

Система MatLab

Методические указания к выполнению лабораторных работ

**Петербургский государственный
университет путей сообщения**

Кафедра «Прикладная математика»

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 6

Графическое сравнение решений задачи математической физики для уравнения диффузии, полученных аналитическими и численными методами

Рассмотрим краевую задачу для уравнения диффузии:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1;$$

Граничные условия: $U(0, t) = U(1, t) = 0$

Начальные условия: $U(x, 0) = x(1 - x)$

Требуется найти численное решение краевой задачи методом «бегущего счета» и сравнить его с приближенным, полученным из точного решения.

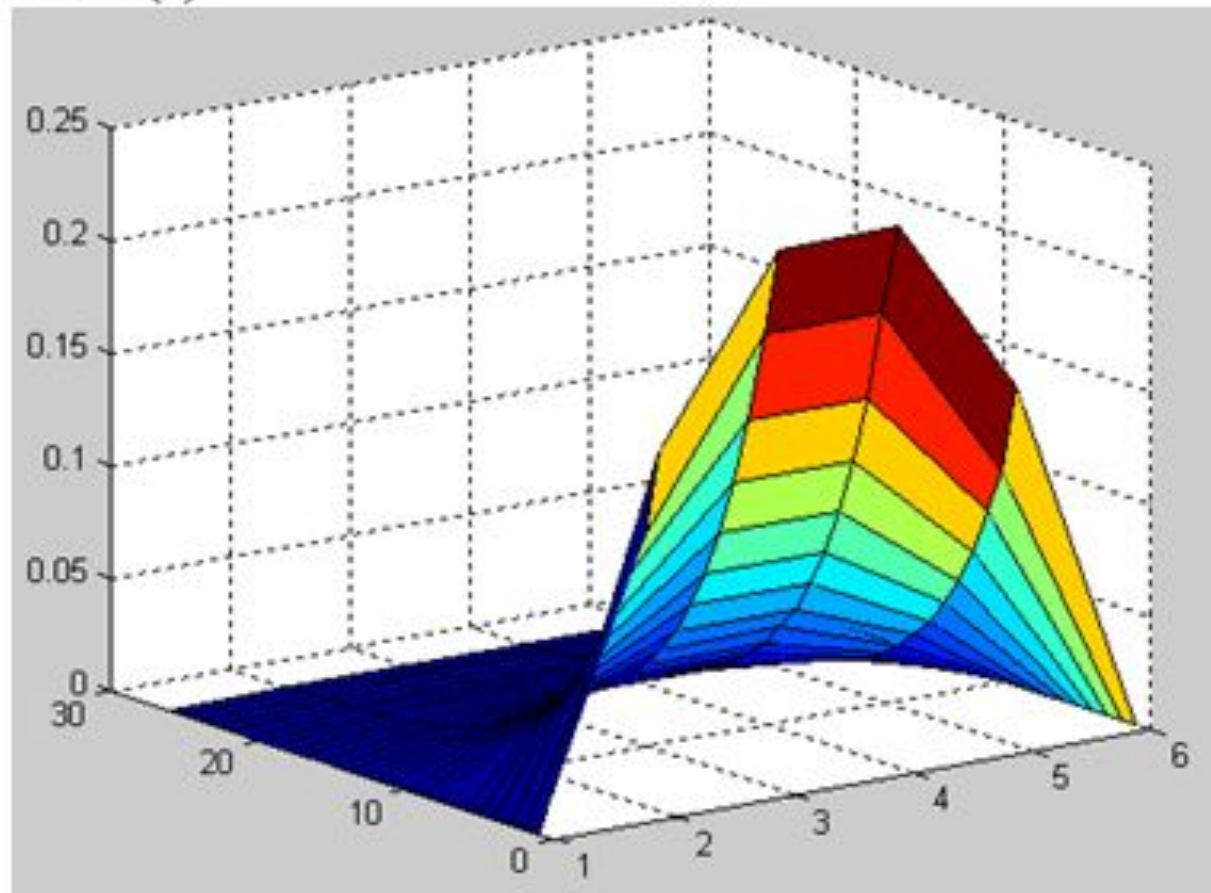
Численное решение задачи строится по алгоритму, разобранному в лабораторной работе № 5. Зададим точность $\varepsilon = 0.04$ и вычислим шаг по переменной x : $h = \sqrt{\varepsilon} = 0.2$. Тогда шаг по переменной τ , исходя из условия устойчивости, выберем $\tau = 0.02$. Число узлов по координате x : $m = 6$, а число узлов по координате t вычисляется, исходя из заданной верхней границы интервала времени при построении приближенного решения задачи: $n = \frac{0.5}{0.02} + 1 = 26$.

В системе MatLab программа нахождения решения краевой задачи методом «бегущего счета» оформлена в виде m-функции с именем func6.

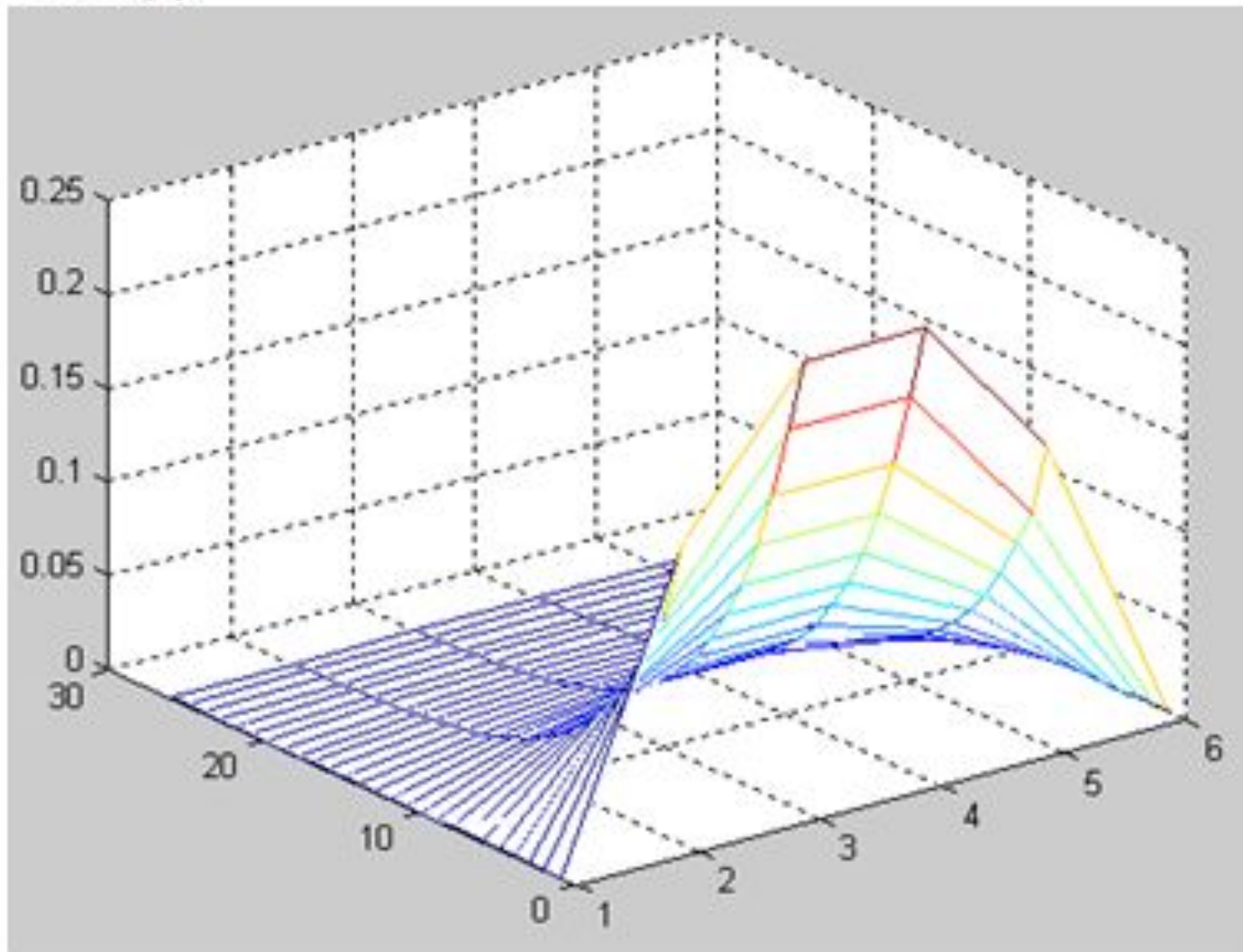
```
>> u=func6(6,26,0.2,0.02)
```

График численного решения соответствующей разностной задачи, полученного методом «бегущего счета», можно получить с помощью разных встроенных функций – либо затененная поверхность (функция `surf`), либо сетчатая поверхность (функция `mesh`):

```
>> surf(u)
```



```
>> mesh(u)
```



Чтобы вывести на один рисунок два графика (полученного методом «бегущего счета» и приближенного), необходимо после вывода первого графика набрать следующую команду:

```
>> hold on
```

Решение задачи, полученное методом Фурье, имеет следующий

вид:
$$U(x,t) = \frac{8}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} e^{-x^2(2k+1)^2 t} \sin \pi(2k+1)x \quad (1).$$

Для получения приближенного решения из точного (бесконечный ряд) с целью графического изображения и сравнения с решением, полученным численными методами, предлагается в системе MatLab в режиме прямых вычислений набрать следующие операторы:

```
>> x=0:0.1:1;  
>> t=0:0.01:0.5;  
>> u=funcВТВ(x,t,5);  
>> mesh(u)
```

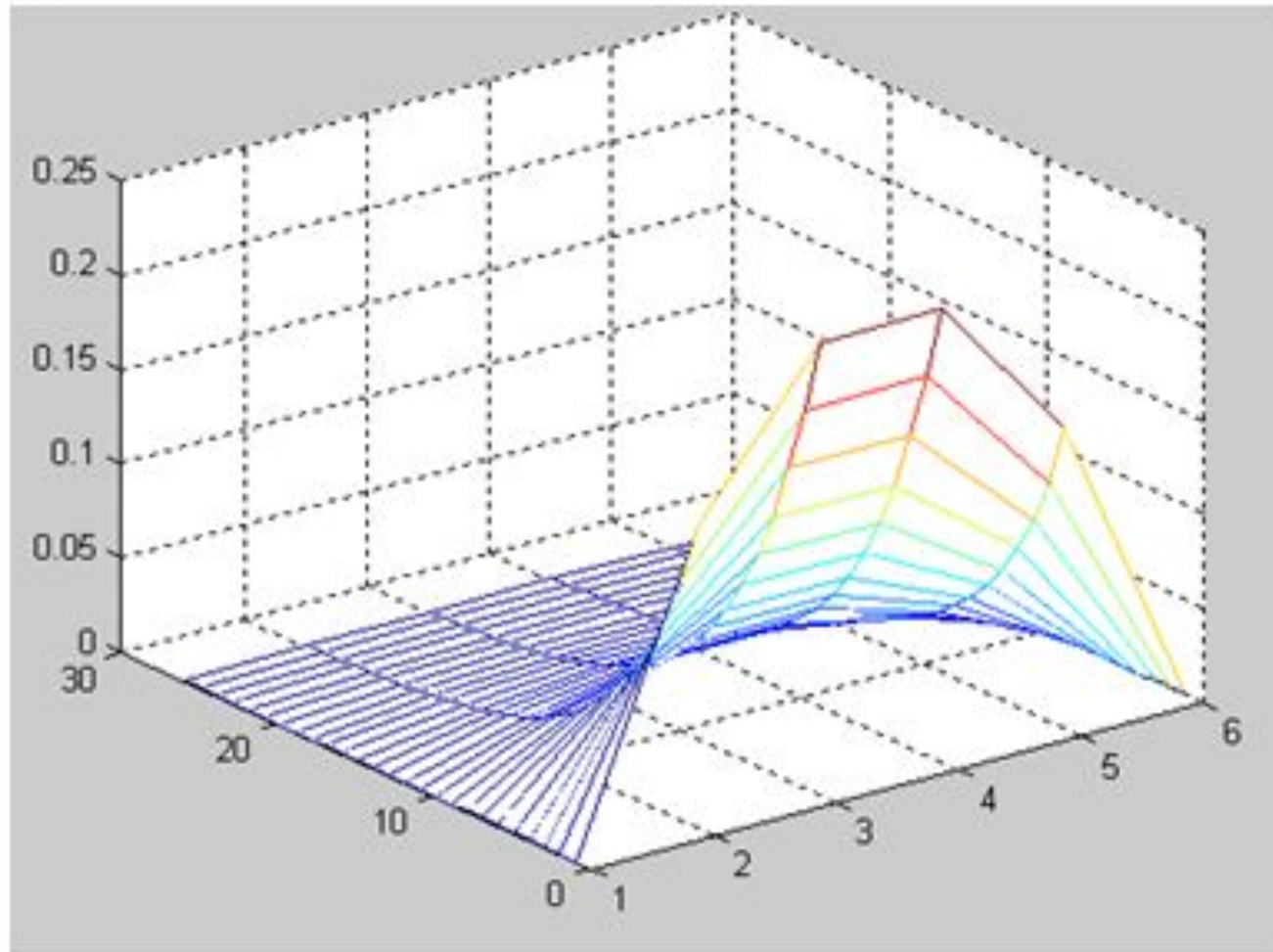
Внимание!! Важно предусмотреть перед процедурой вывода в графическом окне двух графиков совпадение числа узлов сетки численного решения с числом узлов сетки, по которой строится график приближенного решения.

M-функция $\text{funcBTB}(x,t,n)$ вычисляет конечный ряд с заданным числом слагаемых n . Эту функцию студент должен создать самостоятельно. В данной задаче вычисляется ряд (1) приближенно с учетом 5 слагаемых.

Тело m-функции выглядит следующим образом:

```
function u=funcBTB(x,t,n)
    u=zeros(length(t),length(x));
    for k=0:n
        u=u+8*exp(-
            ((2*k+1)*pi)^2*t) * sin((2*k+1)*pi*x) / ((pi*(2*k+1))^
            3);
    end
```


Ниже представлен график приближенного решения уравнения диффузии представленной выше краевой задачи математической физики.



На следующем рисунке показан вывод сразу двух графиков решения в одном графическом окне. Графики для наглядности специально получены с помощью разных встроенных функций.

