

# ***Систематическое интегрирование***

# Содержание

- 1. Некоторые сведения о многочленах*
- 2. Интегрирование дробно-рациональных функций.*
- 3. Интегрирование тригонометрических функций.*
- 4. Интегрирование простейших иррациональностей.*

*Некоторые сведения о*  
*многочленах*

# Понятие многочлена

Функция  $P_n(x) = A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_n$ , где  $n$ —целое число, называется многочленом или рациональной целой функцией от  $x$ . Число  $n$  называют степенью многочлена.

Коэффициенты  $A_0, A_1, \dots, A_n$  —это действительные или комплексные числа. Независимая переменная  $x$  также может быть как действительным, так и комплексным числом.

# Теорема Безу

Число  $a$  является корнем многочлена  $P_n(x)$  тогда и только тогда, когда многочлен делится на  $x-a$  без остатка.

# Доказательство

Если многочлен степени  $n$  разделить на  $x-a$ , то очевидно в частном получится многочлен степени  $n-1$ , а в остатке от деления число, то есть

$$(*) \quad P_n(x) = (x-a)Q_{n-1}(x) + r$$

Тогда если  $x=a$ —корень многочлена, то

$P_n(a) = 0$  и, подставляя  $x=a$ , в обе части равенства (\*), получим  $r=0$ .

# Доказательство

Обратно, если  $r=0$ , то при  $x=a$  правая часть (\*)  $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + r$  обращается в нуль, тогда и  $P_n(a) = 0$ , то есть  $x=a$ —корень .

Из теоремы Безу следует, что если  $x=a$ —корень многочлена, то

$$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x)$$

# Теоремы алгебры

**Теорема** . Всякий многочлен  $P_n(x)$  степени  $n$  имеет по крайней мере один корень.

**Теорема**. Всякий многочлен степени  $n$  разлагается на  $n$  линейных множителей вида  $(x - a_i)$  и множитель, равный коэффициенту при  $x^n$ .

$$P_n(x) = A_0(x - a_1)(x - a_2)\dots(x - a_n)$$



# Случай кратных действительных корней

Если в разложении многочлена на множители некоторые линейные множители окажутся одинаковыми, то их можно объединить, и тогда разложение многочлена на множители будет иметь вид:

$$P_n(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_m)^{k_m}$$

При этом  $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$ . В этом случае корни  $a_1, a_2, \dots, a_m$  называются корнями кратности  $k_1, k_2, \dots, k_m$  соответственно.

## Пример

$$P(x) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = (x - 2)(x - 2)(x - 1) = \\ = (x - 2)^2(x - 1)$$

Корень  $a_1 = 2$  –двукратный корень  
этого многочлена,  $a_2 = 1$  –простой  
корень.

# Случай комплексных корней

*Теорема.* Всякий многочлен  $n$ -ой степени имеет ровно  $n$  корней (действительных или комплексных).

*Теорема.* Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень  $a + bi$  то он имеет и сопряженный корень  $a - bi$ .

## Продолжение

Итак, в разложении многочлена на множители комплексные корни входят попарно сопряженными. Им соответствует множитель вида

$$\begin{aligned} & [x - (a + bi)][x - (a - bi)] = \\ & = [(x - a) - bi][(x - a) + bi] = (x - a)^2 + b^2 = \\ & = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 = x^2 + px + q, \end{aligned}$$

где дискриминант отрицателен.

# Случай кратных комплексных корней

Если комплексные корни многочлена являются кратными, то этот многочлен с действительными коэффициентами разлагается на множители согласно формуле

$$P_n(x) = A_0 (x - a_1)^{k_1} (x - a_2)^{k_2} \dots (x - a_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1x + q_1)^{e_1} \dots (x^2 + p_sx + q_s)^{e_s}$$

где  $k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2e_1 + \dots + 2e_s = n$

# *Интегрирование рациональных дробей*

# Рациональные дроби

Рациональной дробью называется выражение вида  $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ , где  $P_n(x), Q_m(x)$  -

многочлены степеней  $n$  и  $m$  соответственно. Если степень числителя ниже степени знаменателя, то рациональная дробь называется правильной, в противном случае - неправильной.

# Рациональные дроби

Если рациональная дробь является неправильной, то произведя деление  $P(x)$  на  $Q(x)$  по правилу деления многочленов, ее можно представить в виде  $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ , где  $R(x)$  - некоторый многочлен, а  $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$  - правильная рациональная дробь.



# Простейшие рациональные дроби

Правильные рациональные дроби вида

$$I. \frac{A}{x-a}, II. \frac{A}{(x-a)^k}, III. \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, IV. \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$$

где  $k$ —целое положительное число  $\geq 2$ ,  
дискриминант квадратного трехчлена

$x^2 + px + q$  отрицателен, называются  
простейшими дробями  $I$ ,  $II$ ,  $III$  и  $IV$  типов.

# Интегрирование простейших рациональных дробей

**Дробь 1-го типа:**

$$\int \frac{dx}{x+4} = \int \frac{d(x+4)}{x+4} = \ln|x+4| + C.$$

**Дробь 2-го типа:**

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(3x+1)^5} &= \frac{1}{3} \int (3x+1)^{-5} d(3x+1) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{(3x+1)^{-4}}{-4} + C = \frac{1}{-12(3x+1)^4} + C. \end{aligned}$$

# Пример интегрирования рациональной дроби

Найдем  $\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$

Разложим знаменатель дроби на  
множители:  $x^3 + 4x^2 + 4x = x(x^2 + 4x + 4) = x(x + 2)^2$ .

Тогда  $\frac{3x^2 + 8}{x(x + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{(x + 2)^2}$ .

Приведем дроби к общему  
знаменателю и освободимся от  
знаменателя.

# Продолжение

$$3x^2 + 8 = A(x + 2)^2 + Bx(x + 2) + Cx.$$

Положим в обеих частях этого тождества  $x=0$ . Получим  $8=4A$ . Тогда  $A=2$ . При  $x=-2$   $20=-2C$ , а  $C=-10$ .

Приравнивая коэффициенты при  $x^2$  в обеих частях тождества, получаем  $3=A+B$ , а так как  $A=2$ , то  $B=1$ . Имеем

# Продолжение

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2 + 8}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx &= 2 \int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x+2} - 10 \int \frac{dx}{(x+2)^2} = \\ &= 2 \ln|x| + \int \frac{d(x+2)}{x+2} - 10 \int (x+2)^{-2} d(x+2) = \\ &= 2 \ln|x| + \ln|x+2| + 10 \frac{1}{x+2} + C.\end{aligned}$$

# Пример интегрирования рациональной дроби

Вычислить  $\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx$

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Приведем выражение к общему  
знаменателю:

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}$$

# Продолжение

Приравняем числители

$$x^3 - 2x = Ax + B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D .$$

Многочлены, стоящие в правой и левой частях этого соотношения тождественно равны, т. е. равны коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  в левой и правой частях последнего соотношения.

# Продолжение

$$x^3 - 2x = \frac{Ax + B + Cx^3 + Dx^2 + Cx + D}{x^3}$$

$x^3$	$1 = C$
$x^2$	$0 = D$
$x$	$-2 = A + C$
$x^0$	$0 = B + D$

Отсюда получаем:  $C=1$ ,  $D=0$ ,  $A=-3$ ,  $B=0$ .  
Следовательно, подставляя найденные коэффициенты в разложение дроби на простейшие, получим



# Продолжение

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3 - 2x}{(x^2 + 1)^2} dx &= \int \frac{-3x dx}{(x^2 + 1)^2} + \int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \\ &= -\frac{3}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{3}{2(x^2 + 1)} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.\end{aligned}$$

# ***Интегрирование тригонометрических функций***

# Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Если хотя бы одно из чисел  $m$  или  $n$  - нечетное положительное число, то отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

# Примеры

Вычислить  $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$  .

Отделим от нечетной степени косинуса один множитель, внесем под знак дифференциала синус и получим:

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} d(\sin x) &= \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} - \int d(\sin x) = \\ &= \int \sin^{-2} x d(\sin x) - \sin x = \frac{\sin^{-1} x}{-1} - \sin x + C = \\ &= -\frac{1}{\sin x} - \sin x + C. \end{aligned}$$

# Продолжение

2. **Интегралы вида**  $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ ,  
где  $m$  и  $n$  – четные положительные  
числа, вычисляются с помощью формул  
понижения степени:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

# Пример

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \cos^2 x dx &= \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x + C.\end{aligned}$$

# Продолжение

## 3. Интегралы вида

$$\int \sin kx \sin mx dx, \int \sin kx \cos mx dx, \int \cos kx \cos mx dx$$

вычисляются преобразованием произведения тригонометрических функций в сумму по формулам:

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos(k - m)x - \cos(k + m)x),$$

$$\sin kx \cos mx = \frac{1}{2} (\sin(k - m)x + \sin(k + m)x),$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2} (\cos(k - m)x + \cos(k + m)x).$$

# Пример

Рассмотрим пример:

$$\begin{aligned}\int \sin 10x \sin 15x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(-5x) dx - \cos 25x) dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 25x dx = \\ &= \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{50} \sin 25x + C.\end{aligned}$$



# Продолжение

4. Интегралы  $\int tg^m x dx$ ,  $\int ctg^m x dx$  где  $m \in N$   
вычисляются заменой

$$tgx = t, \quad x = arctgt, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Второй интеграл берется с помощью  
подстановки  $t=ctgx$ .

# Пример

Вычислим:

$$\int \operatorname{tg}^3 x dx = \int \frac{t^3}{1+t^2} dt = \int \frac{t^3 + t - t}{1+t^2} dt =$$

Разложим интеграл на два интеграла..

Получим

$$= \int \frac{t^3 + t}{1+t^2} dt - \int \frac{t}{1+t^2} dt = \int t dt - \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) + C = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

# Продолжение

5. Такой же заменой можно брать интегралы

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}, \quad n, m \text{ — целые числа}$$

одинаковой четности. Например,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos^4 x} &= \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = t \\ \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \end{array} \right| = \\ &= \int (1 + t^2) dt = t + \frac{t^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C. \end{aligned}$$

# Универсальная подстановка

6. Интегралы  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  берут с помощью универсальной подстановки

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ . Откуда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Например,

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

# Продолжение

- 7. **Универсальная подстановка приводит к громоздким выкладкам!** Поэтому если  $R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x)$ , то удобнее пользоваться подстановкой  $\operatorname{tg} x = t$ .

Тогда

$$\operatorname{tg} x = t, \quad x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$
$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

# Пример

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} &= \int \frac{dt}{(1 + t^2)\left(1 + \frac{t^2}{1 + t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1 + 2t^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(\sqrt{2}t)}{1 + (t\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg}x) + C.\end{aligned}$$

# *Интегрирование простейших иррациональностей*

# Иррациональность, содержащая квадратный трехчлен

1. Интегралы вида  $\int \frac{(ax + b)dx}{\sqrt{mx^2 + nx + p}}$  берут, выделяя полный квадрат и вводя новую переменную.

$$\begin{aligned} \int \frac{3x - 6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx &= \int \frac{3(x - 2)}{\sqrt{(x - 2)^2 + 1}} dx = 3 \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2 + 1}} = \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2 + 1)}{\sqrt{t^2 + 1}} = 3\sqrt{t^2 + 1} + C = 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} + C. \end{aligned}$$



# Продолжение

2. Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) dx$   
вычисляются с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n.$$

Интегралы вида  $\int R(x, \sqrt[m]{ax+b}, \sqrt[k]{ax+b}) dx$   
вычисляются с помощью подстановки

$$ax+b = z^n,$$

где  $n$  – наименьшее общее кратное чисел  $m$  и  $k$ .

# Тригонометрические подстановки

Интегралы вида

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$$

ВЫЧИСЛЯЮТ С ПОМОЩЬЮ  
тригонометрических подстановок.

1.  $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx; \quad x = a \sin z, \quad dx = a \cos z dz,$   
 $\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 z} = a \sqrt{1 - \sin^2 z} = a \cos z.$

# Тригонометрические подстановки

$$2. \int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad x = atgz, \quad dx = \frac{adz}{\cos^2 z},$$

$$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 tg^2 z} = a\sqrt{1 + tg^2 z} = \frac{a}{\cos z}.$$

$$3. \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad x = \frac{a}{\cos z}, \quad dx = \frac{a \sin z dz}{\cos^2 z},$$

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 z} - a^2} = a\sqrt{\frac{1 - \cos^2 z}{\cos^2 z}} = a \frac{\sin z}{\cos z} = atgz.$$

# Пример

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \operatorname{tg} z, dx = \frac{dz}{\cos^2 z} \\ \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1} = \frac{1}{\cos z} \end{array} \right| = \int \frac{dz}{\cos z \operatorname{tg}^2 z \cos^2 z} = \\ &= \int \frac{dz}{\cos z \sin^2 z} = \int \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos z \sin^2 z} dz = \int \frac{dz}{\cos z} + \int \frac{\cos z}{\sin^2 z} dz = \\ &= \int \frac{\cos z dz}{\cos^2 z} + \int \sin^{-2} z d(\sin z) = \int \frac{d(\sin z)}{1 - \sin^2 z} - \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 + \sin z}{1 - \sin z} \right| - \frac{1}{\sin z} + C = \\ &= \left| \sin z = \frac{\operatorname{tg} z}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 z + 1}} \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \right| - \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} + C.\end{aligned}$$