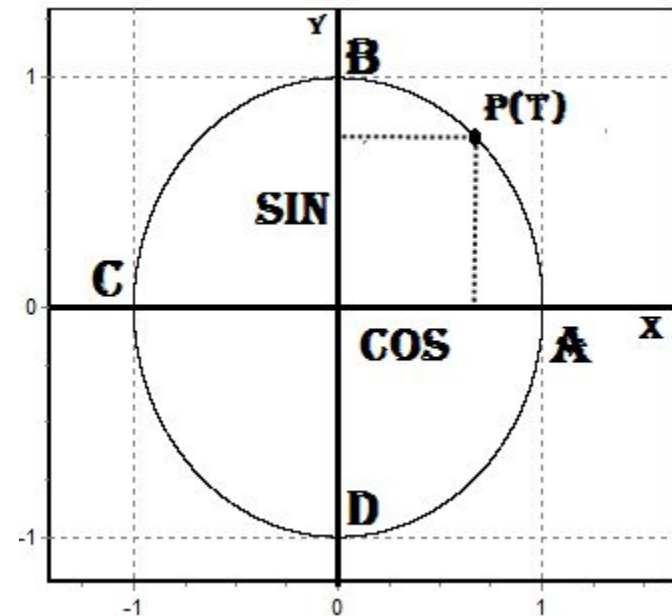


Занимательная математика

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА, 10 КЛАСС.

УРОК НА ТЕМУ:
СИНУС И КОСИНУС.



Синус и косинус.

ЧТО БУДЕМ ИЗУЧАТЬ:

Определение синуса и косинуса.

Определение тангенса и котангенса.

Основное тригонометрическое тождество

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

Основные свойства.

Синус и косинус в жизни.

Примеры задач.

Синус и косинус.

Определение.

Ребята, давайте отметим на *числовой окружности* точку **P**, посмотрите рисунок, наша точка **P** соответствует некоторому числу **t** числовой окружности, тогда *абсциссу* точки **P** будем называть *косинусом* числа **t** и обозначать **cos(t)**, а *ординату* точки **P** назовем *синусом* числа **t** и обозначим **sin(t)**.

А как будет выглядеть запись синуса и косинуса на математическом языке?

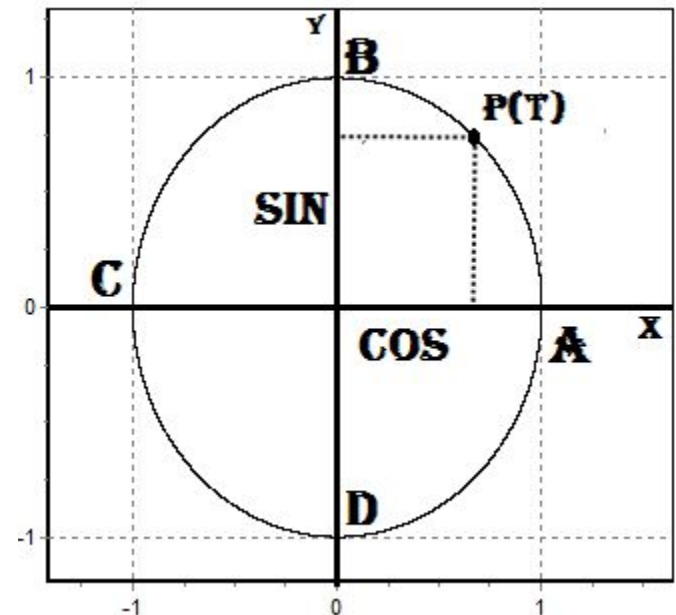
Давайте посмотрим:

Наша точка **P(t) = P(x,y)**

тогда:

$$X = \cos(t)$$

$$Y = \sin(t)$$



Тангенс и котангенс.

Определение.

Так же важно определить понятие тангенса и котангенса числа t числовой окружности, запишем определения:

Отношение **синуса** числа t к **косинусу** того же числа называют **тангенсом** числа t и обозначают **$tg(t)$** .

Отношение **косинуса** числа t к **синусу** того же числа называют **котангенсом** числа t и обозначают **$ctg(t)$** .

$$tg(t) = \frac{\sin t}{\cos t} \quad ctg(t) = \frac{\cos t}{\sin t}$$

Стоит заметить, так как на 0 делить нельзя, то, для тангенса $\cos(t) \neq 0$, а для котангенса $\sin(t) \neq 0$

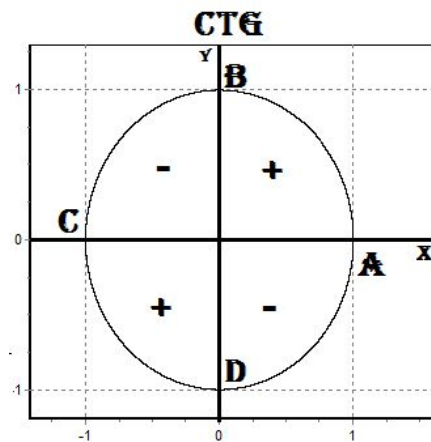
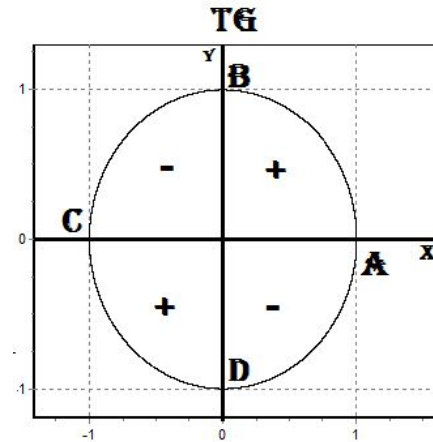
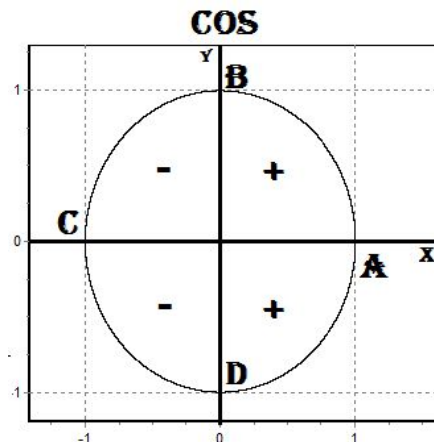
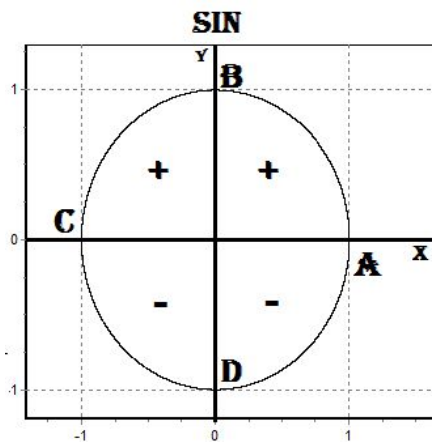
Синус и косинус.

Основное тригонометрическое тождество.

Давайте вспомним уравнение числовой окружности: $X^2 + Y^2 = 1$
нашему числу X соответствует *абсцисса* координатной плоскости, а числу Y – *ордината*, посмотрим *определение синуса и косинуса* на первом слайде и получим:

$$X^2 + Y^2 = \sin^2 t + \cos^2 t = 1 \quad \text{Важно, запомните!}$$

Значения синуса, косинуса, тангенса, котангенса в четвертях окружности:



Синус и косинус.

Таблица значений синуса, косинуса, тангенса, котангенса.

T	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
SIN(T)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
COS(T)	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
TG(T)	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
CTG(T)	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	не сущ.	0	не сущ.

не сущ. – не существует значение, т.к. на 0 делить нельзя

Синус и косинус.

Основные свойства.

Для любого числа t справедливы равенства:

$$\sin(-t) = -\sin(t)$$

$$\cos(-t) = \cos(t)$$

$$\operatorname{tg}(-t) = -\operatorname{tg}(t)$$

$$\operatorname{ctg}(-t) = -\operatorname{ctg}(t)$$

$$\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$$

$$\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$$

$$\sin(t + \pi) = -\sin(t)$$

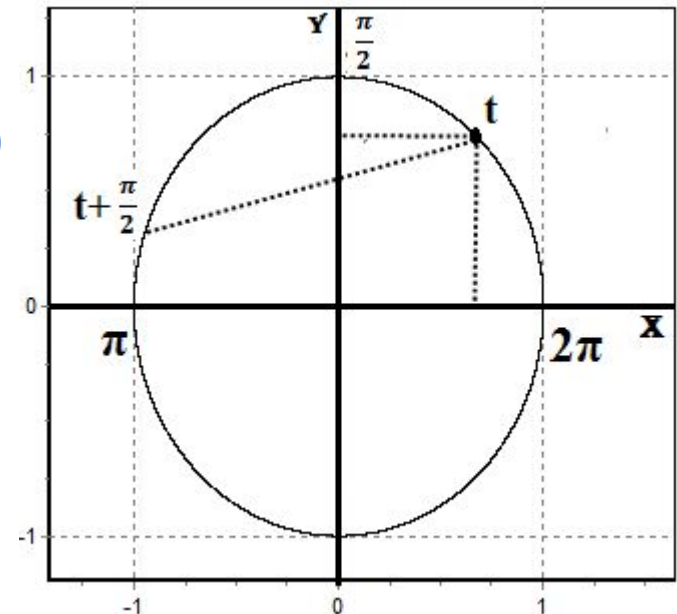
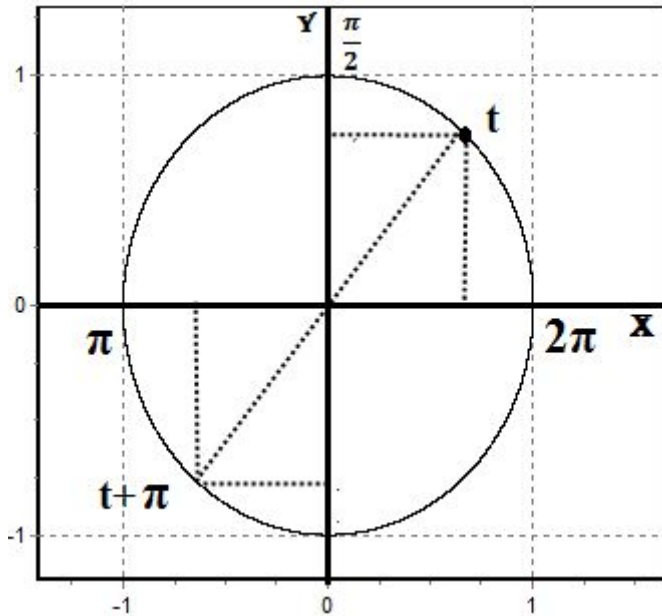
$$\cos(t + \pi) = -\cos(t)$$

$$\operatorname{tg}(t + \pi \cdot k) = \operatorname{tg}(t)$$

$$\operatorname{ctg}(t + \pi \cdot k) = \operatorname{ctg}(t)$$

$$\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$$

$$\cos(t + \pi/2) = -\sin(t)$$

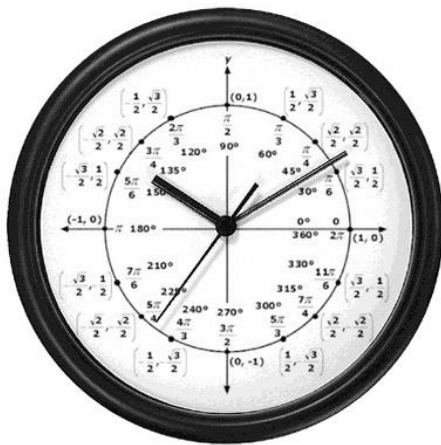


Синус и косинус.

Синус и косинус в жизни.

Для чего нужны синусы и косинусы в обычной жизни?

На практике синусы и косинусы применяются во всех инженерных специальностях, особенно в строительных. Их используют моряки и летчики в расчетах курса движения. Не обходятся без синусов и косинусов геодезисты, и даже путешественники. В географии применяют для измерения расстояний между объектами, а также в спутниковых навигационных системах.



Синус и косинус.

Пример

Вычислить синус и косинус t при: $t=53\pi/4$

Решение:

Т.к. числам t и $t+2\pi \cdot k$ (k -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности:

$$53\pi/4 = (12 + 5/4) \cdot \pi = 12\pi + 5\pi/4 = 5\pi/4 + 2\pi \cdot 6$$

Воспользуемся свойством $\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$, $\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$

$$\sin(5\pi/4 + 2\pi \cdot 6) = \sin(5\pi/4) = \sin(\pi/4 + \pi)$$

$$\cos(5\pi/4 + 2\pi \cdot 6) = \cos(5\pi/4) = \cos(\pi/4 + \pi)$$

Воспользуемся свойством $\sin(t + \pi) = -\sin(t)$, $\cos(t + \pi) = -\cos(t)$

$$\sin(\pi/4 + \pi) = -\sin(\pi/4)$$

$$\cos(\pi/4 + \pi) = -\cos(\pi/4)$$

Из таблицы значений синуса и косинуса получаем:

$$\sin(53\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(53\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Синус и косинус.

Пример

Вычислить синус и косинус t при: $t = -49\pi/3$

Решение:

Т.к. числам t и $t+2\pi \cdot k$ (k -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:

$$-49\pi/3 = -(16 + 1/3) \cdot \pi = -16\pi + (-\pi/3) = (-\pi/3) + 2\pi \cdot (-8)$$

Воспользуемся свойством $\sin(t + 2\pi \cdot k) = \sin(t)$, $\cos(t + 2\pi \cdot k) = \cos(t)$

$$\sin(-\pi/3 + 2\pi \cdot (-8)) = \sin(-\pi/3)$$

$$\cos(-\pi/3 + 2\pi \cdot (-8)) = \cos(-\pi/3)$$

Воспользуемся свойством $\sin(-t) = -\sin(t)$, $\cos(-t) = \cos(t)$

$$\sin(-\pi/3) = -\sin(\pi/3)$$

$$\cos(-\pi/3) = \cos(\pi/3)$$

Из таблицы значений синуса и косинуса получаем:

$$\sin(-49\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(-49\pi/3) = \frac{1}{2}$$

Синус и косинус.

Пример

Решить уравнение а) $\sin(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, б) $\sin(t) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Решение:

$\sin(t)$ – из определения, это *ордината* точки числовой окружности.

Значит на числовой окружности нужно найти точки с *ординатой*

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ и записать, каким числам t , они соответствуют - точки F и G на рисунке.

а) Точка F и G имеют координаты:

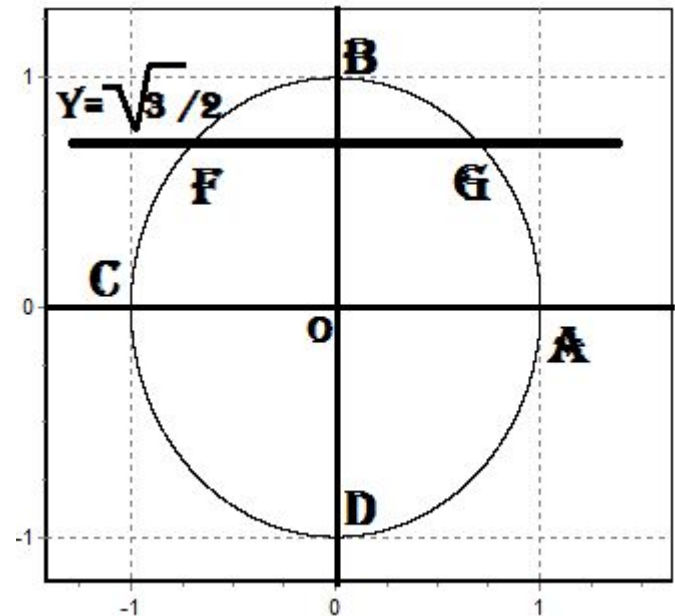
$$\pi/3 + 2\pi \cdot k \text{ и } 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$$

б) Уравнению $y > 1/2$ это дуга FG тогда:

$$\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$$

Ответ : а) $t = \pi/3 + 2\pi \cdot k$ и $t = 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$

$$\text{б) } \pi/3 + 2\pi \cdot k < t < 2\pi/3 + 2\pi \cdot k$$



Синус и косинус.

Пример

Решить уравнение а) $\cos(t)=1/2$ б) $\cos(t)>1/2$

$\cos(t)$ – из определения, это *абсцисса* точки числовой окружности.

Значит на числовой окружности нужно найти точки с *абсциссой равной 1/2* и записать, каким числом t , они соответствуют – точки F и G на рисунке

а) Точка F и G соответствуют координаты:

$$-\pi/3 + 2\pi \cdot k \text{ и } \pi/3 + 2\pi \cdot k$$

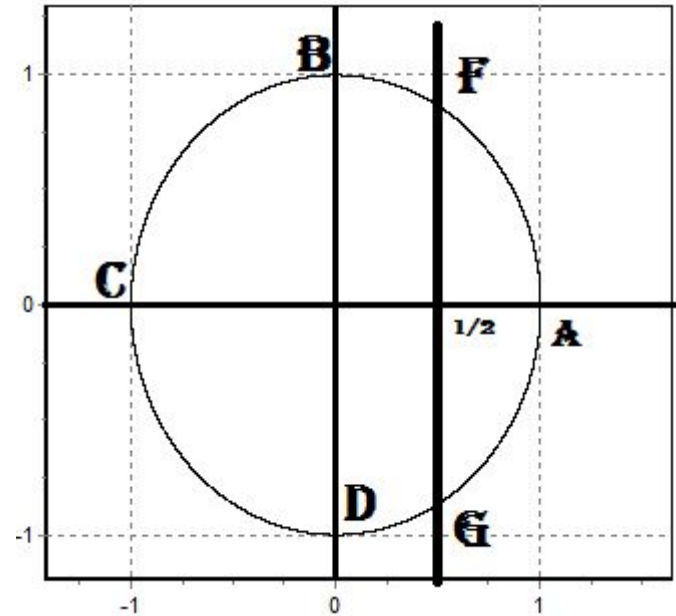
б) Уравнению $x > 1/2$

соответствует дуга FG тогда:

$$-\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < \pi/3 + 2\pi \cdot k$$

Ответ : а) $t = -\pi/3 + 2\pi \cdot k$ и $t = \pi/3 + 2\pi \cdot k$

б) $-\pi/3 + 2\pi \cdot k < t < \pi/3 + 2\pi \cdot k$



Синус и косинус.

Пример

Вычислить тангенс и котангенс t при: $t = -7\pi/3$

Решение:

Т.к. числам t и $t+2\pi \cdot k$ (k -целое число) соответствует одна и та же точка числовой окружности то:

$$-7\pi/3 = -(2 + 1/3) \cdot \pi = -2\pi + (-\pi/3) = (-\pi/3) + 2\pi$$

Вспользуемся свойством $\text{tg}(x + \pi \cdot k) = \text{tg}(x)$, $\text{ctg}(x + \pi \cdot k) = \text{ctg}(x)$

$$\text{tg}((-\pi/3) + 2\pi) = \text{tg}(-\pi/3)$$

$$\text{ctg}((-\pi/3) + 2\pi) = \text{ctg}(-\pi/3)$$

Вспользуемся свойством $\text{tg}(-x) = -\text{tg}(x)$, $\text{ctg}(-x) = -\text{ctg}(x)$

$$\text{tg}(-\pi/3) = -\text{tg}(\pi/3)$$

$$\text{ctg}(-\pi/3) = -\text{ctg}(\pi/3)$$

Из таблицы значений получаем:

$$\text{tg}(-7\pi/3) = -\text{tg}(\pi/3) = -\sqrt{3}$$

$$\text{ctg}(-7\pi/3) = -\text{ctg}(\pi/3) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Синус и косинус.

Задачи для самостоятельного решения.

- 1) **Вычислить синус и косинус t при: $t=61\pi/6$, $t= -52\pi/3$**
- 2) **Решить уравнение а) $\sin(t) = -1/2$, б) $\sin(t) > -1/2$ в) $\sin(t) < -1/2$**
- 3) **Решить уравнение а) $\cos(t) = -1/2$, б) $\cos(t) > -1/2$, в) $\cos(t) < 1/2$,**
- 4) **Вычислить тангенс и котангенс t при: а) $t= 19\pi/6$ б) $t= 41\pi/4$**