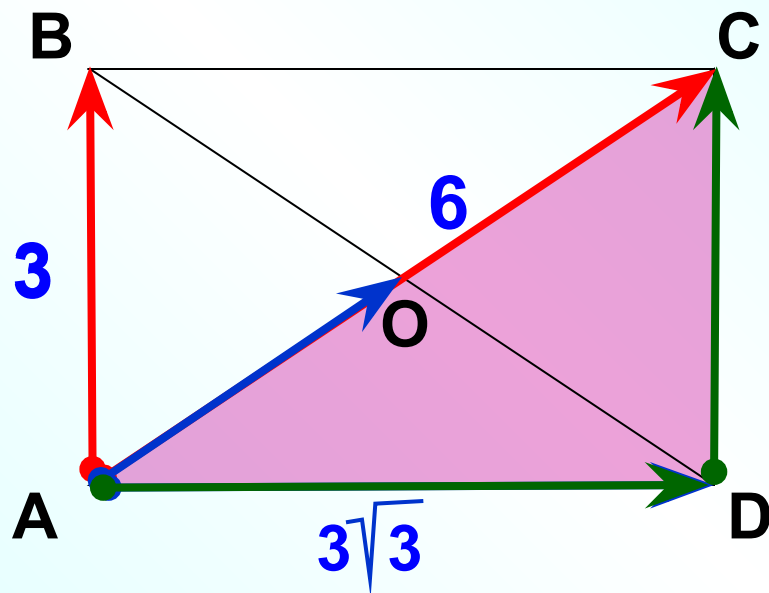


Савченко Е.М., учитель математики,
МОУ гимназия № , г. Полярные Зори, Мурманской обл.

Скалярное произведение в координатах

Л.С. Атанасян "Геометрия 7-9"



ABCD - прямоугольник

$$AD = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\cos \angle BAD = \frac{AB}{AC}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}| \cos \widehat{AB, AC} = 3 \cdot 6 \cdot \frac{3}{6} = 9$$

$$\vec{AO} \cdot \vec{AD} = |\vec{AO}| \cdot |\vec{AD}| \cos \widehat{AO, AD} = 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{27}{2}$$

$$\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0 \quad \text{т.к. } \vec{AD} \perp \vec{DC}$$

Теорема Скалярное произведение векторов

$$\vec{a} \{x_1; y_1\} \text{ и } \vec{b} \{x_2; y_2\}$$

выражается формулой $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$

Доказательство:

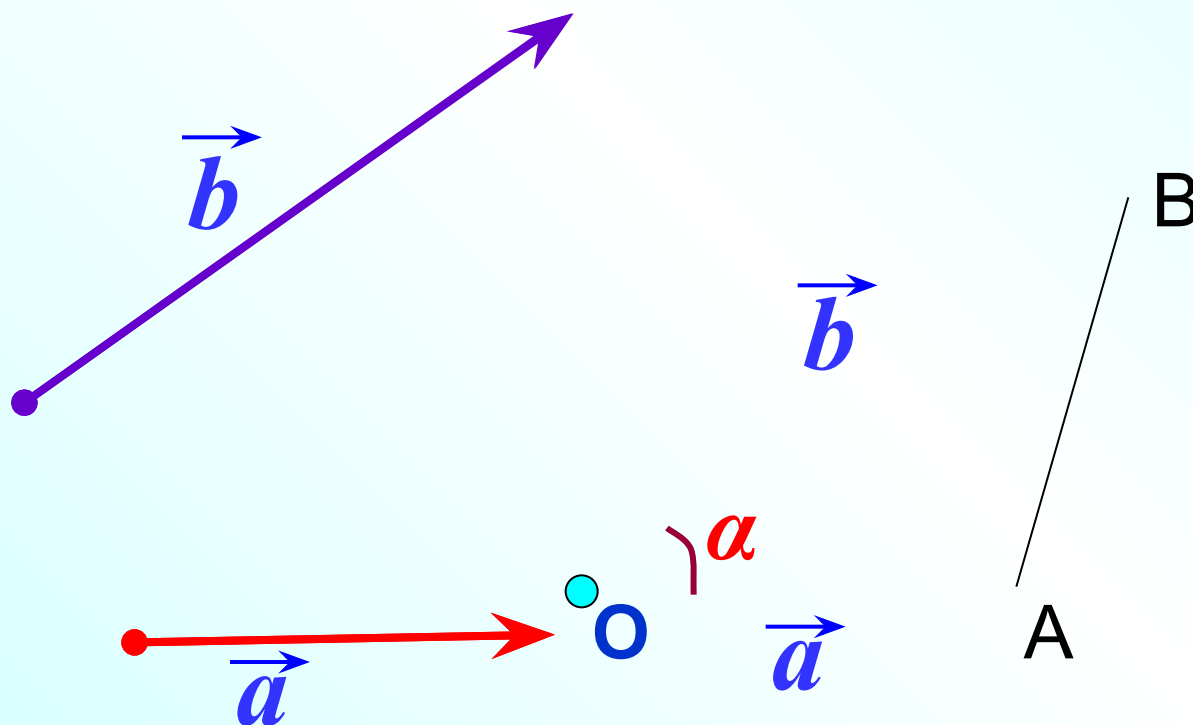
Случай, когда один из векторов нулевой

$$\vec{a} \{x_1; y_1\} \quad \vec{0} \{0; 0\}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{0} = x_1 \cdot 0 + y_1 \cdot 0$$

Рассмотрим случай, когда векторы \vec{a} и \vec{b} не нулевые
Если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то по теореме
косинусов:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \alpha$$



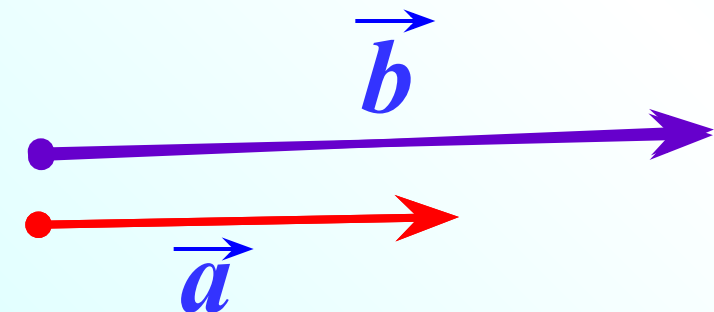
Равенство $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \alpha$ *

верно и для коллинеарных векторов.

Если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

$$\alpha = 0^\circ$$

$$\cos \alpha = 1$$



O


B

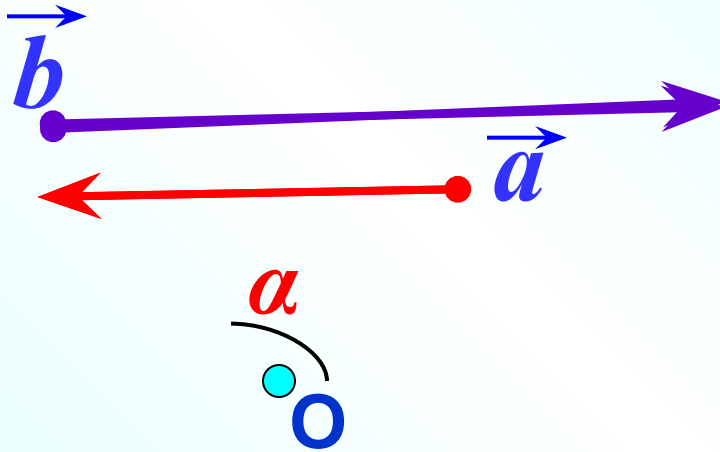
A

$$AB^2 = (OA - OB)^2 =$$

$$= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot 1 =$$

$$= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$$

Равенство $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \alpha$ 
 верно и для коллинеарных векторов.



Если $\vec{a} \updownarrow \vec{b}$

$$\alpha = 180^\circ$$

$$\cos \alpha = -1$$

B

A

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (OA + OB)^2 = \\
 &= AO^2 + OB^2 + 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \mathbf{1} = \\
 &= AO^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Note: A red bracket underlines the '1' in the second line, with an arrow pointing to the equation $1 = -\cos \alpha$ above it.

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cos \alpha \quad *$$

$$\vec{AB} = \vec{AO} + \vec{OB}$$

$$\vec{OA} = \vec{a}$$

$$\vec{OB} = \vec{b}$$

$$-|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \cdot (-1)$$

ИЗ ΔABO

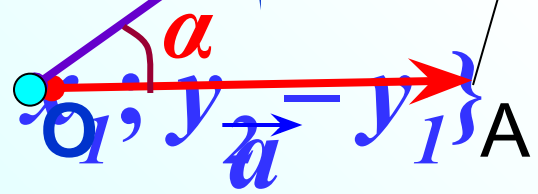
$$\vec{a} \{x_1; y_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\vec{b} \{x_2; y_2\}$$

$$|\vec{b}|^2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\vec{b} - \vec{a} \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$



$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Следствие

1

Ненулевые векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны тогда и

только тогда, когда $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

Пример

$$\vec{b} \{-2; 1\}$$

$$\vec{d} \{2; 4\}$$

$$\cdot + \cdot = 0$$

$$\vec{b} \perp \vec{d}$$

Следствие

2

Косинус угла между ненулевыми векторами \vec{a} и \vec{b}

выражается формулой

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Следствие

2

$$✓ \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Доказательство:

$$✓ \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$✓ \quad |\vec{b}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и любого числа k справедливы равенства:

1 $\vec{a}^2 \geq 0$ причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

2 $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ *Переместительный закон*

3 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$
Распределительный закон

4 $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ *Сочетательный закон*

Обоснуем



Свойство **1** следует из определения скалярного квадрата
вектора $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$

$\vec{a}^2 \geq 0$ причем $\vec{a}^2 > 0$ при $\vec{a} \neq \vec{0}$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{Переместительный закон}$$

Свойство **2** следует из определения скалярного произведения векторов

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Распределительный закон

Докажем свойство **3**

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} \{x_1; y_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2\} \quad \vec{c} \{x_3; y_3\}$$

$$\begin{aligned}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (x_1 + x_2) x_3 + (y_1 + y_2) y_3 = \\ &= (x_1 x_3 + x_2 x_3) + (y_1 y_3 + y_2 y_3) = \\ &= \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}\end{aligned}$$

$$(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad \text{Сочетательный закон}$$

Докажем свойство **4**

Рассмотрим векторы

$$\vec{a} \{x_1; y_1\} \quad k\vec{a} \{kx_1; ky_1\} \quad \vec{b} \{x_2; y_2\}$$

$$\begin{aligned}(k\vec{a}) \cdot \vec{b} &= (kx_1)x_2 + (ky_1)y_2 = \\ &= k(x_1x_2 + y_1y_2) = \\ &= k(\vec{a} \cdot \vec{b})\end{aligned}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

Распределительный закон

имеет место для любого числа слагаемых.

Например,

$$(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{d} = \vec{a} \cdot \vec{d} + \vec{b} \cdot \vec{d} + \vec{c} \cdot \vec{d}$$

$$\vec{a} \{3; -4\} \quad \vec{b} \{-2; 1\} \quad \vec{c} \{-2; -1,5\}$$

Найдите

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot 1 = -10 \quad \text{тупой}$$

$$\vec{b} \cdot \vec{c} = (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot (-1,5) = 2,5 \quad \text{острый}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1,5) = 0 \quad \text{прямой}$$

Перпендикулярны ли векторы \vec{a} и \vec{b} , \vec{b} и \vec{c} , \vec{c} и \vec{a}

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , \vec{b} и \vec{c} , \vec{c} и \vec{a}

Найдите абсциссу вектора \vec{d} , если известно, что

$$\vec{b} \{-2; 1\} \quad \vec{d} \{x; 4\} \quad \vec{b} \perp \vec{d}$$

$$\cdot + \cdot = 0$$

$$x = 2$$

$$* \quad \vec{b} \perp \vec{d} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$\vec{a} \{4; -2\} \quad \vec{i} \{1; 0\}$$

$$\vec{c} \{-2; -1,5\} \quad \vec{j} \{0; 1\}$$

Найдите

$$\vec{a} \cdot \vec{i} = 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 = 4 \quad \text{острый}$$

$$\vec{c} \cdot \vec{j} = (-2) \cdot 0 + (-1,5) \cdot 1 = -1,5 \quad \text{тупой}$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \quad \text{прямой} \checkmark$$

Перпендикулярны ли векторы \vec{a} и \vec{i} , \vec{c} и \vec{j} , \vec{i} и \vec{j}

Каким (острым, тупым или прямым) является угол между векторами \vec{a} и \vec{i} , \vec{c} и \vec{j} , \vec{i} и \vec{j}

Найдите скалярное произведение векторов:

$\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} \{ 3; -4 \}$ и $\vec{b} \{ -2; 0 \}$

$$(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2 = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 25 - 4 = 21$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} \quad |\vec{a}|^2 = 25$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} \quad |\vec{b}|^2 = 4$$

Найдите скалярное произведение векторов:

$\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, если $\vec{a} \{3; -4\}$ и $\vec{b} \{-2; 0\}$

Найдите другой способ решения

Найдите скалярное произведение векторов:

$\vec{i} - \vec{j}$ и $2\vec{i} + 3\vec{j}$, если \vec{i} и \vec{j} – координатные векторы.

$$\begin{aligned}(\vec{i} - \vec{j})(2\vec{i} + 3\vec{j}) &= 2\vec{i}^2 + 3\overset{0}{\vec{i}\vec{j}} - 2\overset{0}{\vec{i}\vec{j}} - 3\vec{j}^2 = \\ &= 2|\vec{i}|^2 - 3|\vec{j}|^2 = 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = -1\end{aligned}$$

$$|\vec{i}| = 1$$

$$|\vec{j}| = 1$$

Вычислить $\vec{CE} \cdot \vec{AB} + \vec{CB} \cdot \vec{BA}$, если

$A(-3; 3)$, $B(1; 1)$, $C(-2; 4)$, $E(-1; 2)$. Найдите 2 способа.

1 способ

2 способ



№1050 Вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|$

если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2$$

$$= \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} + |\vec{b}|^2 = \quad = \sqrt{129}$$

$$= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ + 8^2 =$$

$$= 5^2 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + 8^2 = 129$$

№1050 Вычислить $|\vec{a} - \vec{b}|$

если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 8$, $\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$

Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины.

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$$

$$(\vec{a} - \vec{b})^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2$$

$$= \vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2 =$$

$$= |\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \widehat{\vec{a} \vec{b}} + |\vec{b}|^2 = \quad = \sqrt{49}$$

$$= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos 60^\circ + 8^2 =$$

$$= 5^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} + 8^2 = 49$$