# Сложная функция.

# Производная сложной функции.

# Рассмотрим функции

$$f(t) = \sin t \qquad g(x) = x^2 - 2x + 5$$

$$y = \sin\left(x^2 - 2x + 5\right)$$

$$y = f\left(g(x)\right)$$

***Внешняя функция***

***Внутренняя функция***

**Примеры:**

$$1)\ y=\left(\underbrace{2x+1}\right)^{\boxed{6}}$$

**Внешняя функция** $f=t^6$

**Внутренняя функция** $t=2x+1$

$$2)\ y=\frac{1}{\sin^2 x}\qquad \frac{1}{\sin^2 x}=(\sin x)^{-2}$$

**Внешняя функция** $f=t^{-2}$

$$y=\left(\underbrace{\sin x}\right)^{\boxed{-2}}$$

**Внутренняя функция** $t=\sin x$

$$3)\, y = \boxed{tg}\left(\underbrace{2x+\frac{\pi}{4}}\right)$$

**Внутренняя функция**

$$t = 2x+\frac{\pi}{4}$$

**Внешняя функция** $f = tgt$

**Определить внутреннюю и внешнюю функции для данной сложной функции:**

$$1)\ y = (\underbrace{4x+1})^{\boxed{4}}$$

$$\begin{cases} t = 4x+1 & \text{- внутренняя функция} \\ f = t^4 & \text{- внешняя функция} \end{cases}$$

**Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:**

$$2)\ y = \boxed{\sin}\,\underbrace{2x}$$

$$\begin{cases} t = 2x & \text{- Внутренняя функция} \\ f = \sin t & \text{- Внешняя функция} \end{cases}$$

**Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:**

$$3)\ y = \frac{1}{(x+1)^3} \qquad y = (\underbrace{x+1})^{\boxed{-3}}$$

$$\begin{cases} t = x + 1 \\ f = t^{-3} \end{cases}$$

$t = x+1$ **- Внутренняя функция**

$f = t^{-3}$ **- Внешняя функция**

**Определить внутреннюю и внешнюю функцию для данной сложной функции:**

$4)\, y = \cos^2 x \qquad y = \left(\underbrace{\cos x}\right)^{\boxed{2}}$

$$\begin{cases} t = \cos x & \text{- Внутренняя функция} \\ f = t^2 & \text{- Внешняя функция} \end{cases}$$

# Правило нахождения производной сложной функции

**Производная сложной функции равна производной внешней функции на производную внутренней функции**

$$1)\; y = \boxed{\cos}\,\underbrace{4x}$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f = \cos t \end{cases} \qquad y' = f' \cdot t'$$

$$y' = (\cos t)' \cdot (4x)' = -\sin t \cdot 4 = -4\sin t =$$

$$= 4\sin 4x$$

$$2)\ y=\boxed{ctg}\underbrace{\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\begin{cases} t=2x+\dfrac{\pi}{3} \\ f=ctgt \end{cases} \qquad y'=f'\cdot t'$$

$$y'=(ctgt)'\cdot\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)'=-\frac{1}{\sin^2 t}\cdot 2=-\frac{2}{\sin^2 t}=$$

$$=-\frac{2}{\sin^2\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)}$$

3) $y=\sin^2 x$ $\quad y=(\underbrace{\sin x})^{\boxed{2}}$

$$\begin{cases} t=\sin x \\ f=t^2 \end{cases} \qquad y'=f'\cdot t'$$

$$y'=\left(t^2\right)'\cdot(\sin x)'=2t\cdot\cos x=$$

$$=\underbrace{2\sin x\cos x}=\sin 2x$$

$$4)\ y=\left(\underbrace{x^2+2x}\right)^{\boxed{4}}$$

$$\begin{cases} t=x^2+2x \\ f=t^4 \end{cases} \qquad y'=f'\cdot t'$$

$$y'=\left(t^4\right)'\cdot\left(x^2+2x\right)'=4t^3\cdot(2x+2)=8t^3\cdot(x+1)=$$

$$=8(x+1)\cdot\left(x^2+2x\right)^3$$

# *Найти производные функций:*

1) $y = (1 - 4x)^2$

2) $y = \dfrac{1}{3x + 2}$

3) $y = \cos 3x$

4) $y = ctg(4x - 3)$

1) $y' = -8(1 - 4x)$

2) $y' = -\dfrac{3}{(3x + 2)^2}$

3) $y' = -3\sin 3x$

4) $y' = -\dfrac{4}{\sin^2(4x - 3)}$

**Решить уравнение** $y' = 0$

$$1)\, y = \boxed{\cos}\, \underbrace{2x} + x - 1$$

$$y' = (\cos 2x + x - 1)' = (\cos 2x)' + (x)' - 1' =$$

$$\begin{cases} t = 2x \\ f = \cos t \end{cases}$$

$$= (\cos t)' \cdot (2x)' + 1 - 0 = -\sin t \cdot 2 + 1 =$$

$$= -2\sin t + 1 = -2\sin 2x + 1$$

$$-2\sin 2x + 1 = 0$$

$$-2\sin 2x = -1$$

$$2\sin 2x = 1$$

$$\sin 2x = \frac{1}{2}$$

$$\sin t = a$$

$$t = (-1)^k \cdot \arcsin a + \pi k, k \in Z$$

$$2x = (-1)^k \cdot \arcsin \frac{1}{2} + \pi k$$

$$2x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$2)\, y = \sin 4x - 2x + 3 \qquad y' = 0$$

$$y' = (\sin 4x - 2x + 3)' = (\sin 4x)' - (2x)' + 3' =$$

$$\begin{cases} t = 4x \\ f = \sin t \end{cases}$$

$$= (\sin t)' \cdot (4x)' - 2 + 0 = \cos t \cdot 4 - 2 = 4\cos t - 2 =$$

$$= 4\cos 4x - 2 \qquad 4\cos 4x - 2 = 0$$

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\cos 4x = \frac{1}{2}$$

$$\cos t = a$$

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$$

$$4x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n,$$

$$4x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n \qquad x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$$

$$3)\, y=\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{4} \qquad\qquad y'=0$$

$$y'=\left(\sin\frac{x}{2}+\frac{x}{4}\right)'=\left(\sin\frac{x}{2}\right)'+\left(\frac{x}{4}\right)'=$$

$$\begin{cases} t=\dfrac{x}{2}, \\ f=\sin t \end{cases} \qquad =(\sin t)'\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'+\frac{1}{4}\cdot(x)'=$$

$$=\cos t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cos t+\frac{1}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{4}=0$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{4}$$

$$\cos\frac{x}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{2}=\pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+2\pi n$$

$$\frac{x}{2}=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n \qquad x=\pm\frac{4\pi}{3}+4\pi n,\, n\in Z$$