

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Лекция 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ

УРАВНЕНИЙ. МЕТОД ОБРАТНОЙ
МАТРИЦЫ. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Линейное алгебраическое уравнение имеет вид:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

где a_i, b – известные числа, $i = \overline{1, n}$; x_i – неизвестные, $i = \overline{1, n}$.

Система m уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Сокращенно: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, i = \overline{1, m}$.

Здесь a_{ij} и b_i – произвольные числа, которые называются соответственно *коэффициентами системы* при переменных x_j и *свободными членами*, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

- Обозначим матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

- тогда $A \cdot X = B$ – запись системы в матричной форме.
- **Решением системы** называется вектор X , который после подстановки в систему превращает все ее уравнения в тождества.
- Система называется **совместной**, если имеет хотя бы одно решение, и **несовместной** – если не имеет.
- Совместная система, имеющая единственное решение, называется **определенной**, а если она имеет более одного решения – то **неопределенной**.
- Если система неопределенная, то каждое ее решение называется **частным решением** системы. Множество всех частных решений системы называется ее **общим решением**.

- Решить систему – это, значит, выяснить, совместна ли она, а в случае совместности, найти ее общее решение.
- Две системы, имеющие одинаковое общее решение называются *эквивалентными*.
- Система линейных уравнений называется *однородной*, если все её свободные члены равны нулю, т.е. $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$
- Однородная система является совместной, так как
- $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ всегда является решением системы.
- *Расширенной матрицей* системы называется матрица A_b системы с присоединенным столбцом свободных членов.

$$A_b = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

- **§ 2. МЕТОД ОБРАТНОЙ МАТРИЦЫ**

- Рассмотрим частный случай системы линейных уравнений
когда **$m = n$**

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- или в матричной форме **$A \cdot X = B$** .
- Основная матрица такой системы квадратная:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} .$$

- Определитель этой матрицы Δ называется определителем системы. Если определитель системы не равен нулю, то система называется невырожденной.
- Для получения решения исходной системы в этом случае, предположим, что матрица A невырожденная, т. е. определитель $|A| \neq 0$, и для нее существует обратная матрица A^{-1} .
- Умножая обе части равенства $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1} , получаем

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X,$$

- и решением системы будет вектор-столбец $X = A^{-1}B$.
- Пример. Решить систему уравнений методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ -2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

- Решение. Представим систему в матричном виде:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix},$$

- т.е. в матричной форме система имеет вид $A \cdot X = B$.
Найдем определитель системы $A = -7$. Так как $|A| \neq 0$, то матрица A -невырожденная, и для неё существует обратная матрица - A^{-1} . Для ее нахождения, вначале, транспонируем матрицу A .

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Затем найдем алгебраические дополнения к матрице A^T .

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -8,$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 7,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7. \quad A^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Используя формулу $X = A^{-1}B$, найдем решения системы:

$$X = A^{-1}B = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & -8 & -7 \\ -2 & 1 & 7 \\ -4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + (-8) \cdot 0 + (-7) \cdot 7 \\ (-2) \cdot 7 + 1 \cdot 0 + 7 \cdot 7 \\ (-4) \cdot 7 + 2 \cdot 0 + 7 \cdot 7 \end{bmatrix} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -42 \\ 35 \\ 21 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \\ -3 \end{bmatrix},$$

• т.е. решение системы: $x_1 = 6$, $x_2 = -5$, $x_3 = -3$. Произведем проверку:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0; \\ -2x_2 + x_3 = 7. \end{cases} \quad \begin{cases} 6 - 2 \cdot (-5) + 3 \cdot (-3) = 7 \\ 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-5) - (-3) = 0 \\ -2 \cdot (-5) + (-3) = 7 \end{cases}$$

§ 3. ФОРМУЛЫ КРАМЕРА

Матричное равенство $X = A^{-1}B$ запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \cdots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \frac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \cdots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \cdots \\ \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \cdots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Здесь $A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \dots + A_{ni}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам i – го столбца.

Тогда имеем

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Полученные формулы называются формулами Крамера.

Таким образом, невырожденная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет единственное решение, которое может быть найдено также по формулам Крамера.

- Решить систему по формулам Крамера

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ x + 2y + z = 1 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{1}$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{2}, \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 0, \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{1}{2}.$$