Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 3.

Тема: Системы линейных уравнений: методы решения.

Цель: Рассмотреть понятие СЛАУ.

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Здесь x_1, x_2, , x_n – неизвестные величины;

a_{ij} (i = 1,2, … , m; j =1,2, … , n) – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс - номер уравнения, второй — номер неизвестной);

b_1, b_2, …, b_m – числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется *совместной*.

Если система имеет только одно решение, то она называется ***<u>определенной</u>***.

Система, имеющая более чем одно решение, называется *<u>неопределенной</u>* (*<u>совместной</u> и <u>неопределенной</u>*).

Если система не имеет решений, то она называется ***<u>несовместной</u>***.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется ***<u>однородной</u>***.

Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных ($m=n$), то система называется ***<u>квадратной</u>***.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются ***<u>эквивалентными</u>*** или ***<u>равносильными .</u>***

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется ***эквивалентным*** или ***равносильным преобразованием.***

Общий метод решения СЛАУ. (Метод Гаусса).

Если система совместна, т. е. rang A = rang A* = (r),то r-уравнений СЛАУ линейно-независимы, а остальные (n - r) являются линейными комбинациями. Решить систему значит выразить базисные неизвестные через свободные, придавая различные значения свободным неизвестным.

Общий метод решения однородной СЛАУ.

Теорема: Если ранг матрицы однородной

$\bar{x}_1, \bar{x}_2 \cdots \bar{x}_{m-r}$ СЛАУ = r,

то система имеет (m - r) линейно - независимых решений.

Опр.: Совокупность решений, т. е. совокупность

называется фундаментальной системой решений однородной СЛАУ.

Теорема об общем решении неоднородной СЛАУ.

Теорема: Если $\overline{x_1}, \overline{x_2} \cdots \overline{x_{m-r}}$ фундаментальная система решений соотв-щей однор. СЛАУ;

$\overline{z}$ - некоторое решение неоднор. СЛАУ, то сумма $\overline{y} = \overline{z} + c_1\overline{x_1} + c_2\overline{x_2} \cdots c_{m-r}\overline{x_{m-r}}$ - решение неоднор. СЛАУ.

Полученное решение называется общим решением неоднородной СЛАУ.

Матричный способ решения СЛАУ.

СЛАУ запишем в виде A x X=B.

Если det A≠0, то для матрицы А сущ. обратная А-1.

Умножим обе части СЛАУ слева на А-1:

А-1 x A x X = A-1 x B;

E x X = A-1 x B;

X = A-1 x B.

Метод Крамера.

СЛАУ имеет вид A x X=B при det A≠0 ; X=A-1 x B.

$$\begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ xn \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A11 & A12 & \dots & An1 \\ A21 & A22 & \dots & An2 \\ A1n & A2n & \dots & Ann \end{pmatrix}_{n \times n} \times \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ bn \end{pmatrix}_{n \times 1} = \frac{1}{\det A}$$

$$\begin{pmatrix} A11 \times b1 + A21 \times b2 \dots\dots\dots \\ A12 \times b1 + A22 \times b2 \dots\dots\dots \\ A1n \times b1 + A2n \times b2 + Ann \times bn \end{pmatrix}$$

1. $$x_1 = \frac{A_{11} * b_1 + A_{21} * b_2 \cdots + A_{n1} * b_n}{\det A}$$

2. $$x_n = \frac{A_{1n} * b_1 + A_{2n} * b_2 \cdots + A_{nn} * b_n}{\det A}$$

Числители - величина определителя, разложенного по первому столбцу, тогда первый столбец это элементы b_1, b_2 … b_n, а остальные столбцы – это столбцы матрицы А и т.д.

Если det A≠0, то СЛАУ имеет единственное решение и определяется формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta 1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\Delta 2}{\det A} \qquad x_n = \frac{\Delta n}{\det A}$$

Элементарные преобразования матрицы

1) перемена местами двух строк;
2) умножение строки на число, отличное от нуля;
3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, ***треугольной матрицей*.**

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система ***совместна*** *и* ***определенна****.*

Если матрицу **A** можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера ***m*** и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу **A** назовем ***трапециевидной*** или ***трапецеидальной***.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет ***бесконечно много решений***.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются ***базисными.***

Остальные неизвестные называются ***свободными***.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется *частным решением.*

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется ***общим решением.***

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется ***базисным***.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое ***рангом системы***.

Вопросы:

1) Когда система имеет единственное решение?
2) Какие элементарные преобразования матрицы можно делать при решении СЛАУ?