Синус и косинус разности аргументов

Упражнение:

- Найти значения выражений:

$$\sin 63° \cos 27° + \cos 63° \sin 27° = 1$$

$$\cos\frac{5\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8} - \sin\frac{5\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8} = -1$$

$$sin(x + y) = sin\,x \cdot cos\,y + cos\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x + y) = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y$$

$$sin(x+y) = sin\,x \cdot cos\,y + cos\,x \cdot sin\,y$$

$$sin(x-y) = sin\big(x+(-y)\big) = sin\,x \cdot cos(-y) +$$
$$+ cos\,x\,si\,n(-y)$$

$$sin(-x) = -\,sin\,x$$
$$cos(-x) = cos\,x$$

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x+y) = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x-y) = cos\big(x+(-y)\big) = cos\,x \cdot cos(-y) -$$

$$+\, sin\,x\, si\,n(-y)$$

$$sin(-x) = -\,sin\,x$$

$$cos(-x) = cos\,x$$

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

- Вычислить $sin\,15°$.

Решение:

$15° = 45° - 30°$

$sin\,15° = sin(45° - 30°)$

$sin\,15° = sin\,45° \cdot cos\,30° - cos\,45° \cdot sin\,30°$

$$sin\,15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $sin\,15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Пример:

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

Вычислить $cos\,15°$.

Решение:

$$15° = 45° - 30°$$

$$cos\,15° = cos(45° - 30°)$$

$$cos\,15° = cos\,45° \cdot cos\,30° + sin\,45° \cdot sin\,30°$$

$$cos\,15° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

Ответ: $cos\,15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Пример:

$$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y$$

- Упростить выражение $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)-\frac{1}{2}\cos\alpha.$

Решение:

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\sin\frac{5\pi}{6}\cos\alpha-\cos\frac{5\pi}{6}\sin\alpha$$

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\pi\cdot\cos\frac{\pi}{6}-\cos\pi\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{6}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\pi\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\pi\cdot\sin\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)-\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$$

Ответ: $\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha$.

Пример:

$$cos(x+y) = cos\,x \cdot cos\,y - sin\,x \cdot sin\,y$$

$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

- Упростить выражение

$cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta).$

Решение:

$$cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) = cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta -$$

$$- cos\,\alpha \cdot cos\,\beta + sin\,\alpha \cdot sin\,\beta = 2\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$$

Ответ: $cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta) = 2\,sin\,\alpha \cdot sin\,\beta$.

Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$
$$cos(x-y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

- Доказать тождество

$sin(30° - \alpha) - cos(60° - \alpha) = -\sqrt{3}\,sin\,\alpha.$

Доказательство:

$$sin(30° - \alpha) = sin\,30° \cdot cos\,\alpha - cos\,30° \cdot sin\,\alpha = \frac{1}{2}cos\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha$$

$$cos(60° - \alpha) = cos\,60° \cdot cos\,\alpha + sin\,60° \cdot sin\,\alpha = \frac{1}{2}cos\,\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha$$

$$sin(30° - \alpha) - cos(60° - \alpha) = \frac{1}{2}cos\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha - \frac{1}{2}cos\,\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}sin\,\alpha =$$

$$= -\sqrt{3}\,sin\,\alpha\,.$$

Пример:

- Доказать тождество

$sin(x - y) = sin\, x \cdot cos\, y - cos\, x \cdot sin\, y$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} cos\, x - \frac{1}{2} sin\, x = sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right).$$

Доказательство:

$$sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = sin\frac{\pi}{3} \cdot cos\, x - cos\frac{\pi}{3} \cdot sin\, x = \frac{\sqrt{3}}{2} cos\, x - \frac{1}{2} sin\, x$$

Пример:

$$cos(x - y) = cos\,x \cdot cos\,y + sin\,x \cdot sin\,y$$

- Найти значение выражения

$cos\,107° \cdot cos\,17° + sin\,107° \cdot sin\,17°.$

Решение:

$cos\,107° \cdot cos\,17° + sin\,107° \cdot sin\,17° = \cos(107° - 17°) =$

$= cos\,90° = 0$

Ответ: 0.

Пример:

$$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$$

- Решить уравнение

$$\cos 6x\cdot\cos x+\sin 6x\cdot\sin x=\frac{1}{2}.$$

Решение:

$$\cos 6x\cdot\cos x+\sin 6x\cdot\sin x=\cos(6x-x)=\cos 5x$$

$$\cos 5x=\frac{1}{2}\Rightarrow 5x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

$$x=\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}, k\in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{15}+\frac{2\pi k}{5}, k\in Z$.

Пример:

$$sin(x-y) = sin\,x \cdot cos\,y - cos\,x \cdot sin\,y$$

- Пусть $cos\,t = -\frac{5}{13}, \frac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

Вычислить $sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right).$

Решение:

$$sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) = sin\,t \cdot cos\frac{\pi}{6} - cos\,t \cdot sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} sin\,t - \frac{1}{2} cos\,t$$

$$sin\,t = \sqrt{1-cos^2 t} = \sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13}$$

$$sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{12}{13} - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{12\sqrt{3}+5}{26}$$

Ответ: $sin\left(t-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{12\sqrt{3}+5}{26}.$

Пример:

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$$

- Найти корни уравнения

$\sin 0{,}2x \cdot \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \cdot \sin 0{,}8x = \cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin 2x$ на промежутке $[0, 3\pi]$.

Решение:

$$\sin 0{,}2x \cdot \cos 0{,}8x + \cos 0{,}2x \cdot \sin 0{,}8x = \sin(0{,}2x + 0{,}8x) = \sin x$$
$$\cos 3x \cdot \cos 2x + \sin 3x \cdot \sin x = \cos(3x - 2x) = \cos x$$
$$\sin x = \cos x$$
$$tg\, x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$
$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$
$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$$
$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{\pi}{} + 2\pi = \frac{9\pi}{}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}$.