

Системы алгебраических уравнений и способы их решения

Несколько решений одной системы

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 15, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75. \end{cases}$$

I способ

$$\begin{cases} x + y + z = 15 & / \cdot 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75 \\ 10x + 10y + 10z = 150 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 10y - 10z = -75 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 0 \\ (x - 5)^2 + (y - 5)^2 + (z - 5)^2 = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x = y = z = 5 \end{cases}$$

ОТВЕТ: (5; 5; 5).

II способ

$$(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)$$

Из I и II уравнений системы имеем

$$225 = 75 + 2(xy + yz + xz) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy + yz + xz = 75$$

$$(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) = (xy + yz + zx)^2$$

Используя неравенство Коши – Буняковского – Шварца

$(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) \geq (xy + yz + zx)^2$
В нашем случае мы имеем равенство, т.е. векторы $\vec{a}(x; y; z)$ и $\vec{b}(y; z; x)$ – коллинеарные.

$$x = ty; y = tz; z = tx \Rightarrow xyz = t^3 xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow x = y = z = 5$$

Ответ: (5; 5; 5).

III способ

$$\begin{cases} (x + y + z)^2 = 225 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75, \end{cases}$$

$$(x + y + z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = 225 - 75,$$

$$2xy + 2yz + 2xz = 150,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 75.$$

$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy + 2yz - 2xz = 0,$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 5.$$

ОТВЕТ: (5; 5; 5).

IV способ

$$\begin{cases} (x-5) + (y-5) + (z-5) = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 75. \end{cases}$$

Пусть $x-5 = a, y-5 = b, z-5 = c.$

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 75 - 10(x + y + z) = \\ &= 75 + 75 - 10 - 15 = 0 \Rightarrow a = b = c = 0, \end{aligned}$$

$$x-5 = y-5 = z-5 = 0 \Rightarrow x = y = z = 5.$$

Ответ: (5; 5; 5).

V способ

Рассмотрим 2 вектора $\vec{a}(x; y; z)$ и $\vec{b}(1; 1; 1)$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{75},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

$$\vec{a} * \vec{b} = x * 1 + y * 1 + z * 1 = 15,$$

$$|\vec{a}| * |\vec{b}| = \sqrt{75} * \sqrt{3} = 15,$$

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| \Rightarrow \vec{a} \uparrow \uparrow \vec{b}, \frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1},$$

$$x = y = z = 5.$$

Ответ: (5; 5; 5)

VI способ

$x + y + z = 15$ – уравнение плоскости;

$x^2 + y^2 + z^2 = 75$ – уравнение сферы с центром в н. к., $R = \sqrt{75}$.

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$d = \frac{|1*0 + 1*0 + 1*0 - 15|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{15}{\sqrt{3}} = \sqrt{75},$$

$$d = R = \sqrt{75},$$

$$x = y = z = 5.$$

Ответ: (5; 5; 5)