# Синус и косинус разности аргументов

# Упражнение:

- Найти значения выражений:

$$sin\,63°\,cos\,27° + cos\,63°\,sin\,27° = 1$$

$$cos\frac{5\pi}{8}cos\frac{3\pi}{8} - sin\frac{5\pi}{8}sin\frac{3\pi}{8} = -1$$

$$sin(x + y) = sin\, x \cdot cos\, y + cos\, x \cdot sin\, y$$

$$cos(x + y) = cos\, x \cdot cos\, y - sin\, x \cdot sin\, y$$

$$sin(x+y) = sin\,x \cdot cos\,y + cos\,x \cdot sin\,y$$

$$sin(x-y) = sin\big(x+(-y)\big) = sin\,x \cdot cos(-y) +$$
$$+\,cos\,x\,si\,n(-y)$$

$$sin(-x) = -\,sin\,x$$
$$cos(-x) = cos\,x$$

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x+y) = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x-y) = cos\big(x+(-y)\big) = cos\,x \cdot cos(-y) -$$
$$+\,sin\,x\,si\,n(-y)$$

$$sin(-x) = -\,sin\,x$$
$$cos(-x) = cos\,x$$

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

# Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

- Вычислить $sin\,15°$.

Решение:

$15° = 45° - 30°$

$sin\,15° = sin(45° - 30°)$

$sin\,15° = sin\,45° \cdot cos\,30° - cos\,45° \cdot sin\,30°$

$$sin\,15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $sin\,15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

# Пример:

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

Вычислить $cos\,15°$.

Решение:

$15° = 45° - 30°$

$cos\,15° = cos(45° - 30°)$

$cos\,15° = cos\,45° \cdot cos\,30° + sin\,45° \cdot sin\,30°$

$$cos\,15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $cos\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

# Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

- Упростить выражение $sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2} cos\,\alpha.$

Решение:

$$sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) = sin\frac{5\pi}{6} cos\,\alpha - cos\frac{5\pi}{6} sin\,\alpha$$

$$sin\frac{5\pi}{6} = sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = sin\,\pi \cdot cos\,\frac{\pi}{6} - cos\,\pi \cdot sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$cos\frac{5\pi}{6} = cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = cos\,\pi \cdot cos\frac{\pi}{6} + sin\,\pi \cdot sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{1}{2} cos\,\alpha = \frac{1}{2} cos\,\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} sin\,\alpha - \frac{1}{2} cos\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} sin\,\alpha$$

Ответ: $sin\left(\frac{5\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} sin\,\alpha\,.$

# Пример:

$$cos(x+y) = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

Упростить выражение

$cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta).$

Решение:

$$cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta -$$

$$- cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta = 2\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

Ответ: $cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) = 2\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta.$

# Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$
$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

Доказать тождество

$$sin(30° - \alpha) - cos(60° - \alpha) = -\sqrt{3}\,sin\,\alpha.$$

Доказательство:

$$sin(30° - \alpha) = sin\,30° \cdot cos\,\alpha - cos\,30° \cdot sin\,\alpha = \frac{1}{2}cos\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha$$

$$cos(60° - \alpha) = cos\,60° \cdot cos\,\alpha + sin\,60° \cdot sin\,\alpha = \frac{1}{2}cos\,\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha$$

$$sin(30° - \alpha) - cos(60° - \alpha) = \frac{1}{2}cos\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha - \frac{1}{2}cos\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha =$$
$$= -\sqrt{3}\,sin\,\alpha\,.$$

# Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

- Доказать тождество

$$\frac{\sqrt{3}}{2} cos\,x - \frac{1}{2} sin\,x = sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

Доказательство:

$$sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = sin\frac{\pi}{3} \cdot cos\,x - cos\frac{\pi}{3} \cdot sin\,x = \frac{\sqrt{3}}{2} cos\,x - \frac{1}{2} sin\,x$$

# Пример:

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

- Найти значение выражения

$$cos\,107° \cdot cos\,17° + sin\,107° \cdot sin\,17°.$$

Решение:

$$cos\,107° \cdot cos\,17° + sin\,107° \cdot sin\,17° = \cos(107° - 17°) =$$
$$= cos\,90° = 0$$

Ответ: $0$.

# Пример:

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

- Решить уравнение

$$cos\,6x \cdot cos\,x + sin\,6x \cdot sin\,x = \frac{1}{2}.$$

Решение:

$$cos\,6x \cdot cos\,x + sin\,6x \cdot sin\,x = cos(6x - x) = cos\,5x$$

$$cos\,5x = \frac{1}{2} \Rightarrow 5x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z.$

# Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

- Пусть $cos\,t = -\frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

Вычислить $sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right).$

Решение:

$$sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = sin\,t \cdot cos\frac{\pi}{6} - cos\,t \cdot sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} sin\,t - \frac{1}{2} cos\,t$$

$$sin\,t = \sqrt{1 - cos^2 t} = \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12\sqrt{3} + 5}{26}$$

Ответ: $sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{12\sqrt{3}+5}{26}.$

# Пример:

$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

- Найти корни уравнения

$\sin 0{,}2x \cdot \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \cdot \sin 0{,}8x = \cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin 2x$ на промежутке $[0, 3\pi]$.

Решение:

$\sin 0{,}2x \cdot \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \cdot \sin 0{,}8x = \sin(0{,}2x + 0{,}8x) = \sin x$

$\cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin x = \cos(3x - 2x) = \cos x$

$\sin x = \cos x$

$tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4}$

Ответ: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$.