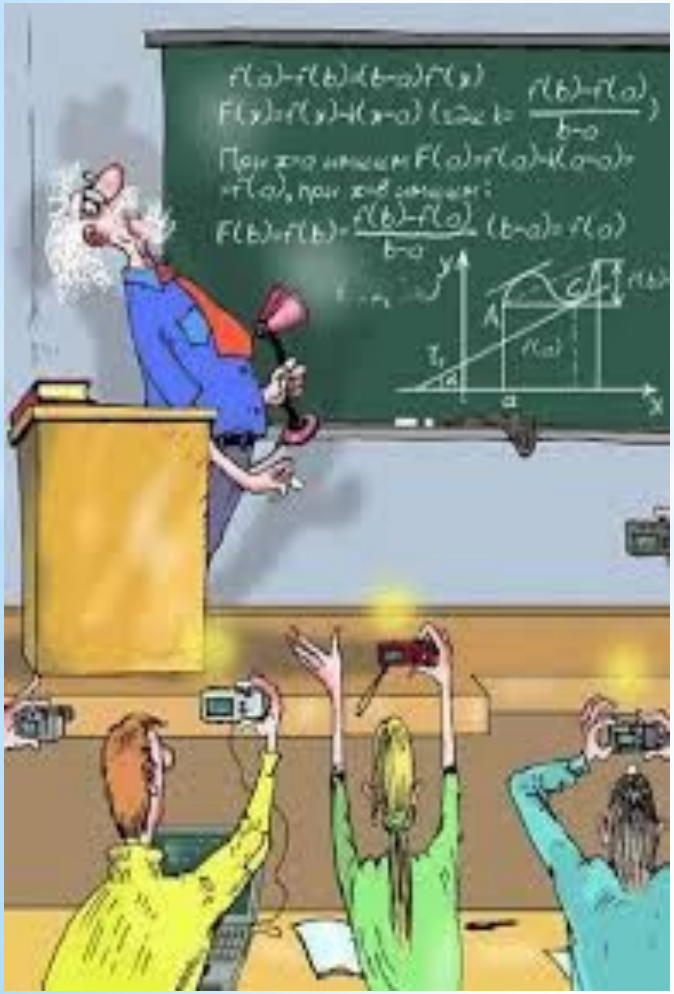
Система двух случайных величин

«Теория вероятности есть ни что иное как здравый смысл , сведенный к исчислению».

Лаплас

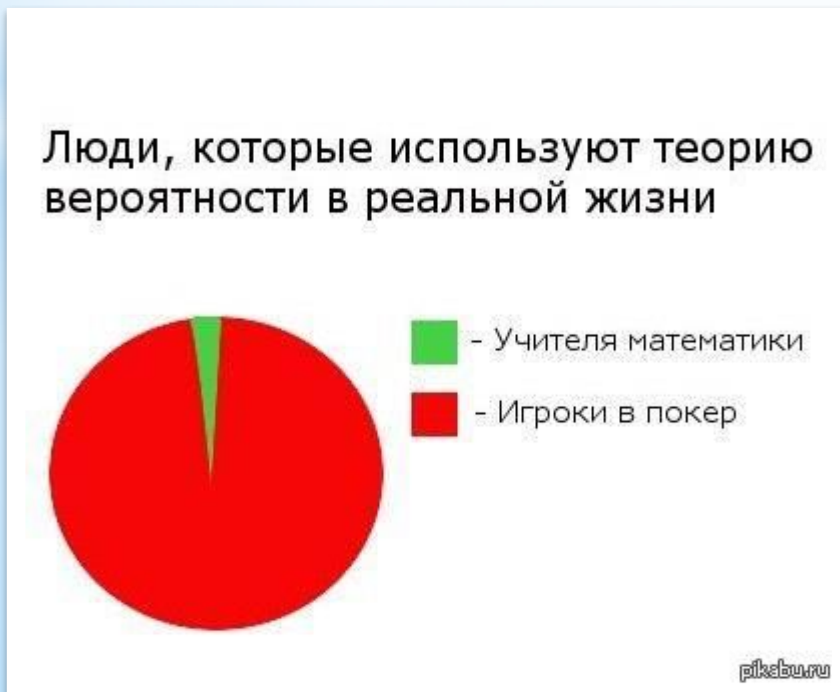


Случайная величина

Случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принять то или иное числовое значение (из числа возможных), заранее неизвестно какое именно. Случайные величины обозначаются заглавными буквами.

Система случайных двух величин

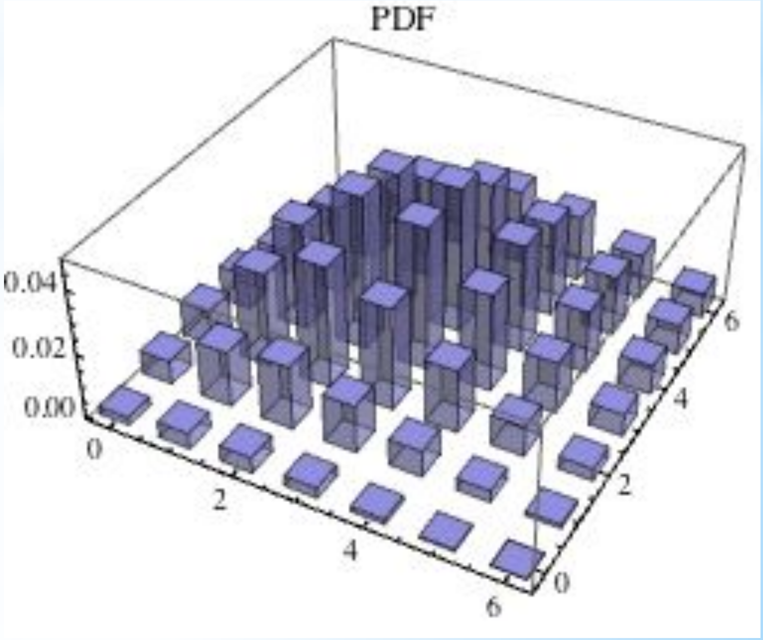
<u>Система случайных величин</u> есть функция элементарного события $(X,Y,\ldots,W)=\varphi(\omega)$. Каждому элементарному событию ставится в соответствие несколько действительных чисел: значения, принятые случайными величинами $X,Y,\ldots,W$ в результате опыта.



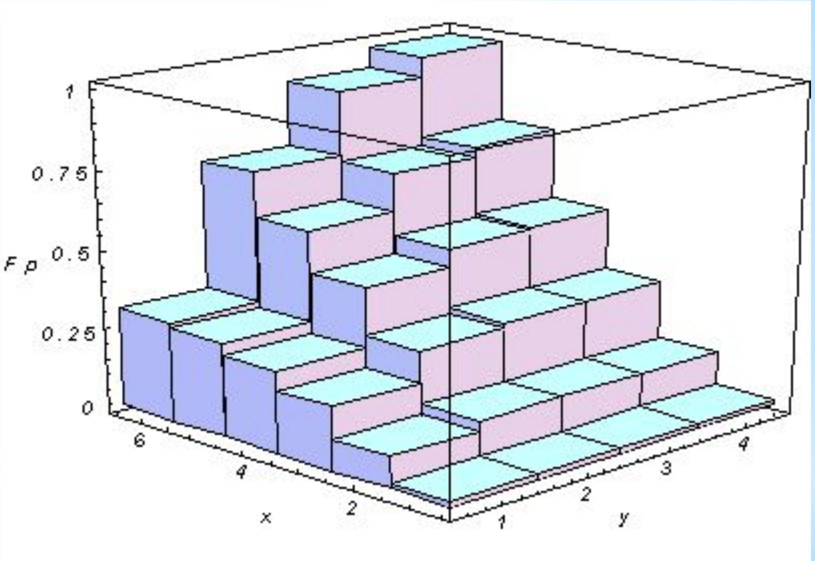
Функция распределения

Функцией распределения системы двух случайных величин F(x,y) называется вероятность совместного выполнения двух неравенств X<x и Y<y:

$$F(x, y)=P((X<x)(Y<y)). \quad (1)$$



Свойства функции распределения двумерной случайной величины



1) $0 \leq F(x, y) \leq 1$
2) $F(-\infty;\ y) = 0,\ F(x;\ -\infty) = 0$
3) $F(+\infty; +\infty) = 1$
4) $F(x; +\infty) = P(X < x) = F1(x)$
5) $F(+\infty; y) = P(Y < y) = F2(y)$
6) $F(x, y)$ - это неубывающая непрерывная слева функция от обоих аргументов:

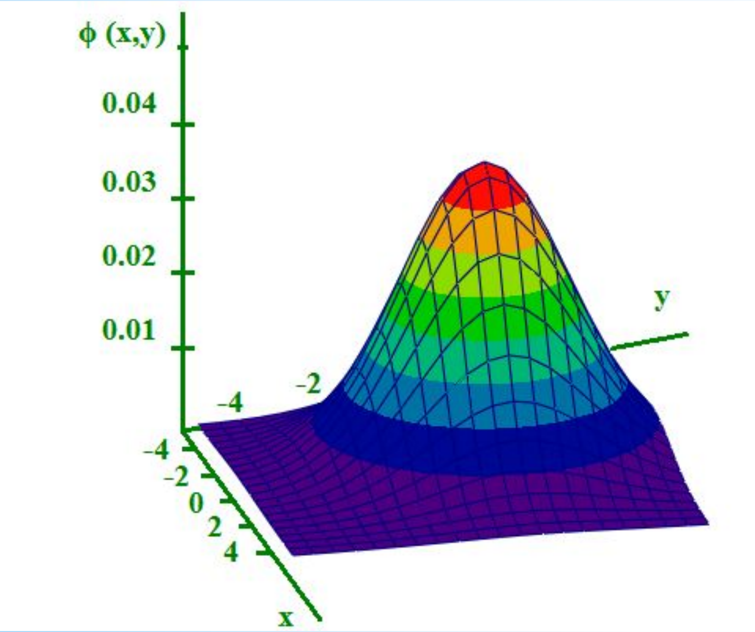
при $x_2 > x_1$: $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$

при $y_2 > y_1$: $F(x, y_2) \geq F(x; y_1)$

Плотность распределения

Плотностью совместного распределения вероятностей *f (x, y)* двумерной непрерывной случайной величины (*X, У*) называют вторую смешанную частную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x, \partial y} \qquad (2)$$



Свойства двумерной плотности

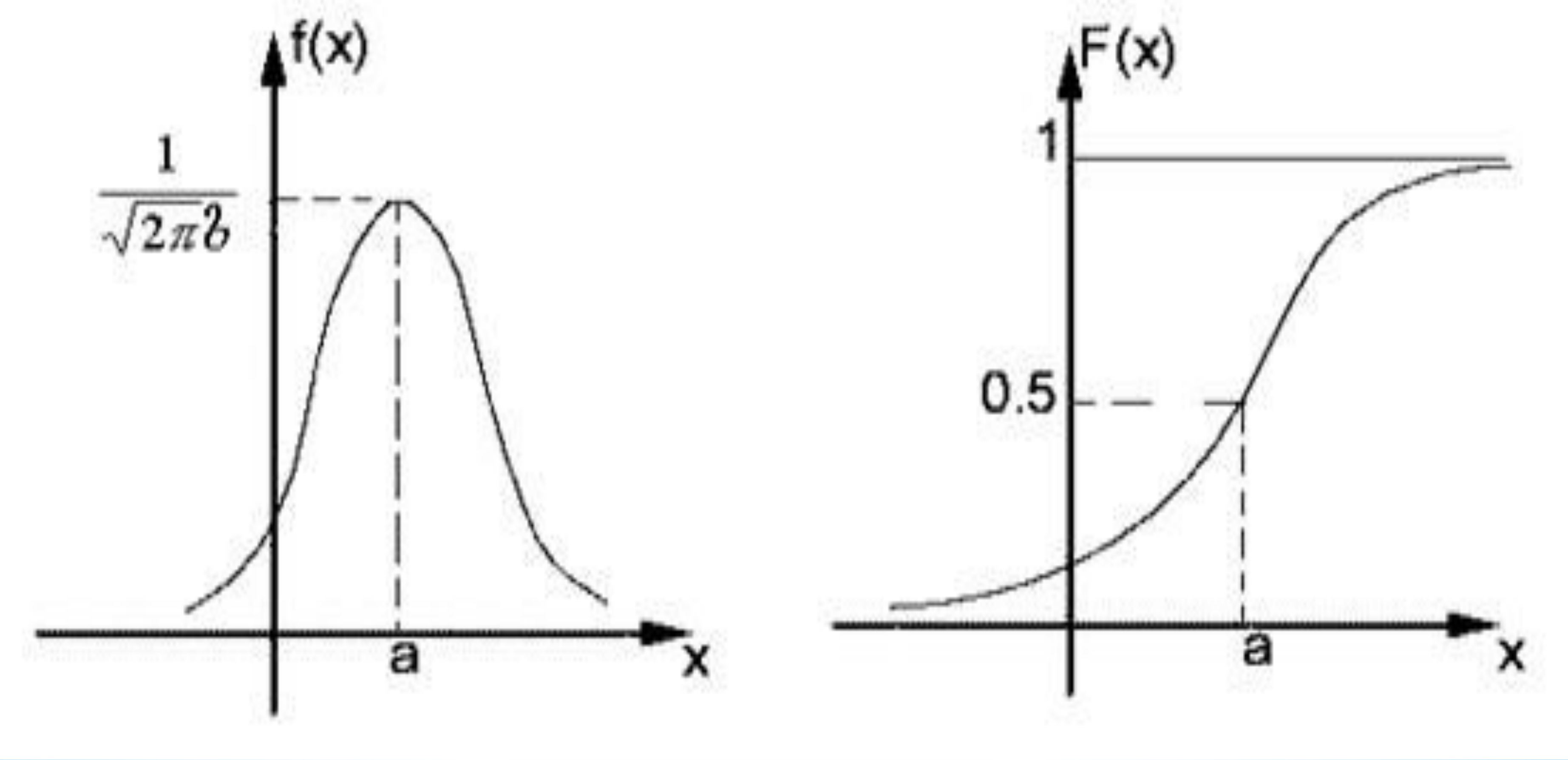
1) Двумерная плотность f(x, y) неотрицательна.

2) Двойной несобственный интеграл с бес бес конечными пределами от двумерной плотности равен единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dxdy = 1 \qquad (3)$$

Графики функций распределения

На рис. 4 представлены примеры графиков непрерывной функции распределения и её плотности.

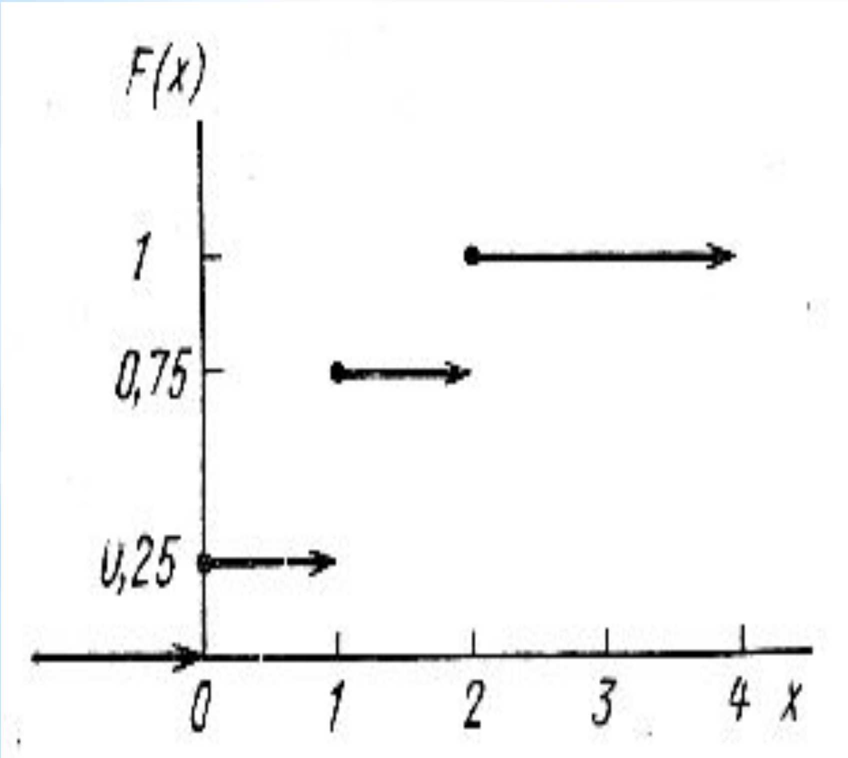


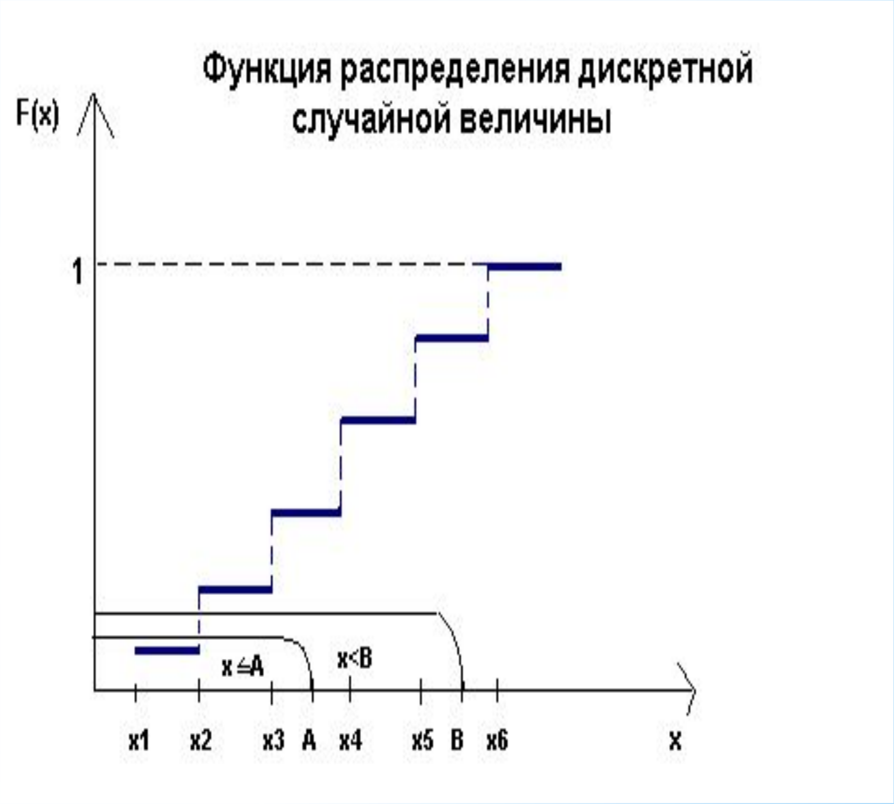
А) плотность аспределения

Б) функция распределения

Графики функций распределения

На рис. 5 представлены примеры графиков дискретной функции распределения.





Условное распределение случайной величины

Условным распределением составляющей X при $Y=y_j$ называют совокупность условных вероятностей $p(x_1, y_j)$, $p(x_2, y_j)$,…, $p(x_n, y_j)$ вычисленных в предположении, что событие $Y=y_j$, уже наступило. Аналогично определяется условное распределение составляющей Y.

$$p(x_i / y_j)=\frac{p(x_n, y_j)}{p(y_j)} \qquad (4)$$

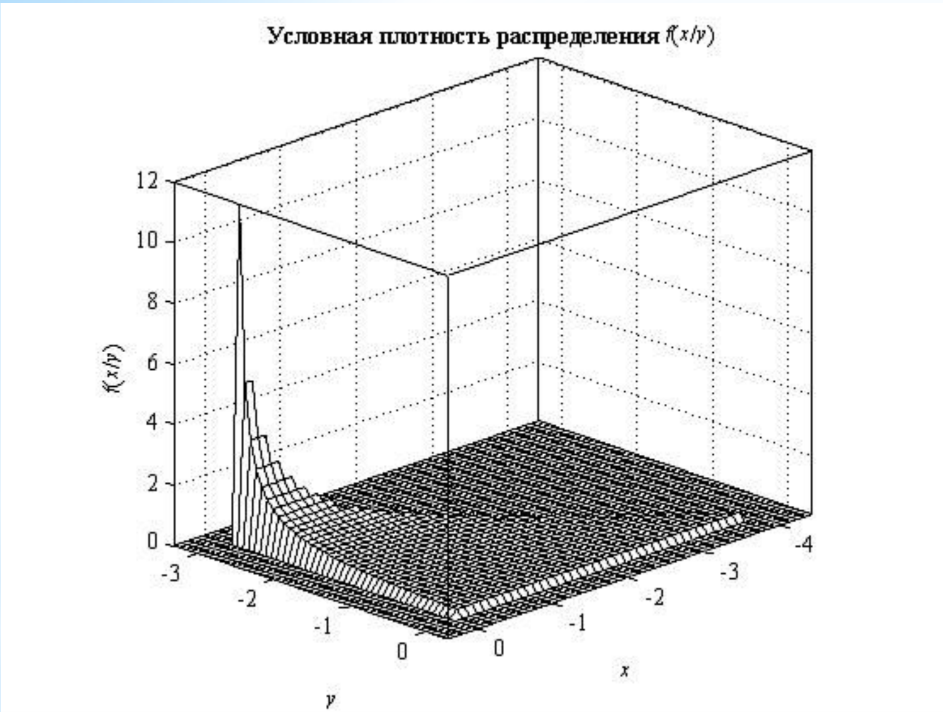
Условная плотность случайной величины

Пусть (X, Y) - непрерывная двумерная случайная величина.

Условной плотностью $\varphi(x/y)$ распределения составляющей X при данном значении $Y=y$ называется отношение плотности совместного распределения $f(x, y)$ двумерной случайной величины (X,Y) к плотности распределения $f(y)$ составляющей Y:

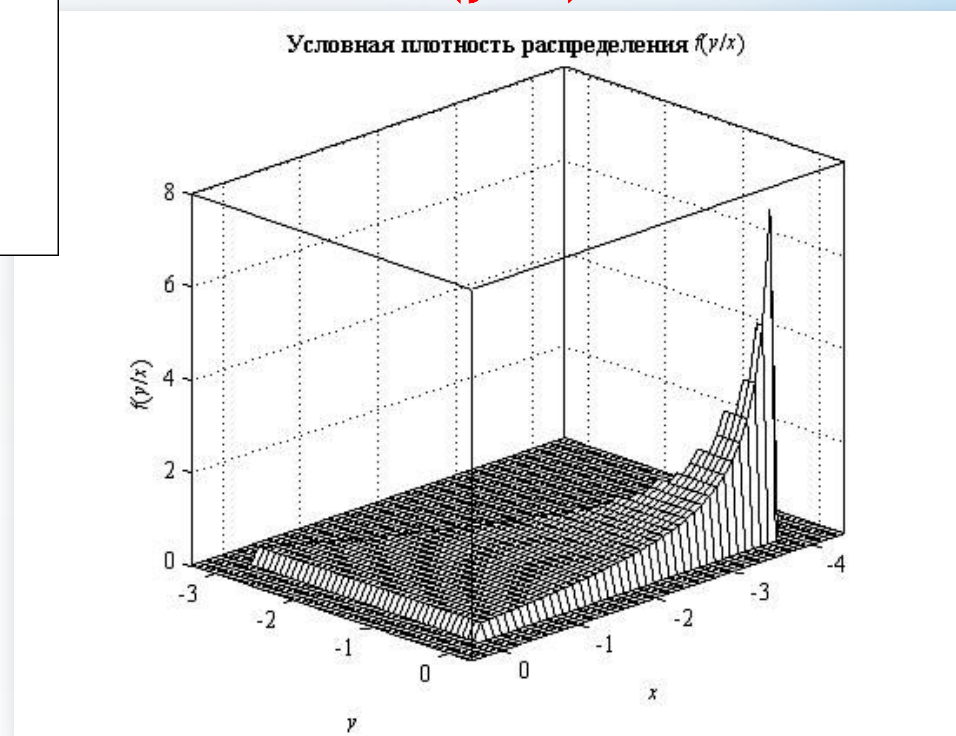
$$\varphi(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} \qquad (5)$$

Условная плотность случайной величины



Условная плотность распределения f(x/y)

Условная плотность распределения f(y/x)



Спасибо за внимание ☺