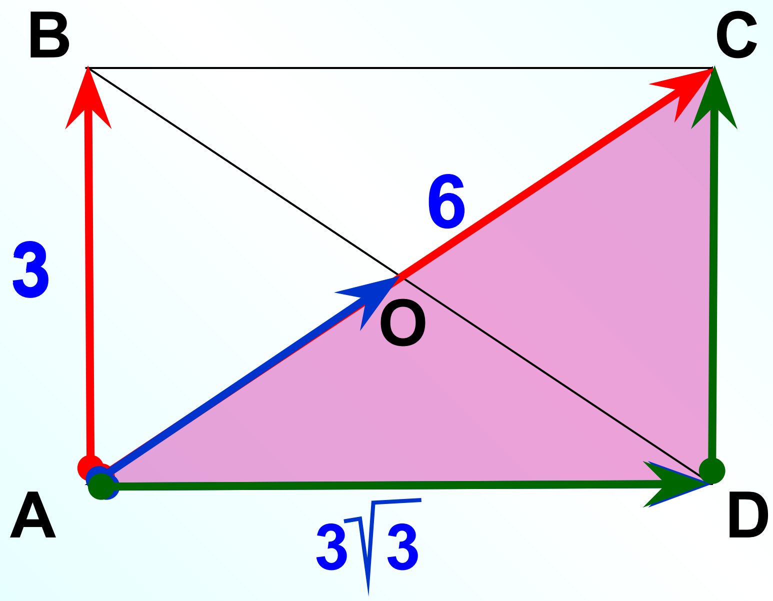
Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия №1, г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Скалярное произведение в координатах

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"



ABCD - прямоугольник

$$AD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\cos\angle BAD = \frac{AB}{AC}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos \widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} = 3 \cdot 6 \cdot \frac{3}{6} = 9$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AD} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{AD}| \cos \widehat{\vec{AO}, \vec{AD}} = 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{27}{2}$$

$\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0$ т.к. $\vec{AD} \perp \vec{DC}$

Теорема **Скалярное произведение векторов**

$$\vec{a}\{x_1; y_1\} \text{ и } \vec{b}\{x_2; y_2\}$$

выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$

Доказательство:

Случай, когда один из векторов нулевой

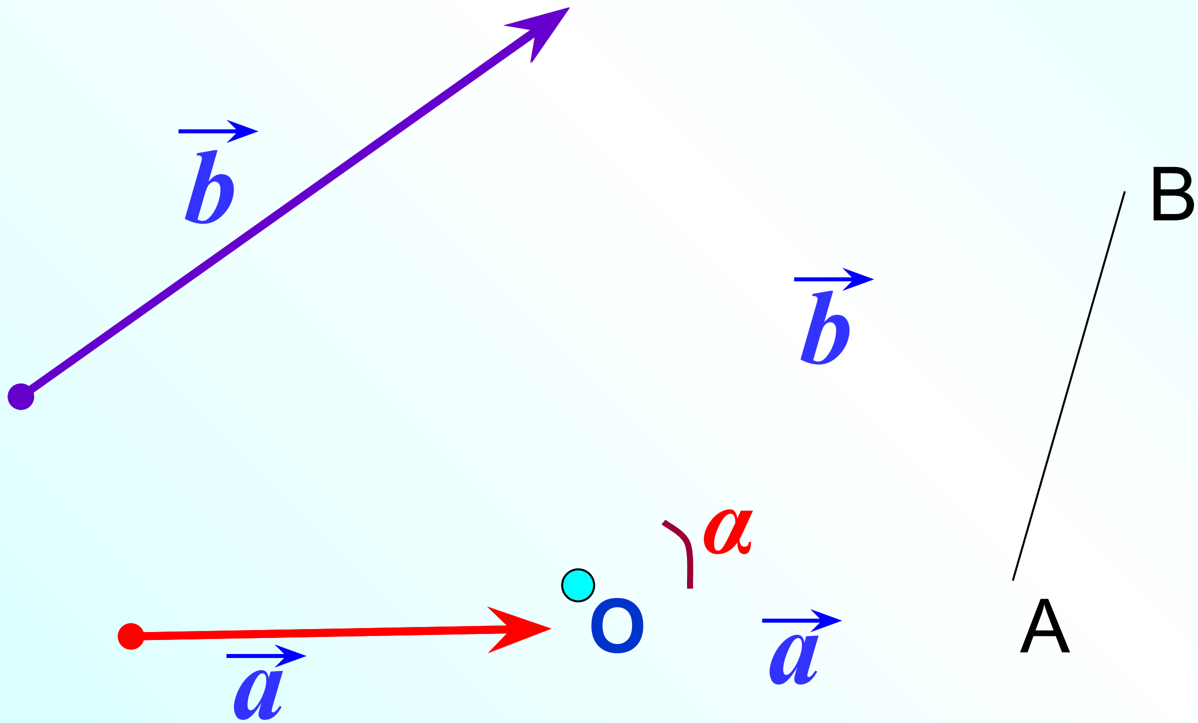
$$\vec{a}\{x_1; y_1\} \qquad \vec{0}\{0; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0$$

Рассмотрим случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не нулевые

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то по теореме косинусов:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos\alpha \quad *$$



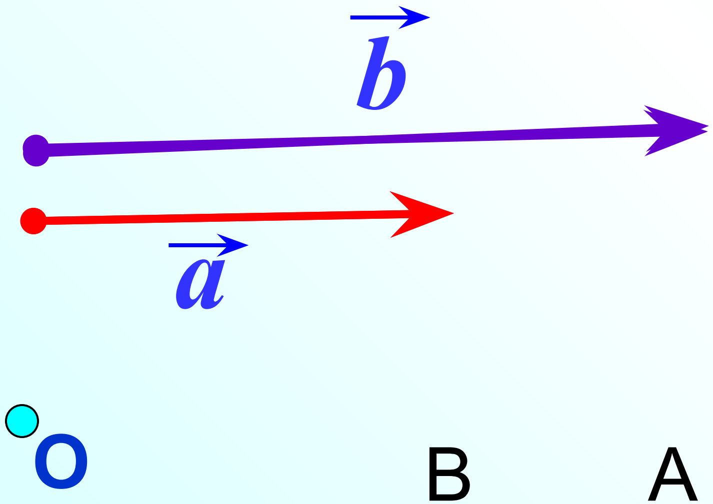
Равенство $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2\cdot OA \cdot OB \cos\alpha$ *

верно и для коллинеарных векторов.

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\alpha = 0^0$$

$$\cos\alpha = 1$$



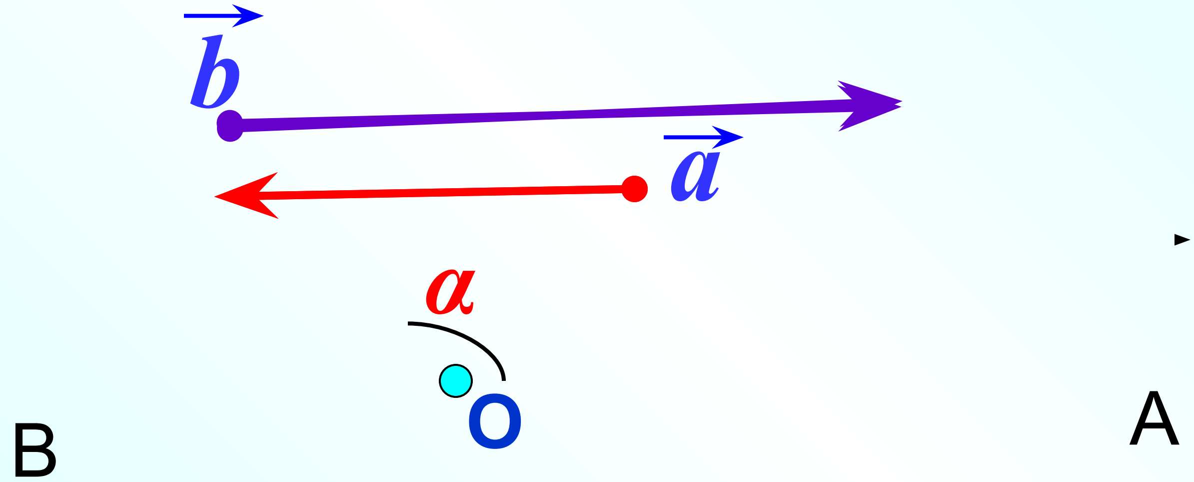
$$AB^2 = (OA - OB)^2 =$$

$$= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \mathbf{1} =$$

$$= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$$

Равенство $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos\alpha$ *

верно и для коллинеарных векторов.



Если $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

$\alpha = 180^0$

$\cos\alpha = -1$

$AB^2 = (OA + OB)^2 =$

$1 = -\cos\alpha$

$= AO^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot 1 =$

$= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos\alpha$

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos\alpha$ *

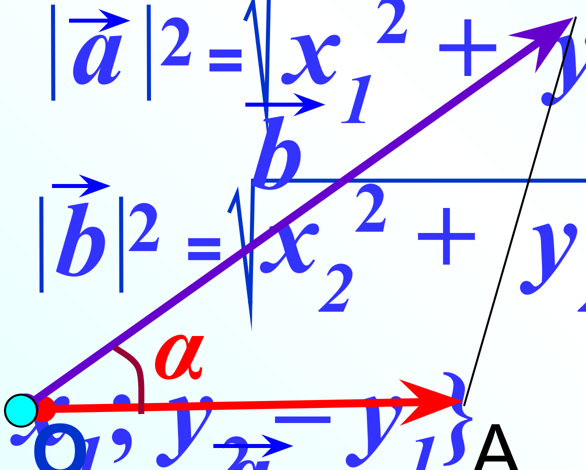
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$-|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}) \; : 2$

Из ΔABO



$\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ $|\vec{a}|^2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

$\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$ $|\vec{b}|^2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$

$\vec{b} - \vec{a}\,\{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$

$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Следствие 1

Ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Пример

$\vec{b}\,\{-2;\ 1\}$ $\qquad$ $\vec{d}\,\{\ 2;\ 4\}$

$$\cdot \quad + \quad \cdot \quad = 0 \qquad \vec{b} \perp \vec{d}$$

Следствие 2

Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$

выражается формулой

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Следствие 2

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$$

Доказательство:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{\qquad}{\quad\cdot\quad}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:

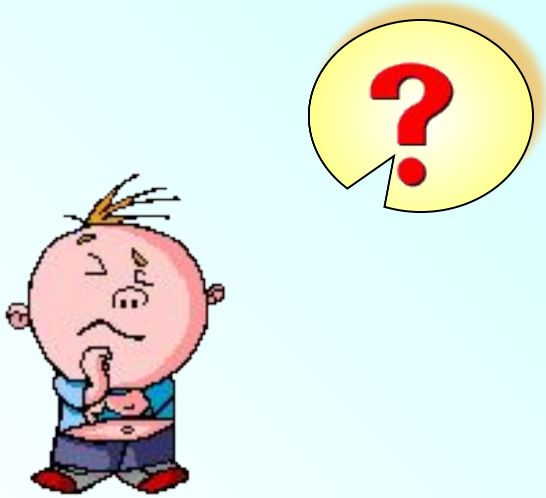
1. $\vec{a}^{\,2} \geq 0$ причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

2. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ ***Переместительный закон***

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ ***Распределительный закон***

4. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ ***Сочетательный закон***

Обоснуем



Свойство 1 следует из определения скалярного квадрата вектора

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2$$

$\vec{a}^{\,2} \geq 0$ причем $\vec{a}^{\,2} > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ **Переместительный закон**

Свойство 2 следует из определения скалярного

произведения векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Распределительный закон

Докажем свойство 3

Рассмотрим векторы

$\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ $\vec{b}\,\{x_2; y_2\}$ $\vec{c}\,\{x_3; y_3\}$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = (x_1+x_2)\,x_3+(y_1+y_2)\,y_3 =$$

$$=(x_1x_3+x_2x_3)+(y_1y_3+y_2y_3)=$$

$$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ **Сочетательный закон**

Докажем свойство 4

Рассмотрим векторы

$\vec{a}\,\{x_1; y_1\}$ $\quad k\vec{a}\,\{kx_1; ky_1\}$ $\quad \vec{b}\,\{x_2; y_2\}$

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b} = (kx_1)\,x_2 + (ky_1)\,y_2 =$$

$$= k\,(x_1x_2 + y_1y_2) =$$

$$= k(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

Распределительный закон

имеет место для любого числа слагаемых.

Например,

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{d} = \vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}+\vec{c}\cdot\vec{d}$$

$\vec{a}\{3;-4\}$ $\vec{b}\{-2;1\}$ $\vec{c}\{-2;-1,5\}$

Найдите

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot 1 = -10$ **тупой**

$\vec{b}\cdot\vec{c} = (-2)\cdot(-2) + 1\cdot(-1,5) = 2,5$ **острый**

$\vec{c}\cdot\vec{a} = 3\cdot(-2) + (-4)\cdot(-1,5) = 0$ ✔ **прямой**

Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{a}$

Найдите абсциссу вектора $\vec{d}$, если известно, что

$\vec{b}\{-2;\ 1\}$ $\vec{d}\{\ x;\ 4\}$ $\vec{b} \perp \vec{d}$

$$\cdot \quad + \quad \cdot \quad = 0$$

$$x = 2$$

$$* \quad \vec{b} \perp \vec{d} \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

$\vec{a}\,\{4;\,-2\}$ $\vec{i}\,\{1;\,0\}$

$\vec{c}\,\{-2;-1{,}5\}$ $\vec{j}\,\{0;\,1\}$

Найдите

$\vec{a}\cdot\vec{i} = 4\cdot 1 + (-2)\cdot 0 = 4$ **острый**

$\vec{c}\cdot\vec{j} = (-2)\cdot 0 + (-\,1{,}5)\cdot 1 = -\,1{,}5$ **тупой**

$\vec{i}\cdot\vec{j} = 1\cdot 0 + 0\cdot 1 = 0$ **прямой**

Перпендикулярны ли векторы $\vec{a}$ и $\vec{i}$, $\vec{c}$ и $\vec{j}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{i}$, $\vec{c}$ и $\vec{j}$, $\vec{i}$ и $\vec{j}$

Найдите скалярное произведение векторов:

$\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}\ \{3;\ -4\}$ и $\vec{b}\ \{-2;\ 0\}$

$$(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 25 - 4$$

$$= 21$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25}$$

$$|\vec{a}|^2 = 25$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4}$$

$$|\vec{b}|^2 = 4$$

Найдите скалярное произведение векторов:

$\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{a}\,\{3;\ -4\}$ и $\vec{b}\,\{-2;\ 0\}$

Найдите другой способ решения

Найдите скалярное произведение векторов:

$\vec{i}-\vec{j}$ и $2\vec{i}+3\vec{j}$, если $\vec{i}$ и $\vec{j}$ – координатные векторы.

$$(\vec{i}-\vec{j})(2\vec{i}+3\vec{j}) = 2\vec{i}^{\,2} + 3\overset{0}{\vec{i}\vec{j}} - 2\overset{0}{\vec{i}\vec{j}} - 3\vec{j}^{\,2} =$$

$$= 2|\vec{i}|^2 - 3|\vec{j}|^2 = 2\cdot 1 - 3\cdot 1 = -1$$

$|\vec{i}| = 1$

$|\vec{j}| = 1$

Вычислить $\vec{CE} \cdot \vec{AB} + \vec{CB} \cdot \vec{BA}$, если

A(-3; 3), B(1; 1), C(-2; 4), E(-1;2). Найдите 2 способа.

1 **способ**

2 **способ**

№1050 Вычислить $|\vec{a}+\vec{b}|$

если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} = 60^0$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}+\vec{b}|^2$$

$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\ \vec{b}} + |\vec{b}|^2 =$$

$$= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8\cos 60^0 + 8^2 =$$

$$= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + 8^2 = 129$$

$$= \sqrt{129}$$

№1050 Вычислить $|\vec{a}-\vec{b}|$

если $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=8$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}=60^0$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2=|\vec{a}-\vec{b}|^2$$

$$=\vec{a}^{\,2}-2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}=$$

$$=|\vec{a}|^2-2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}+|\vec{b}|^2=$$

$$=5^2-2\cdot5\cdot8\cos60^0+8^2=$$

$$=5^2-2\cdot5\cdot8\cdot\frac{1}{2}+8^2=49$$

$$=\sqrt{49}$$