Из первого уравнения

$x_0 = y_0 = z_0 = 1$ . Подставляя эти значения  $x$ ,  $y$  и  $z$  во второе и третье уравнения, получаем, что  $a = b = 3$ . Осталось только проверить, что при этих  $a$  и  $b$  у системы действительно нет других решений, кроме  $(1, 1, 1)$ .



Последняя задача и является примером  
*симметрической системы.*

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Функция  $f(x; y)$  называется *симметрической*,  
если для всех  $x$  и  $y$  выполнено равенство

$$f(x, y) = f(y, x).$$

Например: Многочлен от двух переменных вида  $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 15$  является симметрической функцией. В самом деле,

$$f(y, x) = 3y^2 - 2yx + 3x^2 + 15 = 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 15 = f(x, y).$$

# Примеры симметрических функций:

- $u = x + y;$
- $u = 2x^2 - 3xy + 2y^2,$
- $v = xy;$
- $u = x^2 + y^2;$



# Способы решения симметрических систем.

- Симметрические системы можно решать *методом замены переменных*, в роли которых выступают основные симметрические многочлены.

Симметрическая система двух уравнений с двумя неизвестными  $x$  и  $y$  решается подстановкой  $u = x + y$ ,  $v = xy$ .

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v,$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = u(u^2 - 2v - v) = u^3 - 3uv,$$

$$x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = (u^2 - 2v)^2 - 2v^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

$$x^2 + xy + y^2 = u^2 - 2v + v = u^2 - v \text{ и т.д.}$$

# Пример №1:

Произведем обратную замену.

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 13, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

Пусть  $x + y = u$ ,  $xy = v$ .

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ xy = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ (4 - y)y = 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y, \\ y_1 = 3; y_2 = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1, x_2 = 3, \\ y_1 = 3, y_2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: (1; 3); (3; 1).



# Пример №2

$$\begin{cases} 3x^2y - 2xy + 3xy^2 = 78, \\ 2x - 3xy + 2y + 8 = 0 \end{cases}$$

С помощью основных симметрических многочленов система может записана в следующем виде

$$\begin{cases} 3uv - 2v = 78, \\ 2u - 3v = -8. \end{cases}$$

Выражая из второго уравнения  $u = \frac{3v-8}{2}$  и подставляя его в первое уравнение, получим  $9v^2 - 28v - 156 = 0$ .  
Корни этого уравнения  $v_1 = 6$  и  $v_2 = -\frac{26}{9}$  позволяют найти соответствующие им значения  $u_1 = 5$ ,  $u_2 = -\frac{25}{3}$  из выражения  $u = \frac{3v-8}{2}$ .

Решим теперь следующую совокупность систем

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -\frac{25}{3}, \\ xy = -\frac{26}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ xy = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x - \frac{25}{3}, \\ xy = -\frac{26}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ y(5 - y) = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x - \frac{25}{3}, \\ x(-x - \frac{25}{3}) = -\frac{26}{9}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 5 - y, \\ y_1 = 3, y_2 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = -x - \frac{25}{3}, \\ x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{26}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2, x_2 = 3, \\ y_1 = 3, y_2 = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = -\frac{26}{3}, \\ y_1 = -\frac{26}{3}, y_2 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Ответ:  $(2; 3), (3; 2), (\frac{1}{3}; -\frac{26}{3}), (-\frac{26}{3}; \frac{1}{3})$ .



# Пример №3:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 4, \\ xy = 1. \end{cases}$$

Решение:

Возведем второе уравнение в куб, получим:  $\begin{cases} x^3 + y^3 = 4, \\ x^3 y^3 = 1. \end{cases}$

Таким образом, по теореме Виета,  $x^3$  и  $y^3$  являются корнями квадратного уравнения  $t^2 - 4t + 1 = 0$ . Отсюда  $t_1 = 2 - \sqrt{3}$  и  $t_2 = 2 + \sqrt{3}$ .

Значит,  $x_1 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ ,  $y_1 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ;  $x_2 = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}$ ,  $y_2 = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$ .

Заметим, что мы нашли один из корней уравнения  $u^3 - 3u - 4 = 0$ :

$$u = x + y = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}} + \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}.$$

Ответ:  $\left(\sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}; \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}\right), \left(\sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}; \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}\right)$ .





# Теоремы, используемые при решении симметрических систем.

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

## Теорема 1. (о симметрических многочленах)

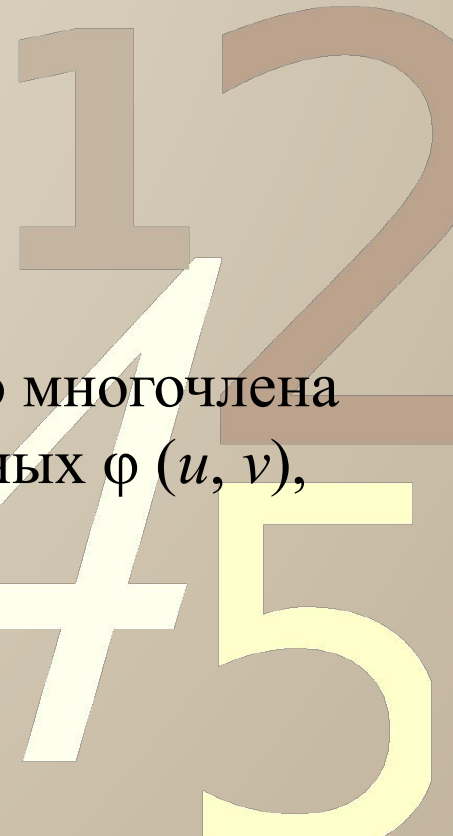
- Любой симметрический многочлен от двух переменных представим в виде функции от двух основных симметрических многочленов

$$u(x, y) = x + y,$$

$$v(x, y) = xy.$$

- Другими словами, для любого симметрического многочлена  $f(x, y)$  существует такая функция двух переменных  $\varphi(u, v)$ , что

$$f(x, y) = \varphi(u(x, y), v(x, y)).$$



## Теорема 2. (о симметрических многочленах)

- Любой симметрический многочлен от трёх переменных представим в виде функции от трёх основных симметрических многочленов:

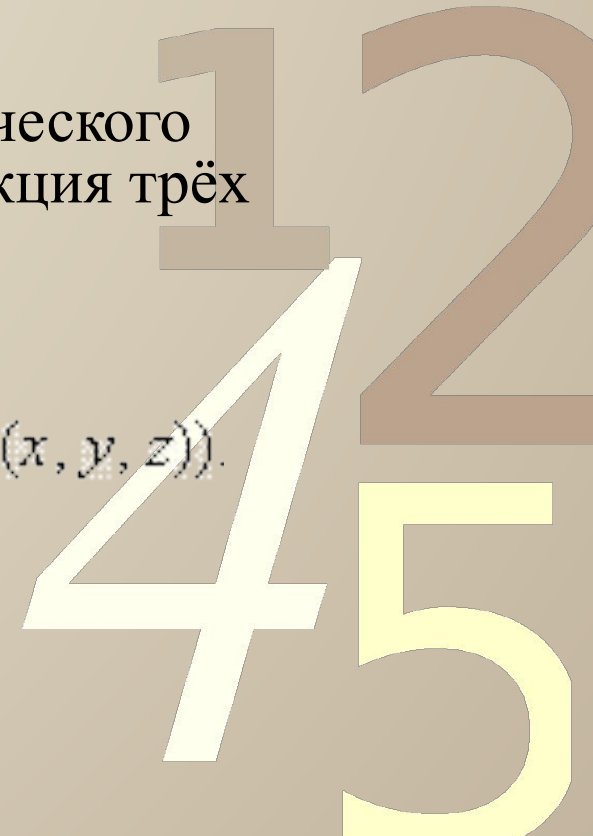
$$u(x, y, z) = x + y + z,$$

$$v(x, y, z) = xy + yz + zx,$$

$$w(x, y, z) = xyz.$$

- Другими словами, для любого симметрического многочлена  $f(x, y, z)$  существует такая функция трёх переменных  $\theta(u, v, w)$ , что

$$f(x, y, z) = \theta(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)).$$



Более сложные симметрические системы – системы, содержащие модуль:

$$\begin{cases} |x - y| + y^2 = 3, \\ |x - 1| + |y - 1| = 2. \end{cases}$$

Рассмотрим данную систему отдельно при  $x < 1$  и при  $x \geq 1$ .

Если  $x < 1$ , то:

а) при  $y < x$  система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ -x + 1 - y + 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда находим  $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = -3, y_2 = 3$ . Эти пары чисел *не принадлежат* к рассматриваемой области;

б) при  $x \leq y < 1$  система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ -x + 1 - y + 1 = 2, \end{cases}$$

0011 или 1010 1101 0001 0100 1011

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x + y = 0, \end{cases}$$

откуда находим  $x_1 = 3, y_1 = -3; x_2 = -1, y_2 = 1$ .

Эти пары чисел *не принадлежат* к рассматриваемой области;

в) при  $y \geq 1$  (тогда  $y > x$ ) система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ -x + 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x - y = -2, \end{cases}$$

откуда находим  $x_1 = -3, y_1 = -1, x_2 = -1, y_2 = 1$ . Вторая пара чисел *принадлежит* рассматриваемой области, т. е. является решением данной системы.

Если  $x \geq 1$ , то:

а)  $x > y$  и  $y < 1$  система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - 1 - y = 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - y = 2, \end{cases}$$

откуда находим  $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 4, y_2 = 2$ . Первая пара чисел *принадлежит* рассматриваемой области, т. е. является решением данной системы;

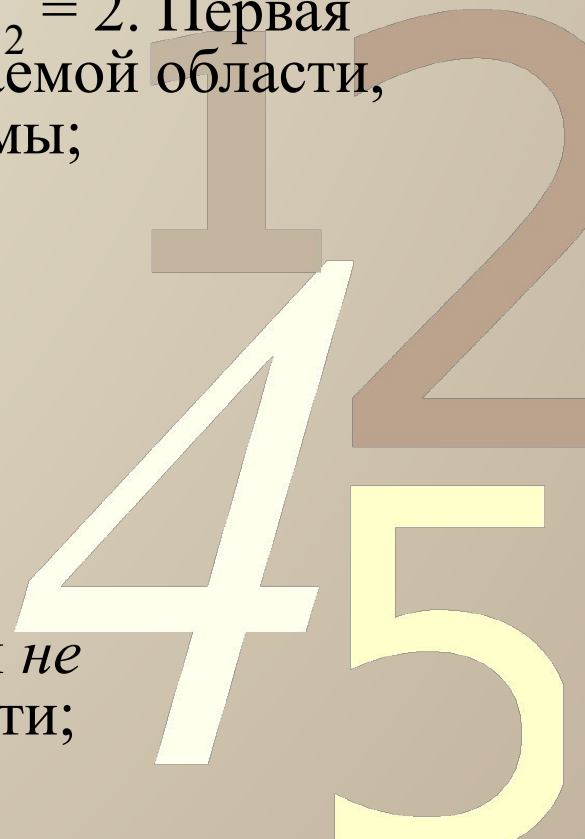
б) при  $x > y$  и  $y \geq 1$  система принимает вид

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x - 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x - y + y^2 = 3, \\ x + y = 4, \end{cases}$$

откуда находим  $x = 1, y = 3$ . Эта пара чисел *не принадлежит* рассматриваемой области;



в) при  $x \leq y$  (тогда  $y \geq 1$ ) система принимает вид

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x - 1 + y - 1 = 2, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -x + y + y^2 = 3, \\ x + y = 4, \end{cases}$$

откуда находим  $x_1 = 5 + \sqrt{8}$ ,  $y_1 = -1 - \sqrt{8}$ ;

$x_2 = 5 - \sqrt{8}$ ,  $y_2 = -1 + \sqrt{8}$ . Эти пары чисел *не принадлежат* рассматриваемой области.

Таким образом,  $x_1 = -1$ ,  $y_1 = 1$ ;  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = -1$ .

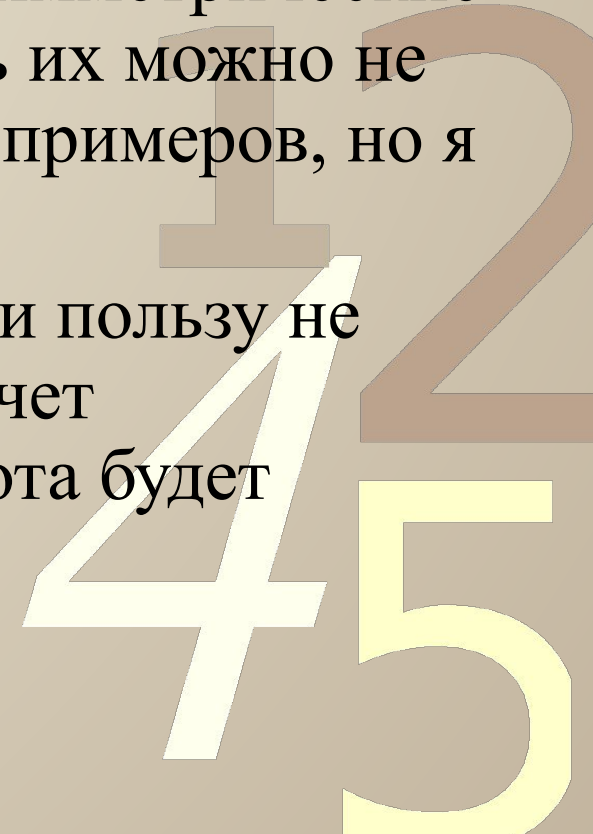
Ответ:  $(-1; 1)$ ;  $(1; -1)$ .



# Заключение

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Математика развивает мышление человека, учит посредством логики находить разные пути решения. Так, научившись решать симметрические системы, я поняла, что использовать их можно не только для выполнения конкретных примеров, но и для решения разного рода задач.
- Я думаю, что проект может принести пользу не только мне. Для тех, кто так же захочет ознакомиться с этой темой, моя работа будет являться хорошим помощником.



# Список используемой литературы:

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

- Башмаков М. И., «Алгебра и начала анализа», 2-е издание, Москва, «Просвещение», 1992, 350 стр.
- Рудченко П. А., Яремчук Ф. П., «Алгебра и элементарные функции», справочник; издание третье, переработанное и дополненное; Киев, Наукова, Думка, 1987, 648 стр.
- Шарыгин И. Ф., «Математика для школьников старших классов», Москва, издательский дом «Дрофа», 1995, 490 стр.
- Интернет-ресурсы: <http://www.college.ru/>

