Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

- Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - неизвестные;

a_{ij} - коэффициенты при неизвестных,

где i - номер уравнения,

j - номер неизвестного;

b_i - свободные члены (правые части).

- Система наз. неоднородной, если не все b_i равны нулю.

Система наз. однородной, если все b_i равны нулю.

• Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица

$$A^{*}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{1} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_{2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_{m} \end{array}\right)$$

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**.

Если система имеет только одно решение, то она называется **определенной.**

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной.**

Система, имеющая более чем одно решение, называется **неопределенной (совместной и неопределенной).**

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных , то система называется **квадратной.**

Две системы, множества решений которых совпадают, называются **эквивалентными или равносильными**.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется **эквивалентным** или **равносильным преобразованием**.

Метод Гаусса

Рассмотрим квадратную систему:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Исходную систему можно представить в виде таблицы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(-4) (-3) (-5)

$$\left(\begin{array}{ccccc} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ (-1)\quad(-2) \\ 2 \\ 5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}$$

Полученная матрица соответствует системе:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11; \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45; \\ x_3 - 6x_4 = 15; \\ 205x_4 = 410. \end{cases}$$

Матричный метод

- С помощью этого метода можно решать квадратные системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

- Систему можно записать в виде

$$A \cdot X = B$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

- Если матрица A невырожденная, то

можно выполнить преобразования

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Метод Крамера

- Если определитель системы n линейных уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система является определенной и её единственное решение находится по формуле

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Здесь Δ_i – определитель, получающийся из определителя Δ заменой *i*-го столбца столбцом свободных членов.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n}{\Delta}$$

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = A_{11} \cdot b_1 + A_{21} \cdot b_2 + \ldots + A_{n1} \cdot b_n$$

- Если $\Delta = 0$ и по крайне мере один из определителей $\Delta_i \neq 0$, то система не имеет решения.

- Если $\Delta = 0$ и $\Delta_i = 0$, система либо не имеет решения, либо имеет бесконечно много решений.

Теорема Кронекера-Капелли

Для того чтобы система m неоднородных линейных уравнений с n неизвестными была совместной, необходимо и достаточно, чтобы

$$r(A) = r(A^*)$$

- Замечание. Пусть система совместна и

$$r(A) = r(A^*) = k$$

- если число уравнений равно числу неизвестных, то система имеет единственное решение;
- если число уравнений меньше числа неизвестных, то система имеет множество решение.

Однородные системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема о совместности однородной системы

Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был меньше числа неизвестных n.