

Лекция 3.

Тема: Системы линейных уравнений: методы решения.

Цель: Рассмотреть понятие СЛАУ.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел x_1, x_2, \dots, x_n , обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется совместной.

Если система имеет только одно решение, то она называется **определенной**.

Система, имеющая более чем одно решение, называется **неопределенной (совместной и неопределенной)**.

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$), называется **однородной**.

Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется **квадратной**.

Две системы, множества решений
которых совпадают, называются

эквивалентными или

равносильными .

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется

эквивалентным

ИЛИ

равносильным

преобразованием.

Общий метод решения СЛАУ. (Метод Гаусса).

Если система совместна, т. е.

$\text{rang } A = \text{rang } A^* = (r)$, то r -уравнений СЛАУ линейно-независимы, а остальные $(n - r)$ являются линейными комбинациями.

Решить систему значит выразить базисные неизвестные через свободные, придавая различные значения свободным неизвестным.

Общий метод решения однородной СЛАУ.

Теорема: Если ранг матрицы однородной

$$\overline{x_1}, \overline{x_2} \dots \overline{x_{m-r}} \text{ СЛАУ} = r,$$

то система имеет $(m - r)$ линейно -
независимых решений.

Опр.: Совокупность решений, т. е.
совокупность

называется фундаментальной системой
решений однородной СЛАУ.

Теорема об общем решении неоднородной СЛАУ.

Теорема: Если $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{m-r}$ фундаментальная система решений соответствующей однородной СЛАУ; \bar{z} - некоторое решение неоднородной СЛАУ, то сумма $\bar{y} = \bar{z} + c_1 \bar{x}_1 + c_2 \bar{x}_2 + \dots + c_{m-r} \bar{x}_{m-r}$ - решение неоднородной СЛАУ.

Полученное решение называется общим решением неоднородной СЛАУ.

Матричный способ решения СЛАУ.

СЛАУ запишем в виде $A \times X = B$.

Если $\det A \neq 0$, то для матрицы A суц.
обратная A^{-1} .

Умножим обе части СЛАУ слева на A^{-1} :

$$A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B;$$

$$E \times X = A^{-1} \times B;$$

$$X = A^{-1} \times B.$$

Метод Крамера.

СЛАУ имеет вид $A \cdot X = B$ при $\det A \neq 0$; $X = A^{-1} \cdot B$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n \times 1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} x_1 + A_{21} x_2 + \dots + A_{n1} x_n \\ A_{12} x_1 + A_{22} x_2 + \dots + A_{n2} x_n \\ \dots \\ A_{1n} x_1 + A_{2n} x_2 + \dots + A_{nn} x_n \end{pmatrix}$$

$$1. x_1 = \frac{A_{11} * b_1 + A_{21} * b_2 \dots + A_{n1} * b_n}{\det A}$$

$$2. x_n = \frac{A_{1n} * b_1 + A_{2n} * b_2 \dots + A_{nn} * b_n}{\det A}$$

Числители - величина определителя, разложенного по первому столбцу, тогда первый столбец это элементы $b_1, b_2 \dots b_n$, а остальные столбцы – это столбцы матрицы A и т.д.

Если $\det A \neq 0$, то СЛАУ имеет единственное решение и определяется формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\det A} \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\det A} \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\det A}$$

Элементарные преобразования матрицы

- 1) перемена местами двух строк;
- 2) умножение строки на число, отличное от нуля;
- 3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, ***треугольной матрицей.***

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система ***совместна и определена.***

Если матрицу A можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу A назовем **трапециевидной** или **трапецеидальной**.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет **бесконечно много решений**.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются **базисными**.

Остальные неизвестные называются **свободными**.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется *частным решением*.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется ***общим решением***.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется **базисным**.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое **рангом системы**.

Вопросы:

- 1) Когда система имеет единственное решение?
- 2) Какие элементарные преобразования матрицы можно делать при решении СЛАУ?